Inzien en Bewijzen

Jan van Eijck en Albert Visser

albert@phil.uu.nl, jve@cwi.nl

Noordwijkerhout, 4 februari 2005

Samenvatting

In maart 2005 verschijnt bij Amsterdam University Press Inzien en Bewijzen, Bedoeling van het boek is het verband te laten zien tussen inzicht en bewijs, en de belangstelling bij leerlingen en docenten voor vaardigheid in bewijsvoering aan te wakkeren. In deze lezing laten we iets zien van wat ons voor ogen staat.

Over het boek

- Geconcipieerd onder het toeziend oog van en in interactie met een klankbordgroep uit het onderwijs (Wim Berkelmans, Christian Bokhove, Wout de Goede. Henk Pfaltzgraff, Jan de Ruijter, Marco Swaen)
- Uitgeprobeerd op middelbare school-leerlingen (Wout de Goede) en op eerstejaars filosofie studenten (Joost Joosten).
- Onderdeel van een AUP Serie Exact in Context.
- Te verschijnen in maart 2005.
- Winkelprijs: 17.50 euro. Hier en nu te bestellen met korting voor 15 euro.

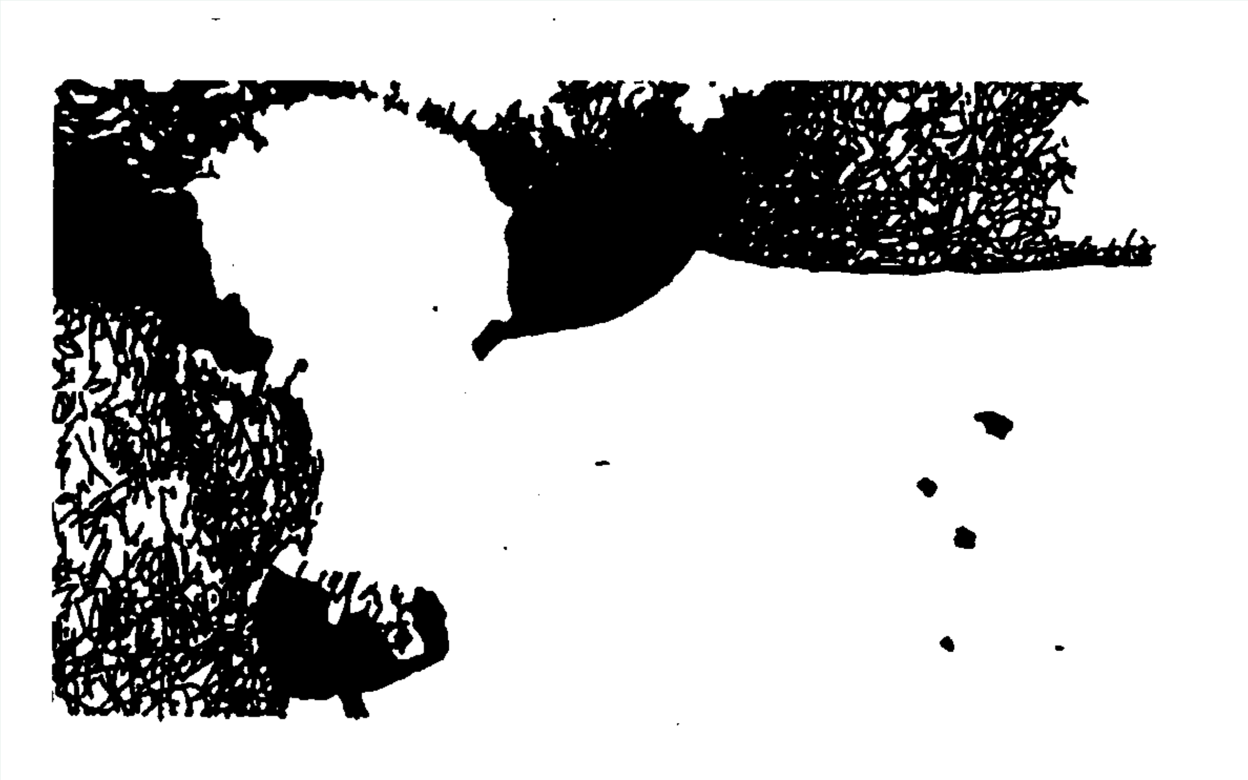
Korte Inhoud van de Lezing

- Rationale van het boek
- Voorbeelden van direct inzicht
- Verschillende bewijzen, verschillende inzichten
- Geschiedenis
- Bewijzen gebaseerd op conceptuele analyse: Cantor-Schröder-Bernstein.
- Bewijsrecepten

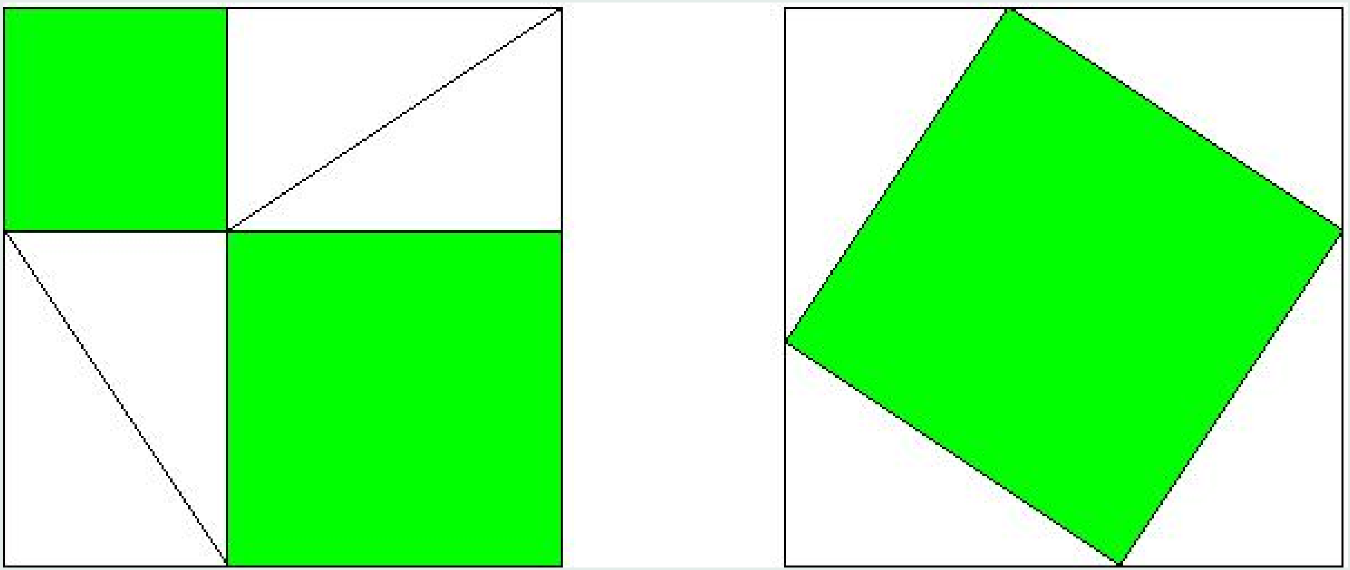
Rationale van het boek

- Kennis versus informatie
- Gevoeligheid voor schoonheid van wiskunde: inzicht
- Gevoeligheid voor rol van bewijzen
- Inzicht en bewijs als componenten van kennis
- Bewijs als rechtvaardiging versus bewijs als (voertuig voor) inzicht

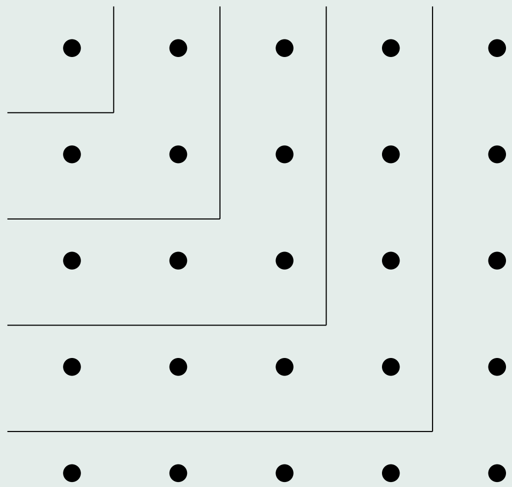
Direct Inzicht



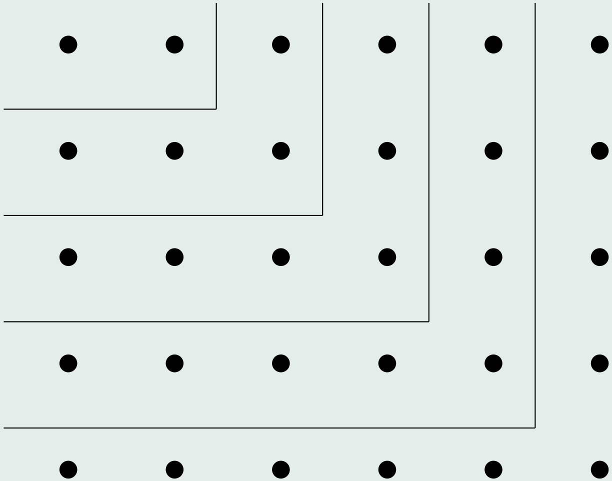
Pythagoras 'direct'



Het Gnomon: de som van de eerste n oneven getallen



Het Gnomon: de som van de eerste n even getallen



Interactieve sessie ...

Meer voorbeelden van direct inzichten: opdracht ...

Vijf bewijzen van $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Eerste bewijs: Karl Gauss' inzicht als zevenjarige scholier.

Zet $1 + \cdots + n$ in twee rijen onder elkaar:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

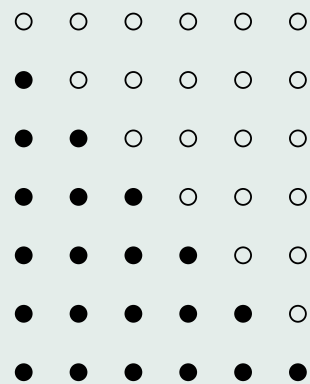
Tel nu kolomsgewijs op:

$$(n+1) \;+\; (n+1) \;+\; \cdots \;+\; (n+1) \;+\; (n+1)$$

Er zijn n kolommen.
Resultaat van tweemaal de som $1 + \cdots + n$ nemen is $n(n+1)$.
Resultaat van eenmaal de som $1 + \cdots + n$ nemen is dus $\frac{n(n+1)}{2}$.

Tweede bewijs: gnomon.

Merk op dat de volgende rechthoek bestaat uit $n+1$ rijen van n kolommen, en dat de zwarte bolletjes precies de helft van de rechthoek vormen.



Derde bewijs: combinatoriek.

$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ geeft het aantal manieren om twee dingen te kiezen uit $n+1$ mogelijkheden.
Waarom is dit nu gelijk aan $1+\cdots+n$? Neem aan dat je een bak met $n+1$ knikkers hebt, genummerd van 1 tot en met $n+1$. Je neemt twee knikkers uit de bak, met de afspraak dat de tweede knikker een lager nummer moet hebben dan de eerste. Als je eerste knikker nummer k heeft, kun je je tweede knikker op $k-1$ manieren kiezen; er zitten immers $k-1$ knikkers in de bak met een lager nummer dan k. Totaal geeft dit $1+2+\cdots+n$ manieren om twee knikkers uit de bak te halen.

Vierde bewijs: gnomon + een extra stapje.

We hebben met behulp van een gnomon ingezien dat de som van de eerste n even getallen $n(n+1)$ is.
Welnu, als je de eerste n even getallen neemt, en je deelt elk ervan door 2, dan krijg je de eerste n getallen.
De som van de eerste n getallen is dus $\frac{n(n+1)}{2}$.

Vijfde bewijs: volledige inductie.

Basisstap: Voor $n = 1$ geldt dat $\frac{n(n+1)}{2} = 1$. Dit is inderdaad de som van de natuurlijke getallen tot en met 1.
Inductiestap: Neem aan (inductiehypothese) dat $1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
We moeten nu aantonen:

$$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dit volgt direct uit:

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + n + (n+1) &\overset{\text{ih}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} &= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

In het boek: vier bewijzen van $\sqrt{2}$ is geen breuk.

Interactieve sessie . . .

- Welke van deze bewijzen geven inzicht?
- Is het nuttig meer dan één bewijs te geven?
- Wiskunde als ketting (als er één schakel ontbreekt is alles weg) of wiskunde als touw (verbanden blijven intact zolang er genoeg vezels intact blijven)?

Som eerste n kwadraten: inzicht via combinatoriek

Bezie $\binom{n+1}{3}$ voor $n \geq 2$. Dit is het aantal manieren on 3 knikkers uit $n+1$ knikkers te kiezen. Stel de knikkers zijn genummerd van 1 tot en met $n+2$. We kiezen steeds eerst de knikker met het laagste rangnummer en dan de andere twee met hogere rangnummers.

Stel dat we eerst de knikker met nummer k kiezen, dan kunnen we de andere twee op $\binom{n+1-k}{2}$ manieren kiezen.

Ergo:

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{3} &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1-k}{2} \\
&= \sum_{j=2}^{n} \binom{j}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j \cdot (j-1)}{2} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j}{2}
\end{aligned}
$$

Als we $\binom{2}{3}$ gelijk aan 0 stellen, klopt dit ook voor $n = 1$.

Dus:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} j^2 &= 2 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{3} + \frac{(n+1) \cdot n}{2} \\ &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)\end{aligned}$$

Geschiedenis

Euclides' Postulaten

I Een tweetal punten kan door precies één lijnstuk met elkaar worden verbonden.

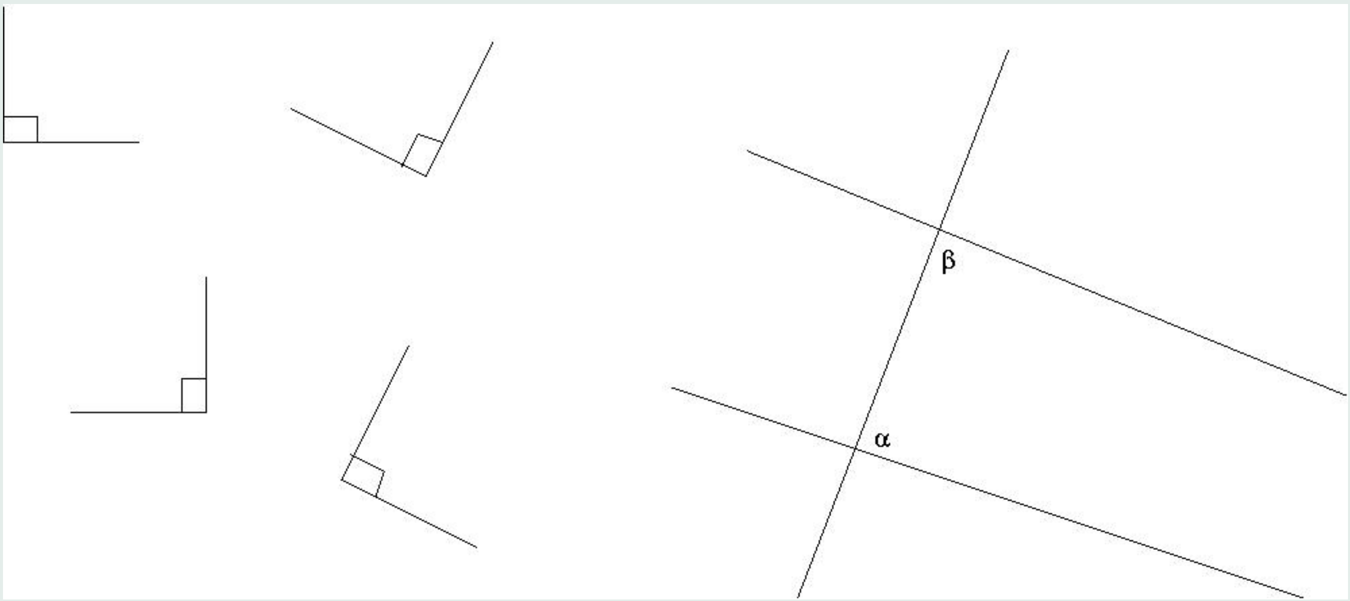
II Een lijnstuk kan worden doorgetrokken in precies één lijn.

III Een punt P en een lengte r bepalen een cirkel met middelpunt P en straal r.

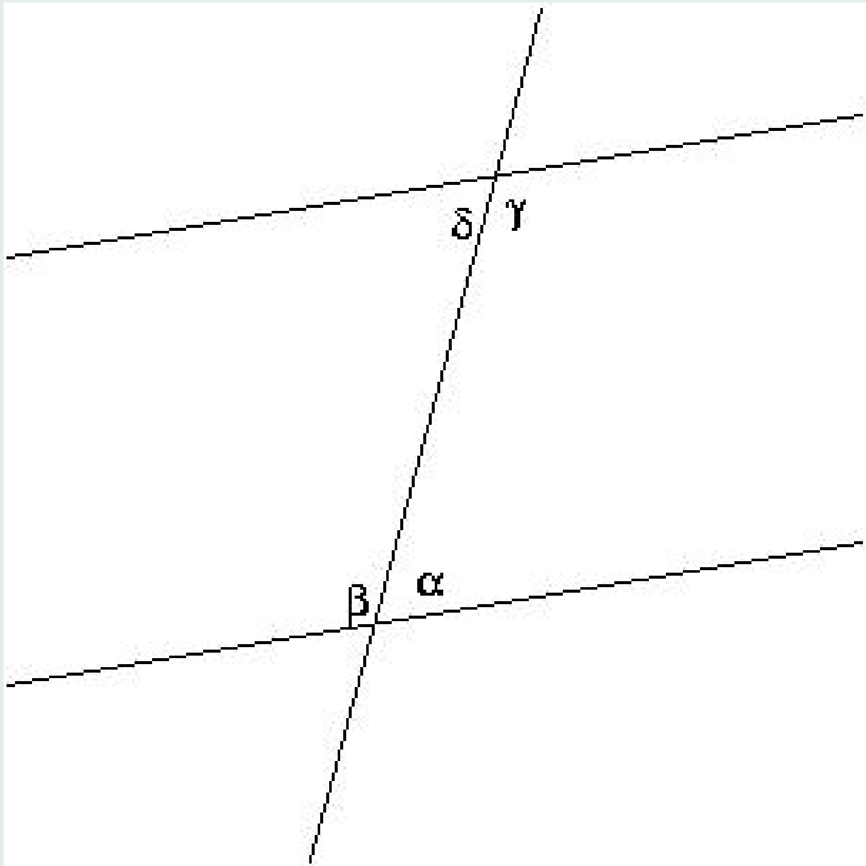
IV Alle rechte hoeken zijn congruent (gelijk).

V Als een lijn twee lijnen snijdt, met de twee binnenhoeken aan dezelfde zijde samen kleiner dan twee rechte hoeken, dan zullen de twee lijnen elkaar aan die zijde snijden.

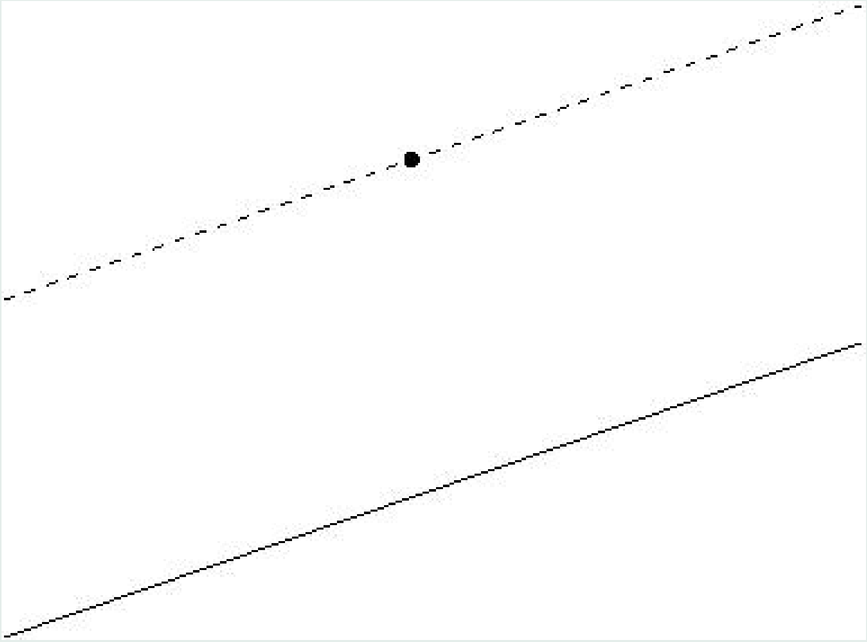
Illustraties van IV en V



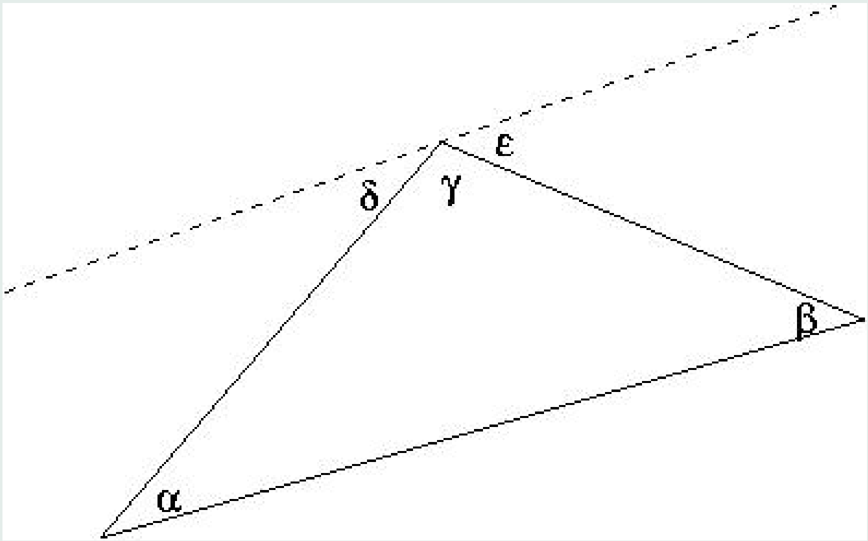
Een gevolg van het vijfde postulaat: $\alpha = \delta$ en $\beta = \gamma$



Een gevolg van postulaten I tm IV



Een gevolg van de twee voorgaande stellingen



De som van de hoeken van een driehoek is gelijk aan $180°$.

Bewijzen gebaseerd op conceptuele analyse

We analyseren het begrip (kardinaal-)getal met behulp van het begrip gelijkmachtigheid. Twee verzamelingen X en Y zijn gelijkmachtig, of $X \sim Y$ als er een bijectie tussen die verzamelingen bestaat. Een verzameling X is kleiner dan een andere Y, of $X \preceq Y$. als er een injectie van X in Y bestaat.

Deze analyse geeft ons de mogelijkheid gebruikelijke wetten van de getallen te bewijzen. Eén fundamentele eigenschap is: als $X \preceq Y$ en $Y \preceq X$, dan $X \sim Y$. De stelling die ons deze eigenschap geeft heet Cantor-Schröder-Bernstein.

Stelling van Cantor-Schröder-Bernstein

Als A en B verzamelingen zijn met $A \preceq B$ en $B \preceq A$, dan geldt $A \sim B$.

Bewijs Neem voor het gemak aan dat A en B geen elementen gemeen hebben.

We kunnen de verzamelingen altijd disjunct maken, bijvoorbeeld door A te vervangen door $\{(0, a) \mid a \in A\}$ en B door $\{(1, b) \mid b \in B\}$. Voor wie visueel is ingesteld: we kleuren de elementen uit A wit en die uit B zwart.

We mogen aannemen dat er injecties $f : A \to B$ en $g : B \to A$ zijn. Met behulp van die twee injecties gaan we nu een één-op-één correspondentie tussen A en B construeren.

We visualiseren A als een verzameling witte stippen, en B als een verzameling zwarte stippen. De injectie f geven we aan als een verzameling gestippelde pijlen van witte naar zwarte stippen ($\circ \dashrightarrow \bullet$), de injectie g als een verzameling zwarte pijlen van zwarte naar witte stippen ($\bullet \longrightarrow \circ$).

Laten we de witte stippen even de meisjes noemen, en de zwarte stippen de jongens. Er mogen overaftelbaar veel jongens en meisjes zijn: over de grootte van A en B hebben we niets aangenomen.

De twee injecties geven een beeld van een huwelijksmarkt, waarbij elke jongen één meisje op het oog heeft, en elk meisje één jongen.

Wat we nu moeten laten zien is dat we een massahuwelijk kunnen sluiten zó dat er geen vrijgezellen of vrijsters overblijven.

Elke jongen heeft een meisje op het oog, en elk meisje een jongen, maar het is duidelijk dat de zaak fout gaat als we alle meisjes hun zin geven: er blijven dan vrijgezellen over.

Als we alle jongens hun zin geven gaat het ook fout, want dan blijven er vrijsters over.

Een jongen waar geen meisje verliefd op is noemen we een sulletje. Een meisje waar geen jongen verliefd op is, is een tutje.

Door voorkeurspijlen te volgen krijg je een pad door de huwelijksmarkt. Zulke paden zijn er in vier soorten.

1. Paden zonder tutjes of sulletjes die een eindige lus vormen: je begint ergens, bij een jongen of bij een meisje, en na eindig veel stappen van (om en om mannelijke en vrouwelijke) voorkeuren volgen ben je weer bij de oorspronkelijke persoon terug.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & \dashrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \circ & \dashrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \circ & \cdots & \bullet \\ \uparrow & & & & & & & & & & \downarrow \\ \bullet & \dashleftarrow & \circ & \longleftarrow & \bullet & \dashleftarrow & \circ & \longleftarrow & \bullet & \cdots & \circ \end{array}$$

   Een speciaal geval hiervan is natuurlijk $\circ \mathrel{\substack{\dashrightarrow \\ \longleftarrow}} \bullet$. Dit komt helaas te weinig voor.

2. Paden zonder tutjes of sulletjes die naar beide zijden oneindig doorlopen. Je komt nooit aan een beginpunt als je achteruitloopt, en nooit aan een eindpunt als je vooruitloopt.

$$\cdots \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \cdots$$

3. Paden die beginnen bij een tutje, en die van daaruit oneindig doorlopen.

$$\circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

4. Paden die beginnen bij een sulletje, en die van daaruit oneindig doorlopen.

$$\bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \bullet \longrightarrow \circ \dashrightarrow \cdots$$

Meer mogelijkheden zijn er niet. Dat volgt uit het feit dat zowel de voorkeuren van de jongens als die van de meisjes een injectie vormen.

De huwelijksmarkt valt dus in segmenten uiteen, al naargelang het soort pad dat er doorheen loopt. Maar nu is het gemakkelijk om iedere jongen aan een meisje te koppelen.

Interactieve sessie ...

Hoe?

Bij de eindige segmenten maakt het niet uit wie we hun zin geven: laten we zeggen de meisjes.

Bij de oneindige segmenten zonder tutjes of sulletjes maakt het ook niet uit wie we hun zin geven: laten we zeggen de meisjes.

Bij de segmenten met een oneindig pad dat begint bij een sulletje moeten we dat sulletje zijn zin geven, anders komt hij nooit aan de vrouw. Maar dan moeten we in dit segment van de huwelijksmarkt alle jongens hun zin geven.

Bij segmenten met een oneindig pad dat begint bij een tutje moeten we dat tutje haar zin geven, anders vindt ze nooit een vent. Maar dan moeten we in dat segment alle meisjes hun zin geven.

Dit geeft de gevraagde één-op-één correspondentie. Ons bewijs is rond.

Bewijsstructuur en bewijsrecepten

Gegeven: A, B, ...

Te bewijzen: P

Bewijs:

...

> Stel C ...
>
> Te bewijzen: Q
>
> Bewijs: ...
>
> ...
>
> Dus Q

...

Dus P

Centrale vragen

Hoe gebruik ik een gegeven?

Hoe ontleed ik een te bewijzen?

Het boek geeft systematische aanwijzingen ...

Website met interactieve animaties

http://www.cwi.nl/~jve/qed