DOCENTENHANDLEIDING

Februari 2005

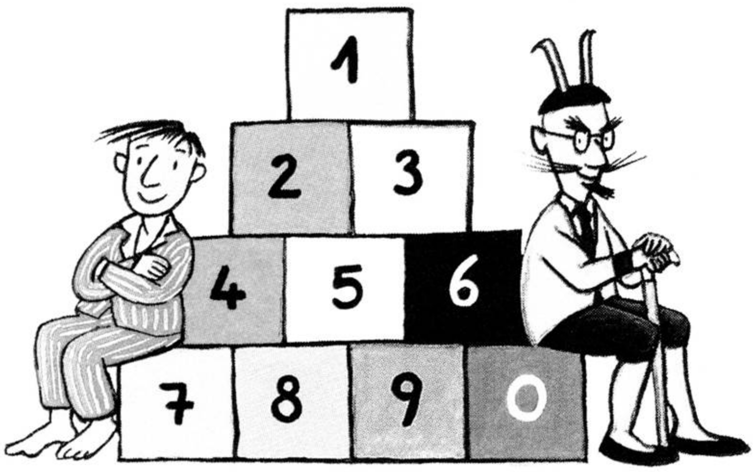
De telduivel

Mark van den Aarssen
Lindenholt College, Nijmegen

Herman Alink
Dolf van den Hombergh
Bart Jordens
Elzendaal College, Boxmeer

Richard Klein Breteler
Jos Winkel
Canisius College, Nijmegen

Rainer Kaenders
Instituut voor Leraar en School,
Radboud Universiteit Nijmegen
&
Canisius College, Nijmegen



Inhoud

De AZL groep wiskunde

De praktische opdracht *De telduivel* is een product van de AZL-Werkgroep wiskunde in de schooljaren 2003-2005. De groep beoogt materiaal en manieren te ontwikkelen om het Actief en Zelfstandig Leren (AZL) van wiskunde bij leerlingen in de Tweede Fase te bevorderen en maakt deel uit van een groter project met werkgroepen in verschillende vakken, het AZL-project. Met behulp van actieonderzoek neemt de groep de zelf ontwikkelde lespraktijk onder de loep en vergaart hierdoor inzichten in het actief en zelfstandig leren van wiskunde in het Nederlands voortgezet onderwijs.

Op dit moment bestaat de groep uit de docenten Bart Jordens, Herman Alink, Dolf van den Hombergh (alle drie van het Elzendaal College te Boxmeer), Richard Klein Breteler, Jos Winkel (beiden van het Canisius College in Nijmegen) en Mark van den Aarssen (Lindenholt College in Nijmegen). Voorzitter van de groep namens het Instituut voor Leraar en School te Nijmegen is Rainer Kaenders (Radboud Universiteit en Canisius College, Nijmegen).

Inleiding

Getallen liggen ten grondslag aan alle wiskunde. Zelfs de meest toegepast wiskundige baseert zijn stellingen en theorieën op getalbegrip dat door alle wiskundigen ter wereld wordt gedeeld. Met getallen kunnen in eerste instantie aantallen maar ook verschillen, veelvouden, verhoudingen en veel andere objecten worden uitgedrukt en beschreven. Veelvuldig worden de resultaten van metingen in getallen aangegeven. Hierdoor verschilt het getalbegrip in de natuurwetenschappelijke schoolvakken sterk van dat in de wiskunde: tussen getallen die bij een meting als gelijkwaardig worden beschouwd kan wiskundig gezien een wereld van verschil liggen. Getaltheorie is de diep in onze cultuur verwortelde theorie die zich met de wiskundige eigenschappen van getallen bezig houdt. Volgens Carl Friedrich Gauß (1777-1855), de princeps mathematicorum of vorst der wiskundigen, is getaltheorie de koningin onder alle wiskundige theorieën.

Het is tegenwoordig zeer slecht gesteld met het getalbegrip van onze Nederlandse leerlingen op de middelbare school in Nederland. Fundamentele begrippen zoals deelbaarheid en priemgetallen, die eigenlijk op de basisschool thuis horen, zijn hun structurele plaats in het Nederlandse wiskundeonderwijs kwijtgeraakt, waardoor bijvoorbeeld het rekenen met breuken, wortels, decimale en andere voorstellingen van getallen tot in de hoogste klassen van het VWO tot problemen leidt. Wij zien hier een voorbeeld van *antididactische omissie*: wiskundig didactische problemen zijn opgelost door ze consequent uit de weg te gaan.

Dit is de uitgangssituatie. Wij willen met deze opdracht niet de wereld – of laten we zeggen Nederland – verbeteren. Wel willen we in tijden waar we bij leerlingen nauwelijks nog getalbegrip mogen verwachten de allerergste gebreken proberen te verhelpen en hun niet meer dan een idee geven van het bestaan van zoiets als getaltheorie.

Getalbegrip is een deel van wiskunde. Dat betekent voor ons, dat wij niet aan getalbegrip kunnen werken zonder tegelijkertijd de leerlingen kennis te laten maken met de manier van denken in wiskunde. Zij leren onderscheiden tussen ware, bijna ware, bedrieglijk waar uitziende en klaarblijkelijk foute uitspraken. En hiervan kun je elkaar overtuigen op een manier die ieder weldenkend mens moet kunnen accepteren. Vaak is het noodzakelijk om eerst gemeenschappelijk en helder vast te leggen wat je bedoelt voor dat je het waarheidsgehalte van een uitspraak onder de loep gaat nemen. Dit komt niet altijd overeen met de dagelijkse ervaring van leerlingen in veel andere vakken en vaak ook niet met het eerder genoten wiskundeonderwijs. Wij kiezen dan ook voor een voorzichtige, niet formele, maar wel inhoudelijk prikkelende benadering. Bijvoorbeeld onderzoeken leerlingen de gelijkheid van twee getallenrijen door de beginwaardes en de verschilrijen te bekijken zonder dat wij hiervoor een algemene notie van volledige inductie verwachten. Die zou na afloop van deze opdracht moeten worden ontwikkeld.

Een tweede voor ons belangrijk aspect is dat deze praktische opdracht de mogelijkheid geeft om in wiskunde creatief bezig te kunnen zijn. Wij hanteren hier het onderscheid tussen divergente creativiteit (het vrije scheppen van nieuwe dingen) en convergente creativiteit (het creatief oplossen van gegeven opgaven). Voor divergente creativiteit moet het individu voldoende ruimte hebben voor originele eigen scheppingen. Dit is bijvoorbeeld niet het geval bij *discovery learning* (“verstopte paaseieren”, H. Freudenthal). Het idee van de telduivel, wiskunde met veel fantasie uit te leggen, komt ons goed van pas om leerlingen ook nog bij gevorderde wiskunde creatief te kunnen laten zijn.

De praktische opdracht in het kader van de getaltheorie is in eerste instantie geschreven voor leerlingen in 5 VWO met Wiskunde B1 of Wiskunde B1,2, maar zou ook gedeeltelijk al in 4 VWO uit te voeren zijn (zie hieronder in *De uitvoering van de praktische opdracht*).

De praktische opdracht bestaat uit drie delen. Deel A laat leerlingen nadenken over allerlei aspecten van de getaltheorie aan de hand van dertien beweringen. De nadruk ligt in dit deel op het bewijzen. Dit deel biedt al zoveel aanknopingspunten dat het zou kunnen dienen als zelfstandige praktische opdracht (zie hieronder in *De uitvoering van de praktische opdracht*).

Deel B bestaat uit het lezen van twee hoofdstukken uit het boek *De telduivel* en beantwoorden van een aantal vragen over de wiskundige achtergrond hiervan.

In Deel C kiezen leerlingen zelf een onderwerp om te onderzoeken en schrijven hierover een nieuw hoofdstuk in de stijl van *De telduivel*. Hier kunnen leerlingen hun creativiteit in dienst stellen van de wiskunde.

In Appendix II en III kunt u zien hoe docenten die de praktische opdracht gegeven hebben, bezig zijn geweest met een aantal onderwerpen.

Wellicht zult u, naast het aanbieden van deze kant-en-klare praktische opdracht, mogelijk bezig willen blijven met deze stof. We bevelen u daarvoor onder andere de volgende boeken aan:

- Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from the Book*, Springer-Verlag; 2nd corr. print edition, 1998, ISBN: 3540636986
- Frits Beukers, *Getaltheorie voor Beginners*, Epsilon-Uitgaven, 2e druk, 2000,
- ISBN 90-5041-049-9
- Ebbinghaus, H.D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R., *Zahlen*, Springer-Verlag , 3. verb. Aufl., 1992, XIV, ISBN: 3-540-55654
- Singh, Simon*, Het laatste raadsel van Fermat,* 1998, De Arbeiderspers, Amsterdam, ISBN 90 295 3728 0
- Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex, England: Penguin Books, 1986.

Bij het ontwikkelen van deze opdracht hebben wij zelf veel wiskunde bedreven en er veel plezier aan beleefd. Voor ons is dit zeer belangrijk om enthousiasme voor ons vak uit te kunnen stralen. Wij moedigen u bij dezen dus aan om zelf enthousiast met de stof aan de slag te gaan, veel nieuwe dingen te leren, de opdracht uit te bouwen en hem uiteindelijk tot uw eigen opdracht te maken.

Wij wensen u en uw leerlingen veel plezier met *De telduivel*.

De AZL-groep wiskunde

De uitvoering van de praktische opdracht

De praktische opdracht is in verschillende vormen te gebruiken. Hieronder volgt een aantal mogelijkheden.

Zoals u hem aantreft in Kopieerbijlage 1 bestaat de praktische opdracht uit drie gedeelten. U deelt de gehele praktische opdracht in één keer uit (dus Deel A, B en C inclusief het beoordelingsformulier). Hierdoor hebben de leerlingen overzicht over wat hen te wachten staat en hoe ze beoordeeld worden. In het bijzonder het vooraf uitdelen van het beoordelingsformulier is van belang, omdat dat leerlingen ook op het goede spoor zet van de verdeling van de tijd. Het voorkomt dat leerlingen te lang bezig zijn met onderdelen die weinig punten opleveren. De AZL-groep vond Deel C het belangrijkst, dus dat krijgt de meeste punten.

De uitwerking van Deel A moet na één week ingeleverd worden. Hierdoor gaan leerlingen snel en gemotiveerd aan de slag en wachten niet tot de deadline waarop het hele werkstuk ingeleverd moet worden. Bij het nakijken - aan de hand van het scoreformulier – ziet u wat leerlingen kunnen en in de nabespreking kunt u eventuele hiaten wegwerken. Bovendien is er dan gelegenheid accenten te leggen op wat u belangrijk vindt en graag terug zou willen zien in de uitwerking van Deel B en C. In Kopieerbijlage 2 vindt u voorbeelduitwerkingen die u kan uitdelen bij de bespreking van Deel A. Mogelijk dat u tijdens het begeleiden de leerlingen iets wil vertellen over *volledige inductie.* De AZL-groep heeft er bewust voor gekozen om hierover niets in de praktische opdracht op te nemen, omdat het hier ook goed zonder kan.

Vervolgens gaan de leerlingen aan de slag met Deel B en C. In principe kan dit allemaal buiten de les gebeuren, verspreid over bijvoorbeeld drie weken. Appendix I kan helpen bij het nakijken van Deel B.

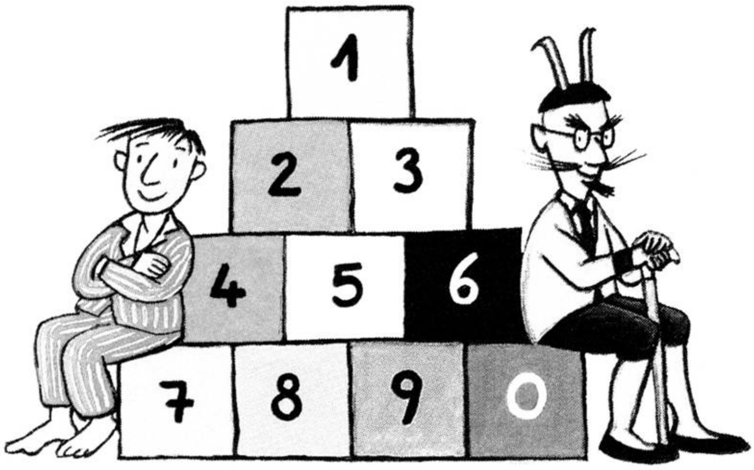
Deel C is de belangrijkste opdracht. Deze is open en biedt de leerlingen de mogelijkheid hun creativiteit in te zetten in dienst van de wiskunde.

Een andere manier van gebruik van de praktische opdracht is Deel A in 4 VWO als één geheel te geven en Deel B en C als vervolg in 5 VWO. Daartoe dient u zelf het scoreformulier aan te passen.

Een laatste idee is Deel A, net als een A-lympiade, op één dag te laten maken.

Kopieerbijlage 1

De telduivel



Een slaapverwekkende opdracht voor iedereen die van wiskunde durft te dromen

Een praktische opdracht voor leerlingen van 5 VWO met wiskunde B

DE TELDUIVEL

Inleiding

‘Wiskunde? Hou op zeg! Voor veel mensen is wiskunde een warboel van getallen, sommen en onbegrijpelijke berekeningen. Ook Robert, de jongen in de blauwe pyjama, moet er niks van hebben. Tot hij bezoek krijgt van een telduivel en twaalf nachten lang met getallen aan het goochelen is. Dan blijkt dat wiskunde een spannend en grappig spel is dat Robert – en ook de lezers – geen enkele moeite kost. Wiskunde is niet moeilijk. Zodra het telduiveltje met zijn toverstok zwaait, verdwijnt de angst voor getallen als sneeuw voor de zon.’

Tot zover de tekst op de achterkant van het boek
*De telduivel, een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde i*s
van Hans Magnus Enzensberger (De Bezige Bij, Amsterdam, 1999, ISBN 90 234 8149 6).

Deze praktische opdracht bestaat uit drie delen. In het eerste deel maak je kennis met wiskundige uitspraken, vermoedens en bewijzen. In het tweede deel ga je twee hoofdstukken van *De telduivel* lezen. Daar krijg je een aantal vragen over, die je in je groepje schriftelijk beantwoordt. In het derde deel schrijf je in hetzelfde groepje een nieuw hoofdstuk bij dit boek: ‘De dertiende nacht’.

Deel A

Deze praktische opdracht gaat over getallen en met name over *gehele getallen*. Dat zijn allereerst de *natuurlijke getallen* 0, 1, 2, 3, 4… maar ook hun tegengestelde: -1, -2, -3, -4…, *de negatieve gehele getallen*. Deze getallen kun je optellen en vermenigvuldigen. Je weet al sinds de basisschool dat sommige getallen uiteenvallen in kleinere getallen. Bijvoorbeeld: $6=1+1+1+1+1+1$ of $6=2\cdot3$. Het uiteenvallen in meerdere getallen die worden opgeteld is uiteindelijk saai want je eindigt altijd met een rij énen. Het uiteenvallen ten opzichte van de vermenigvuldiging daarentegen is meteen spannend: sommige getallen vallen uiteen zoals: $4 = 2\cdot2$, $6 = 2\cdot3$, $8 = 2\cdot2\cdot2$, $9 = 3\cdot3$, enz. en anderen doen dat niet: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … Deze laatste getallen hebben een naam.

Definitie Een natuurlijk getal groter dan 1 dat niet het product is van twee kleinere natuurlijke getallen noemen wij een ***priemgetal.***

Hoe vind je zulke priemgetallen? Hoe weet je of je met een priemgetal te maken hebt? Hoeveel priemgetallen zijn er? Op hoeveel manieren kunnen getallen uiteenvallen? Komt het vaker voor dat twee priemgetallen twee verschillen, zoals 11 en 13 of 17 en 19? Kun je elk even getal schrijven als som van twee priemgetallen? Dit zijn vragen waarop de antwoorden soms al ruim 2300 jaar bekend zijn maar waar ook deels nog vandaag de dag geen mens het antwoord op weet. Een groot deel van de wiskunde draait al duizenden jaren om het beantwoorden van zulke vragen over getallen. De vrucht van deze zoektocht van ontelbaar veel mensen noemen we *getaltheorie* – volgens de wiskundige Carl Friedrich Gauß (1777-1855) de koningin onder alle wiskundige theorieën. Tegenwoordig wordt getaltheorie veelvuldig toegepast. Dit is eigenlijk geen wonder want zodra je het met getallen te maken hebt, komen natuurlijk ook hun fundamentele eigenschappen kijken.

Boze tongen onder wiskundigen vertellen wel eens de mop dat voor een natuurkundige elk oneven getal een priemgetal is: 3 is er een, 5 is er een, 7 is er een, 9 is een meetfout, 11 is er een, 13 is er een, 15 is een meetfout, 17 is er een en 19 is er ook een. Dus blijkt uit negen metingen dat de bewering klopt tot op twee meetfoutjes na. Dit lijkt er dus op dat er zeer verschillende manieren van verschillende kwaliteit bestaan om een bewering aan te tonen. Wij wiskundigen willen het eerst *zeker* weten voordat wij een bewering accepteren.

In dit eerste deel krijgen jullie een aantal beweringen voorgeschoteld waarvan jullie zelf moeten uitmaken of deze beweringen kloppen of niet. De conclusies dien je door goede en valide argumenten te onderbouwen. Jullie moeten zelf uitvinden, hoe. Je krijgt pas punten als je dat op een overtuigende manier lukt. Voor berekeningen mag je uiteraard je grafische rekenmachine inzetten. Om een aantal van deze beweringen te kunnen formuleren voeren wij nog snel een notatie in.

Soms wil je het bij een natuurlijk getal over de cijfers hebben die erin voorkomen. Bijvoorbeeld 4711 heeft de cijfers $c_3 = 4$, $c_2 = 7$, $c_1 = 1$, $c_0 = 1$. Het probleem echter is dat de weergave in letters dubbelzinnig kan zijn. Als je bijvoorbeeld schrijft: $c_3c_2c_1c_0$ met cijfers c_i tussen 0 en 9 zou dat kunnen staan voor $c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + c_3 \cdot 10^3$ maar ook voor $c_3 \cdot c_2 \cdot c_1 \cdot c_0$. Om hier geen misverstanden te laten ontstaan, gebruiken wij de volgende notatie.

Notatie Als wij in het tientallige stelsel de cijfers van een natuurlijk getal n door letters aan willen geven, dan schrijven wij: $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ met de k cijfers $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ vanaf 0 tot en met 9 waarbij het eerste cijfer niet nul is, dwz. $c_k>0$, want anders zouden we het ook weg kunnen laten. Gegeven de cijfers $c_k, \ldots, c_0$, dan vind je het getal terug via: $n = c_0\, 10^0 + c_1\, 10^1 + \ldots + c_{k-1}\, 10^{k-1} + c_k\, 10^k$. Bijvoorbeeld $4711= 4|7|1|1= 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$.

Gelogen of niet?

Probeer er nu achter te komen of de volgende beweringen waar zijn of niet.

1. Als een oneven natuurlijk getal geen priemgetal is dan is het wel door 3, 5, 7, 11 of 13 deelbaar.
2. Het getal 10013 is het kleinste natuurlijke getal dat op twee verschillende manieren te ontbinden is in priemgetallen: $10013 = 589 \cdot 17$ en $10013 = 527 \cdot 19$.
3. Een natuurlijk getal $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ is deelbaar door 3 dan en slechts dan als $c_k+c_{k-1}+\ldots+c_4+c_3+c_2+c_1+c_0$ deelbaar is door 3.
4. Een natuurlijk getal $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ is deelbaar door 11 dan en slechts dan als $c_0-c_1+c_2-c_3+c_4-c_5 \ldots c_k$ deelbaar is door 11.
5. Een natuurlijk getal $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ is door 7, 11 of 13 deelbaar dan en slechts dan als $c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3 - c_2|c_1|c_0$ deelbaar is door 7, 11 of 13. (Bereken $7 \cdot 11 \cdot 13$.)
6. De *kwadratische rij* (dwz. de verschilrij is een rekenkundige rij) waarvan de eerste termen worden gegeven door 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83,… bestaat uitsluitend uit priemgetallen.
7. Er bestaan slechts eindig veel priemgetallen. Het grootste priemgetal $2^{20996011}-1$ is een voorbeeld van een *Mersenne-priemgetal* en werd op 2 december 2003 gevonden.
8. Voor alle natuurlijke getallen n>0 geldt: $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0} = 2^{n-1}$.
9. Voor elk natuurlijk getal n geldt: $(1+2+3+4+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3$.
10. Elk van de getallen in de rij 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 3333331, 333333331, 3333333331… is een priemgetal.
11. Het repeterende decimale getal 0,9999999… is gelijk aan 1.
12. De som van de eerste *k* oneven natuurlijke getallen is het kwadraat van een natuurlijk getal.
13. $\sqrt{10}$ is te schrijven als breuk, of anders gezegd, er bestaan geen twee gehele getallen *m* en *n* zodat geldt $m^2 = 10n^2$.

Deel B 1

Lees de tekst van ‘De derde nacht’ door en beantwoord de volgende vragen.

1. Vergelijk de definitie van een priemgetal uit het boek met onze definitie boven. Leg uit.
2. In deze nacht worden drie wiskundige vermoedens verteld.
   Formuleer deze vermoedens zo nauwkeurig mogelijk.
3. Probeer na te gaan (bijvoorbeeld door wiskundigen te raadplegen of informatie te zoeken op internet) of deze vermoedens ondertussen bewezen stellingen zijn, of dat het nog onbewezen vermoedens zijn. Misschien zijn er wel tegenvoorbeelden gevonden, zodat bewezen is dat ze niet waar zijn.

Deel B 2

Lees de tekst van ‘De vijfde nacht’ en beantwoord de volgende vragen.

4. In deze droom worden twee wiskundige formules aannemelijk gemaakt.
   Schrijf deze formules op.
5. Geef een wiskundig bewijs voor deze formules.

Deel C

In het boek *De telduivel* is elke droom van Robert gemotiveerd door een wiskundige achtergrond. Achter bijna elk detail en elke keuze die de auteur heeft gemaakt verschuilt zich een wiskundig aspect. Schrijf nu zelf *de dertiende nacht*. Kies hiervoor een wiskundig onderwerp en schrijf het verhaal over enkele wiskundige aspecten ervan. Laat je gerust door het onderwerp uitdagen. Je hoeft er niet meteen alles van te begrijpen en je mag ook zijsporen van je onderwerp bewandelen. Licht in een *apart stuk* al je keuzes en ideeën uit je verhaal wiskundig toe. Ga niets verzinnen dat volledig los staat van je wiskundig onderwerp. Zorg dat je verhaal in dienst staat van de wiskunde die je uit wil leggen. Probeer jouw onderwerp in het verhaal op een eenvoudige, maar ook eerlijke manier recht te doen.

In de keuze van het onderwerp ben je in principe vrij, maar je kunt ook uit de onderstaande onderwerpen kiezen. Je mag **één** onderwerp kiezen uit 1 t/m 19 óf **drie** onderwerpen uit 20 t/m 26 (die zijn wat kleiner van omvang).

1. Pythagoreïsche drietallen.
2. Waarom is er bij de decimale schrijfwijze van breuken sprake van (op den duur) repetentie?
3. Tovervierkanten.
4. Wat zouden ‘vijfhoeks getallen’, ‘zeshoeks getallen’ of ‘n-hoeks getallen’ kunnen zijn? Kun je formules voor zulke ‘vijfhoeks getallen’, ‘zeshoeks getallen’ of ‘n-hoeks getallen’ geven? Een oplossing zou kunnen zijn: ½n(n + 1), ½n(2n – 0), ½n((3n – 1), ½n(4n – 2), ½n(5n – 3) enz..
5. Op hoeveel nullen eindigt 1000!? (Antwoord 249) En op hoeveel nullen eindigt n! ?
6. Syracuserij: Als n even dan deel door 2, als n oneven dan 3n+1. Voorbeeld: begin je met 11 dan krijg je: 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 16 – 8 4 – 2 – 1. Eindigt dit altijd op 1?
7. Het Kaprekargetal. Voorbeeld 981 – 189 = 792; 972 – 279 = 693; 963 – 369 = 594; 954 – 459 = 495. Dit noemen we het Kaprekargetal bij getallen van 3 cijfers. Bestaat er ook een Kaprekargetal van 4 cijfers? En van 5 cijfers?
8. Wat is het grootste getal dat je niet kunt schrijven in de vorm 7n + 11m? Hierbij zijn m en n natuurlijke getallen. Meer in het algemeen: an + bm?
9. Repunits. R(1) = 1, R(2) = 11, R(3) = 111, dus R(n) = 11111…….111 (n enen). Zitten hier priemgetallen bij? Beschrijf de priemdelers van repunits. Kwadraten? Wanneer zijn R(n) en R(m) onderling ondeelbaar? Neem eens de kwadraten van R(4) en van R(10).

10. Leid regels af hoe je uit de cijfers van een getal in het drietallig stelsel de deelbaarheid door bepaalde delers kunt zien.
11. GGD en KGV. Wat is het verband tussen GGD(a,b) en KGV(a,b)? En wat tussen GGD(a,b,c) en KGV(a,b,c)?
12. Hoe kun je snel zien dat een getal zeker geen kwadraat is?
13. Zoek priemdelers van repunits.
14. Kun je elk getal schrijven als een breuk?
15. De uniciteit van de ontbinding in priemfactoren.
16. De verdeling van damstenen.
17. Perfecte getallen en Mersenne priemgetallen.
18. Staafjes op een ruitenrechthoek.
19. Stapelgetallen

Kleinere onderwerpen waarvan je er **drie** kan kiezen:

20. Het aantal delers van een getal. Bijvoorbeeld welk getal van 4 cijfers heeft de meeste delers? (Dit zijn er twee nl. 7560 en 9240. Beide hebben 64 delers.)
21. Hoe te zien dat een getal deelbaar is door 2, 3, 4, ……., 11, 12, 13?
22. Voorbeelden: 47 x 43 = 2021 (4 x 5 = 20 en 7 x 3 = 21) en 38 x 32 = 1216 (3 x 4 = 12 en 8 x 2 = 16). Hoe werkt dit?
23. Rekenspelletjes maken zoals:
    Iemand doet in stilte de volgende berekening:
    -neem rangnummer van je geboortemaand
    -vermenigvuldig dat getal met 2
    -tel hier 5 bij
    -vermenigvuldig het resultaat met 50
    -tel tenslotte je leeftijd erbij
    Laat het resultaat hardop noemen, trek er in gedachte 250 af en noem vervolgens zijn leeftijd
    Geef met haakjes verdrijven een algemeen bewijs van de werking van dit spelletje.
24. Ontdek een aantal manieren om snel een kwadraat te kunnen uitrekenen.
25. Leg de werking van de volgende *boerenvermenigvuldiging* uit:
    235 x 72 = 470 x 36 =940 x18 =1880 x 9 =3760 x 4= 7520 x 2= 15040 x 1
    dus 1880 + 15040 =16920 is de uitkomst.
26. Er is maar een natuurlijk getal waarvan de wortel gelijk is aan de som van de cijfers. Welk getal is dat? Zijn er nog andere zulke eigenschappen te bedenken waarmee enkele getallen uit kunnen blinken?

Daarnaast bevelen wij als mogelijke bronnen aan:
- Het wiskundetijdschrift *Pythagoras* voor jongeren. Zoek ook op: http://www.pythagoras.nu.
- *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* http://www.research.att.com/~njas/sequences
- De website http://www.ratio.ru.nl voor inspirerende computerapplets over getalbegrip.

AANVULLENDE TOELICHTING

ad 1. **Pythagoreïsche drietallen**

Drietallen, die aan de stelling van Pythagoras voldoen, noemen we pythagoreïsche drietallen.
Een voorbeeld: (3, 4, 5) is een pythagoreïsch drietal omdat $3^2 + 4^2 = 5^2$.
We zoeken naar "echte" pythagoreïsche drietallen. Daarmee bedoelen wij drietallen, die onderling priem zijn, dus geen gemeenschappelijke delers hebben. Weer een voorbeeld: (6, 8, 10) is ook een pythagoreïsch drietal, maar deze kunnen we gemakkelijk vinden uit ons eerste voorbeeld (3, 4, 5) door elk getal met 2 te vermenigvuldigen en zo is (6, 8, 10) eigenlijk "hetzelfde" pythagoreïsch drietal als (3, 4, 5).

Twee recepten om pythagoreïsche drietallen te krijgen zij de volgende:
(i) Neem een oneven getal bijvoorbeeld 3, kwadrateer dit getal en verdeel dit kwadraat "zo eerlijk mogelijk".
Dus $3^2 = 9$ en $9 = 4 + 5$. We vinden dus de getallen 4 en 5, en (3, 4, 5) is een pythagoreïsch drietal.
Nemen we 7, dan verdelen we het kwadraat van 7 (=49) in 24 en 25 en (7, 24, 25) is een pythagoreïsch drietal.
Nemen we 9, dan verdelen we het kwadraat van 9 (=81) in 40 en 41 en (9, 40, 41) is een pythagoreïsch drietal.
(ii) Of neem een oneven kwadraat $(2k+1)^2$ dan is de som van alle oneven getallen die kleiner zijn dan $(2k+1)^2$ weer een kwadraat. Als je deze twee kwadraten optelt krijg je een derde kwadraat en zodoende een pythagoreïsch drietal. Kun je dit bewijzen?

Zo vinden we alle "echte" pythagoreïsche drietallen, of niet soms?

ad 7. **Het Kaprekarproces**

We nemen een getal van 3 verschillende cijfers, bv. 819. We maken hiervan twee nieuwe getallen, waarbij bij de een de cijfers in stijgende (189) en bij de andere de cijfers in dalende (981) volgorde staan. Deze getallen trekken we van elkaar af, de kleinste van de grootste (981 – 189 = 792). Dit proces herhalen we. In ons voorbeeld:
972 – 279 = 693; 963 – 369 = 594; 954 – 459 = 495. Hier eindigt het proces en het getal 495 wordt het Kaprekargetal van 3 cijfers genoemd. Probeer maar eens een ander getal van 3 cijfers.
De vraag nu is: hoe zit dit?
Trouwens: is er ook een Kaprekargetal van 4 of van 5 cijfers?

ad 8. **Muntstelsel**

We willen een nieuw muntstelsel invoeren met een minimum aantal verschillende muntstukken. We denken hierbij aan twee muntstukken, met ieder een waarde van minstens 5.
Als voorbeeld nemen we muntstukken met een waarde van 5 en een waarde van 8.
Hiermee gaan we betalen. Bijvoorbeeld een bedrag van 47 betalen we met 3 munten van 5 en 4 munten van 8.
Maar nu is niet elk bedrag met deze twee muntsoorten te betalen, zeker kleine bedragen niet, neem maar eens bijvoorbeeld 19.
De vraag is: welke bedragen zijn wel uit te drukken in munten van 5 en 8 en welke niet?
Is er een grootste bedrag dat niet te betalen is met deze twee muntsoorten?
Hoe zit het met de twee muntsoorten a en b, waarbij a en b allebei minstens 5 zijn en a en b onderling priem?

ad 9. **Repunits**

Repunits zijn getallen, die uit louter enen bestaan. De rij repunits R(n) ziet er als volgt uit:

R(1) = 1
R(2) = 11
R(3) = 111
R(4) = 1111

R(n) = 1111….1 in het totaal n enen.

Je kunt je dan van alles afvragen, bijvoorbeeld: zitten er in de rij repunits ook priemgetallen? Hoe zien die eruit?
Bekijk eens de kwadraten van bijvoorbeeld R(4) of R(10). Wanneer zijn R(n) en R(m) onderling ondeelbaar?

ad 15. **Bewijs van de stelling over unieke factorontbinding**

Aan de hand van de volgende opgave kun je zelf het bewijs vinden. Hierbij maak je veelvuldig gebruik van *delen met rest*. Daarmee bedoelen wij bijvoorbeeld: 100 is 7 maal 13 met rest 9. Door herhaaldelijke deling met rest (het zogenaamde *algoritme van Euclides*) kun je de grootste gemeenschappelijke deler (GGD) van twee gegeven getallen bepalen. Kijk op de Ratiosite (2. Passen, §2.3) http://www.ratio.ru.nl/lesmateriaal/passen/index.html voor meer uitleg, applets en illustraties hierover.

Opgave: In deze opgave ga je bewijzen dat elk natuurlijk getal op een *unieke* manier in priemgetallen uiteenvalt. Onderbouw de volgende drie uitspraken zo goed mogelijk met argumenten. Probeer eerst met getallen.

(i) Gegeven twee natuurlijke getallen s en t. De GGD van s en t noemen we d. Dan is d een deler van s en t die tegelijkertijd kan worden geschreven als $d=m\cdot s+n\cdot t$ met gehele getallen m en n. (Hint: Stel $s>t$. Als je s deelt door t met rest r, dan is ook de rest r deelbaar door d maar kleiner dan zowel s als ook t. Als je vervolgens t deelt door r krijg je een nog kleinere rest die nog steeds een veelvoud is van d. Als je zo doorgaat eindig je automatisch een keer op rest d. Als je nu in je berekening terugloopt vind je gehele getallen m en n zodat $d=m\cdot s+n\cdot t$.)

(ii) Laat zien dat een priemgetal p dat een product $a\cdot b$ deelt, al één van de twee getallen, a of b, deelt. Gebruik hiervoor (i) met $s=p$ en $t=a$. De GGD van p en a is 1 of p.

(iii) Laat zien dat elk natuurlijk getal op een unieke wijze te ontbinden is in priemgetallen. Beschrijf hoe deze uniciteit is te verstaan.

ad 16. **Verdelen van damstenen**

Je neemt 10 damstenen en verdeelt deze in een willekeurig aantal stapeltjes; als voorbeeld nemen we 5 en 5. We nemen nu van elk stapeltje één steen af en vormen met deze stenen een nieuwe stapel. Dit procédé herhalen wij. In ons voorbeeld krijgen we:

Begin:	5	5			
Eerste stap:	4	4	2		
Tweede stap:	3	3	1	3	
Derde stap:	2	2		2	4

Zo gaan we door. Er blijkt op den duur een stabiele situatie te ontstaan.

Nu een aantal vragen.

a. Stel we beginnen met een andere verdeling van deze 10 stenen – b.v. drie stapels van 1 steen, 2 stenen en 7 stenen- komen we dan ook op deze stabiele situatie uit? En geldt dit voor elke verdeling?
b. Stel we beginnen met een ander aantal damstenen, b.v. 12. Krijgen we dan op den duur ook een stabiele situatie? Hangt dit ook af van de beginverdeling?
c. Bij welke aantallen stenen krijgen we een stabiele situatie?
d. Bewijs dat je bij de onder c gevonden aantallen een stabiele situatie krijgt.
e. Kan het zijn dat je bij elk ander aantal geen stabiele situatie krijgt, maar in een “loop” terecht komt? Leg uit.

ad 17. **Perfecte getallen en Mersenne priemgetallen**

Een *perfect getal* is een getal dat gelijk is aan de som van al zijn delers. Bijvoorbeeld 6=1+2+3 of 28=1+2+4+7+14 zijn beroemde perfecte getallen. Niemand weet tot heden of er ook oneven perfecte getallen zijn. Ook weet niemand hoeveel even perfecte getallen bestaan. *Mersenne priemgetallen* zijn priemgetallen van de vorm $2^{n+1}-1$ voor een natuurlijk getal n. Het zoeken naar nieuwe Mersenne priemgetallen is nog steeds in volle gang. Het lijkt bijna een wonder, ook al weten we van beide soorten getallen zeer weinig, kun je laten zien dat er net zoveel even Mersenne priemgetallen als perfecte getallen zijn. Dit doe je als volgt:

a. Bewijs dat geldt: als $p=2^{n+1}-1$ een Mersenne priemgetal is, dan is $A=2^n p$ een perfect getal.
b. Als omgekeerd $A=2^n q$ een perfect getal is, dan moet $q=2^{n+1}-1$ zijn en q is een priemgetal.

Schets: Omdat wij veronderstellen dat A een perfect getal is geldt (de som is over alle delers van q):

(*) $$A = q + 2q + 2^2 q + \cdots + 2^{n-1} q + \sum_{d/q} (d + 2d + 2^2 d + \cdots + 2^n d).$$

Hieruit kun je afleiden dat geldt: $q = \left(2^{n+1} - 1\right)q'$ waarbij $q' = \sum_{d/q} d$. Als je nu, net als in (*), de som van de delers van $A = 2^n q = 2^n \left(2^{n+1} - 1\right) q'$ opschrijft – zo expliciet als dat vanuit deze ontbinding mogelijk is – dan vind je $A = 2^n \left(2^{n+1} - 1\right) q' = \left(2^{n+1} - 1\right)q' + \left(2^n - 1\right)\left(2^{n+1} - 1\right)q' + \left(2^{n+1} - 1\right) \sum_{\substack{d/q \\ d \neq \left(2^{n+1}-1\right),\, q'}} d$. Hieruit volgt dat $2^{n+1} - 1$ en *q'* de enige delers zijn van *q*, waaronder zich dus ook 1 moet bevinden.

ad 18. **Staafjes op een ruitenrechthoek**

Stelling: Gegeven een rechthoek met afmetingen $m \times n$ waarbij *m* en *n* natuurlijke getallen zijn. Stel nou dat deze rechthoek kan worden overdekt met staafjes van de lengte $1 \times k$ voor een natuurlijk getal *k*. Dan deelt *k* een van de getallen *m* of *n*.

a. Probeer een rechthoek van 9 keer 10 te overdekken met staafjes van 1 keer 6.
b. Kun je een bewijs van de stelling geven? Behulpzaam zou hierbij kunnen zijn dat je aan de vakjes in een rechthoek de getallen 1 tot en met *k* toekent. Let erop welke getallen door de staafjes worden afgedekt. Kun je de getallen zo toekennen dat er onder elk van de staafjes steeds alle getallen 1 tot en met *k* komen te liggen?

ad 19. **Stapelgetallen**

Een getal dat geschreven kan worden als de som van twee of meer positieve, gehele, elkaar opvolgende getallen, noemen we *stapelbaar*. Voorbeelden: 140 = 14 + 15 + … + 21, dus 140 is stapelbaar; 141 = 70 + 71, dus 141 is stapelbaar.
In bovenstaande voorbeelden noemen we 14 en 70 het begin van een *stapel*. Een stapel die begint met 1 noemen we een *basisstapel*. Voorbeeld: 10 = 1 + 2 + 3 + 4. We zeggen in zo'n geval dat 10 een basisstapel heeft.
Een stapel die uit een even aantal getallen bestaat noemen we een *even stapel*.
Vragen:

1. Zijn alle oneven getallen stapelbaar?
2. Welke even getallen zijn niet stapelbaar?
3. Laat zien dat voor de som S van een stapel die begint bij a, en bestaat uit n getallen geldt: S = ½ n(n+2a-1).
4. Geef een beschrijving van de getallen die een basisstapel hebben.

Een positief geheel getal is altijd te schrijven op één manier als product van priemgetallen, bijvoorbeeld $5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$

5. Hoeveel delers heeft het getal 5400?
6. Welke getallen hebben slechts één stapel?
7. Hoe kun je aan een getal zien dat het een even stapel heeft?
8. Hoeveel stapels heeft het getal 2004?
9. Kun je een getal vinden met precies 2004 stapels?

Zie ook: Dave Odegard, *Stapel*, Pythagoras, November 2004

ad 20. **Vermenigvuldigen**

Rekenen en dus ook vermenigvuldigen is tegenwoordig blijkbaar lastig.
Als we bijvoorbeeld moeten uitrekenen 67 x 63 dan gaat dat als volgt:

```
   67
   63x
  ----
  201
 4020
 ----
 4221
```

Dus 67 x 63 = 4221. Maar dit kan veel eenvoudiger. Kijk maar: Van de beide zessen hogen we er een op en vermenigvuldigen we ze met elkaar: 6 x 7 = 42. De 3 en de 7 vermenigvuldigen we met elkaar: 3 x 7 = 21. Deze twee getallen zetten we achter elkaar en we krijgen het juiste antwoord: 4221.
Nog een voorbeeld: 48 x 42. We nemen 4 x 5 = 20 en 8 x 2 = 16 dus 48 x 42 = 2016.
Waarom hebben ze ons dit nooit eerder verteld? Zijn er meer van deze "trucjes"?

Beoordeling praktische opdracht # De telduivel

Groepsleden: 1. ....
2. ....
3. ....

Onderdeel	**Max**	**Score**	**Opmerkingen**
A1	3		
A2	3		
A3	3		
A4	3		
A5	3		
A6	3		
A7	3		
A8	3		
A9	3		
A10	3		
A11	3		
A12	3		
A13	3		
Uitwerking	5		*Één of meerdere A-onderdelen zijn op een verrassende en wiskundig correcte wijze aangepakt en opgelost*
B1	2		*Definitie priemgetal*
B2	5		*Formulering 3 vermoedens derde nacht*
B3	5		*Informatie 3 vermoedens derde nacht*
B4	4		*2 formules vijfde nacht*
B5	5		*Bewijs 2 formules vijfde nacht*
C Vrije deel	25		*Creatief, authentiek, volledig, wiskundig correct*
Cosmetica	5		*Uiterlijk, lay-out, overzichtelijk*
Tijd	5		*Tijdig ingeleverd (planning)*
Totaal			**Cijfer = Totaal / 10 =**

Kopieerbijlage 2

DE TELDUIVEL ANTWOORDEN DEEL A

1. Als een oneven natuurlijk getal geen priemgetal is dan is het wel door 3, 5, 7, 11 of 13 deelbaar.
   NIET WAAR! Neem bijvoorbeeld $17 \cdot 19=323$. Dit is een oneven getal, geen priemgetal en niet deelbaar door 3, 5, 7, 11 en 13.

2. Het getal 10013 is het kleinste natuurlijke getal dat op twee verschillende manieren te ontbinden is in priemgetallen: $10013 = 589 \cdot 17$ en $10013 = 527 \cdot 19$.
   NIET WAAR! Er geldt: $10013=17\cdot19\cdot31$. Dus $589=19\cdot31$ en $527=17\cdot31$ zijn geen priemgetallen. De bewering kon ook niet waar zijn vanwege de *Hoofdstelling van de rekenkunde*: Elk natuurlijk getal is op unieke wijze te ontbinden in priemfactoren.

3. Een natuurlijk getal $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ is deelbaar door 3 dan en slechts dan als $c_k+c_{k-1}+\ldots+c_4+c_3+c_2+c_1+c_0$ deelbaar is door 3.
   WAAR! Schrijf daarvoor $n=c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ uit als $c_0.10^0 + c_1.10^1 +\ldots+ c_{k-1}.10^{k-1} + c_k.10^k$.
   Dat is $c_0+c_1.(9+1)+c_2.(99+1)+c_3.(999+1)+\ldots+c_k.(999...9+1)$ ofwel
   $c_0+9c_1+c_1+99c_2+c_2+999c_3+c_3+\ldots+999...9c_k+c_k$. Nu zijn $9c_1,99c_2,999c_3,...,999...9c_k$ allemaal 3-vouden. Dus als we willen weten of n deelbaar is door 3, dan kunnen we die weglaten (we kijken modulo 3).
   Het is dus nodig en voldoende om te kijken of $c_0 + c_1 +c_2+c_3+\ldots+ c_k$ deelbaar is door 3.

4. Een natuurlijk getal $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ is deelbaar door 11 dan en slechts dan als $c_0–c_1+c_2–c_3+c4–c_5 \ldots c_k$ deelbaar is door 11.
   WAAR! Schrijf daarvoor $n=c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ uit als $c_0.10^0 + c_1.10^1 +\ldots+ c_{k-1}.10^{k-1} + c_k.10^k$.
   Dat is $c_0+c_1.(11-1)+c_2.(99+1)+c_3.(1001-1)+c_4.(9999+1)+c_5.(100001-1)+...$
   ofwel $c_0+11c_1–c_1+99c_2+c_2+1001c_3–c_3+9999c_4+c_4+100001c_5 –c_5+....$
   Nu zijn $11c_1$, $99c_2$, $999c_3$, $1001c_3$, $9999c_4$, $100001c_5$,... allemaal 11-vouden. Dus als we willen weten of n deelbaar is door 11, dan kunnen we die weglaten (we kijken modulo 11). Het is dus nodig en voldoende om te kijken of $c_0 – c_1 +c_2–c_3+\ldots c_k$ deelbaar is door 11.

5. Een natuurlijk getal $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ is door 7, 11 of 13 deelbaar dan en slechts dan als $c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3 – c_2|c_1|c_0$ deelbaar is door 7, 11 of 13.
   WAAR! We berekenen eerst 7.11.13=1001. Dit getal is bijzonder, omdat het 1 verschilt van 1000. Schrijf n $= c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ als $c_k.10^k +c_{k-1}.10^{k-1} +...+ c_3.10^3 +c_2.10^2 +c_1.10^1+c_0.10^0$.
   Dan zien we $n=(c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3).1000 + (c_2|c_1|c_0)$.
   Dat is $(c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3).(1001-1) + (c_2|c_1|c_0) = (c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3).1001-(c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3).1 + (c_2|c_1|c_0)$.
   Als we hier alle alle 1001-vouden afhalen (in het bijzonder zijn dit dus 7-, 11-, en 13-vouden), dan houden we $-(c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3) + (c_2|c_1|c_0)$ over.
   Nu blijkt dus dat n deelbaar is door 7, 11 of 13 precies dan als $-(c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3) + (c_2|c_1|c_0)$ dat is.
   Maar dan kunnen we net zo goed kijken naar $(c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3)-(c_2|c_1|c_0)$.

6. De *kwadratische rij* (dwz. de verschilrij is een rekenkundige rij) waarvan de eerste termen worden gegeven door 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, … bestaat uitsluitend uit priemgetallen.
   NIET WAAR! Deze rij hoort bij de formule $y=x^2-x+41$. Het idee dat het om een kwadratisch verband gaat, kun je krijgen vanwege de constante toename in de verschilrij. Je kan de formule vinden door bijvoorbeeld de eerst 3 termen van de rij in te vullen in de algemene vorm $y=ax^2 +bx+c$. Dus $y(1)=41$, $y(2)=43$ en $y(3)=47$. Dat geeft het stelsel vergelijkingen $a+b+c=43$, $4a+2b+c=43$ en $9a+3b+c=47$. Oplossen van dit stelsel geeft de genoemde formule. Deze formule levert opvallend genoeg tot en met x=40 priemgetallen, maar voor x=41 is de uitkomst duidelijk deelbaar door 41.

7. Er bestaan slechts eindig veel priemgetallen. Het grootste priemgetal is het zogenaamde *Mersenne-priemgetal* $2^{20996011}–1$ en werd op 2 december 2003 gevonden.
   NIET WAAR! Het genoemde getal is een priemgetal, maar gevonden op 17 november 2003. Bovendien heeft Euclides bewezen dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

8. Voor alle natuurlijke getallen n>0 geldt: $\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+\binom{n}{0} = 2^{n-1}$.
   NIET WAAR! Voer in de GR in Y_1=X nCr 4 + X nCr 2 + X nCr 0 en Y_2=2^(X-1). Kijk in Table en zie dat het voor X=6 bijvoorbeeld al niet klopt: $Y_1=31$ en $Y_2=32$. Dat is dus een tegenvoorbeeld.

9. Voor elk natuurlijk getal n geldt: $(1+2+3+4+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3$.
WAAR! Definieer de rijen $a_n = (1+2+\ldots+n)^2$ en $b_n = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. Duidelijk is dat
$a_1 = (1)^2 = (1)^3 = b_1$. We gaan nu laten zien dat voor elke *n* de toename $a_{n+1} - a_n$ gelijk is aan de toename
$b_{n+1} - b_n$. Dan zijn beide rijen dus gelijk. Er geldt:

$$a_{n+1} = (1+2+\ldots+n+1)^2 = ((1+2+\ldots+n)+(n+1))^2 = (1+2+\ldots+n)^2 + 2.(1+2+\ldots+n).(n+1)+(n+1)^2$$
$$= a_n + 2.\tfrac{1}{2}.n.(n+1).(n+1)+(n+1)^2 = a_n + n.(n+1)^2 + (n+1)^2 = a_n + (n+1).(n+1)^2 = a_n + (n+1)^3$$

Daarnaast geldt:

$$b_{n+1} = 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 = b_n + (n+1)^3$$

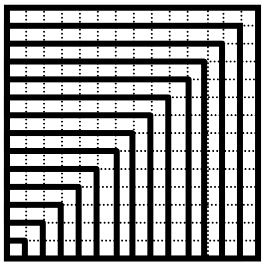
Klaar.

10. Elk van de getallen in de rij 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 3333331, 333333331, 3333333331…
is een priemgetal.
NIET WAAR! Het getal met de acht 3-en is deelbaar door 17, namelijk 333333331/17=19607843.

11. Het repeterende decimale getal 0,9999999… is gelijk aan 1.
WAAR! Er zijn meerdere bewijzen voor te geven. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{rl} 10 \times 0{,}9999999\ldots &= 9{,}999999\ldots \\ -\ 1 \times 0{,}9999999\ldots &= 0{,}999999\ldots \\ \hline 9 \times 0{,}9999999\ldots &= 9 \end{array}$$

en dus 0,9999999… = 1.
En er moet ook duidelijk worden gemaakt wat 0,9999999… betekent.



12. De som van de eerste *k* oneven natuurlijke getallen is het kwadraat van een natuurlijk getal.
WAAR! Kijk maar naar het plaatje rechts.
Als wij de verschilrij van de rij van kwadraten $a_k = k^2$ met k = 0, 1, 2, …
uitrekenen vinden wij de rij van oneven getallen:

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^2 - k^2 = (2k+1)(1) = 2k+1.$$

13. Er bestaan twee gehele getallen m en n zodat $m^2=10\cdot n^2$.
NIET WAAR! We introduceren een functie N die aan een natuurlijk getal n de lengte N(n) toekent van de aaneen gesloten reeks nullen die dit getal mogelijk op het einde van zijn decimale voorstelling heeft. In het kort:

$$N(n) = \text{"\# nullen op het einde van } n\text{"}.$$

Bijvoorbeeld: N(1000)=3, N(222000)=3 en N(1000300)=2.
Het is eenvoudig na te gaan dat geldt: N(10 n) = N(n)+1 en $N(n^2) = 2\,N(n)$.
Als $m^2=10\cdot n^2$ zou zijn dan zou N toegepast aan beide kanten hetzelfde resultaat op moeten leveren. Maar we vinden links 2 N(m) en rechts 2 N(n)+1, waarvan het eerste getal even en het tweede oneven is.

Als er gehele m en n zouden bestaan zodat $\frac{m}{n} = \sqrt{10}$, dan levert kwadrateren aan beide kanten $\frac{m^2}{n^2} = 10$.

Appendix I

De telduivel – Antwoorden bij deel B en C

Deel B1 Vraag 1

Definitie in de opgave:
Een natuurlijk getal groter dan 1 dat niet het product is van twee kleinere natuurlijke getallen noemen we een priemgetal.

Definitie in het boek:
Een priemgetal is een getal dat niet in gelijke delen te verdelen is zonder dat er een rest overblijft.

Deze twee definities komen overeen, want:

> Als een getal niet het product is van twee kleinere natuurlijke getallen, dan is het niet te verdelen in gelijke delen.

En:

> Als een getal niet in gelijke delen te verdelen is, dan is het ook niet het product van twee kleinere natuurlijke getallen.

Deel B1 Vraag 2

Eerste vermoeden:
voor elk natuurlijk getal $n > 1$ is er minstens één priemgetal p met $n < p < 2n$.
Tweede vermoeden:
voor elk even natuurlijk getal $n > 2$ zijn er priemgetallen p en q met $n = p + q$.
Derde vermoeden:
voor elk oneven natuurlijk getal $n > 5$ zijn er priemgetallen p, q en r met $n = p + q + r$.

Deel B1 Vraag 3

Eerste vermoeden:
Is ondertussen een bewezen stelling!
Staat bekend als het *principe van Bertrand*. In 1845 geopperd door Bertrand en in 1851 bewezen door Chebyshev.

Tweede vermoeden:
Onopgelost probleem!
Staat bekend als het *Vermoeden van Goldbach* en is een van de oudste onopgeloste problemen in de wiskunde. Dit vermoeden dat elk even getal groter dan 2 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen (een priemgetal mag hierbij twee keer gebruikt worden) werd geuit in een brief die Christian Goldbach in 1742 aan Leonhard Euler schreef. Dit vermoeden is door veel theoretici onderzocht en door computers gecontroleerd voor even getallen tot 4×10^{14}. Veel wiskundigen geloven dat het vermoeden waar is, gebaseerd op statistische overwegingen van de waarschijnlijkheidsverdeling van de priemgetallen: hele grote even getallen kunnen meestal op zeer vele manieren als de som van 2 priemgetallen worden geschreven.

Derde vermoeden:
Onbewezen!
In 1937 is door de Rus I.M. Vinogradov bewezen dat als een oneven getal 'voldoende groot' is, het de som is van 3 priemgetallen. Men weet echter nog niet hoe groot. Het voorwerk voor dit bewijs was rond 1922 gedaan door twee befaamde getaltheoretici, Hardy en Littlewood. Zij gingen echter uit van een veronderstelling die ze niet konden bewijzen, de zogenaamde hypothese van Riemann. De genoemde Rus had voor zijn bewijs over de priemgetallen deze Riemannhypothese niet nodig. Indien het zogenaamde 'vermoeden van Goldbach' waar is, dán is elk priemgetal groter dan 7 de som van 3 oneven priemgetallen.

Deel B2 Vraag 4

Eerste formule: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

Tweede formule: $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

Deel B2 Vraag 5

Bewijs eerste formule:
Noem $S = 1+2+3+\ldots+n$. Dan:

$$
\begin{aligned}
&2.S = (1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n) \\
&= (1+2+3+\ldots+n)+(n+n-1+\ldots+2+1) \\
&= (1+n)+(2+n-1)+\ldots+(n-1+2)+(n+1) \\
&= n.(n+1) \\
&Dus: S = \tfrac{1}{2}.n.(n+1)
\end{aligned}
$$

Bewijs tweede formule:
Noem $S = 1+3+5+\ldots+2n-1$. Dan:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}.S = \tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{2}+\ldots+n-\tfrac{1}{2} \\
&= (1-\tfrac{1}{2})+(2-\tfrac{1}{2})+(3-\tfrac{1}{2})+\ldots+(n-\tfrac{1}{2}) \\
&= (1+2+3+\ldots+n)-n.\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}.n.(n+1)-\tfrac{1}{2}.n \\
&Dus: S = n.(n+1)-n = n^2
\end{aligned}
$$

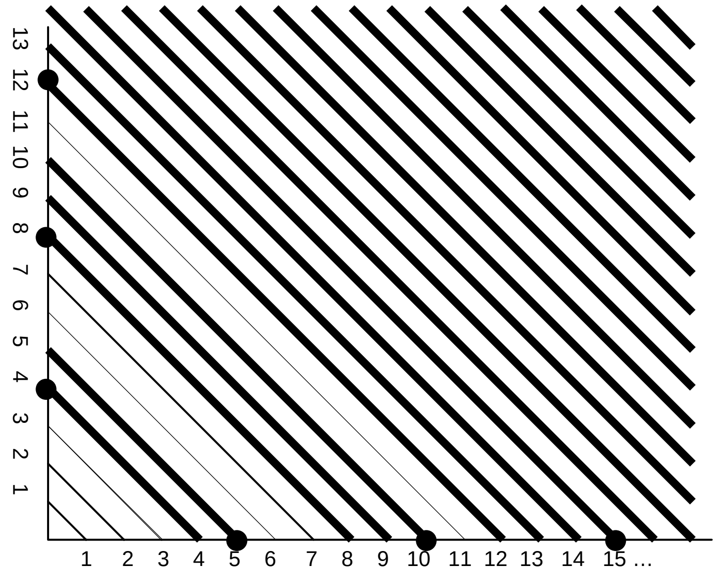
Deel C ad 16
Een aantal oplossingen:
a. Ja. **b.** Nee. Nee. **c.** Dit lukt alleen voor de driehoeksgetallen (3, 6, 10, 15, 21,…..).
d. Stel, er is een stabiele situatie met N stenen en n stapels. Dan moet er één stapel zijn waarop 1 steen ligt (we gaan er van uit dat N>0 en n>0). Na een ronde komt er namelijk een nieuwe stapel, dus moet er ook 1 verdwijnen. In de nieuwe situatie moet er echter ook weer precies 1 stapel zijn met 1 steen, om dezelfde reden. Deze stapel had dus in de oorspronkelijke situatie 2 stenen (of als N = n = 1, dan is het duidelijk). Omdat er na 1 ronde zeker een stapel met n stenen is (de nieuwe stapel waar van elke stapel een steen komt), moet er in de oorspronkelijke toestand ook al een stapel met n stenen zijn geweest. Met het doorzetten van deze argumenten (er moet ook een stapel met n-1 stenen zijn geweest, want na 2 stappen is de stapel die na 1 ronde ontstond op n-1 stenen aangekomen en omdat het een stabiele situatie is, moest er oorspronkelijk al zo’n stapel zijn) zie je dat er een stapel van 1, een stapel van 2, ….., een stapel van n-1 en een stapel van n stenen moet zijn. Het totaal aantal stenen is dus 1+2+…+n. **e.** Wij hebben hier nog geen bewijs gevonden.

Appendix II

Optelsom van *m* en *n*

Definitie Gegeven twee natuurlijke getallen *m* en *n*. Wij zeggen dat een derde natuurlijke getal *k* kan worden geschreven *als optelsom van m en n* als er niet-negatieve gehele getallen α, β bestaan met $k = \alpha m + \beta n$.

Stelling Gegeven twee natuurlijke getallen *m* en *n* met ggd(*m,n*)=1. Dan is het grootste getal dat je niet kunt schrijven als optelsom van *m* en *n* gelijk aan: *mn-m-n*.



Opmerking: Voor het vinden van een bewijs dat elk getal vanaf *mn-m-n+1* kan worden geschreven als optelsom van *m* en *n* zou het volgende behulpzaam kunnen zijn. Zet elke combinatie *r m + s n* als punt neer in een rooster bij de coördinaten *(r m, s n)* en kijk vervolgens naar de lijnen "*x+y*=constant natuurlijk getal". De vraag is nu vanaf waar ligt er één van de roosterpunten op elke van deze lijnen?

Bewijs: Wij kijken naar de gaten tussen *(k-1) m* en *k m* voor zekere *k*. Als wij een van deze gaten hebben gevuld met optelsommen van m en n, dan zijn ook alle volgende gaten gevuld. Als wij deze gaten helemaal willen vullen dan moeten we dit zeker ook modulo *m* kunnen doen. Wij kijken naar de rij *0, n, 2n, 3n, ...*.

Modulo *m* worden de gaten precies gevuld met *0, n, 2n, 3n, ..., (m-1)n*, want modulo *m* zijn deze *m* getallen allemaal verschillend: uit $in \equiv jn$ mod *m* voor $0 \le i, j \le m-1$ volgt $(i-j)n = tm$ voor een gehele *t*. Elke deler van *m* zit dus in *(i-j)* en hieruit volgt dat *i* en *j* verschillen met een veelvoud van *m* waaruit weer volgt: *i=j*.

In het bijzonder kijken wij nu naar alle *s m+(m-1) n* met $s \ge 0$ en de kleinste optelsom van *m* en *n* hieronder is: *0 m + (m-1) n*. Het getal *(m-1) n – m* kunnen we niet meer schrijven als optelsom van *m* en *n*. Als namelijk $(m-1)n - m = \alpha m + \beta n$ dan is $(\alpha+1)m + \beta n$ en daarmee $(\alpha+1)m$ als ook $(\alpha+1)$ een positief veelvoud van *n*. Schrijf $\alpha = in - 1$ en wij vinden $\alpha = -1$.

We beweren dat alle getallen vanaf *(m-1)n-m+1* tot en met *(m-1) n* als niet-negatieve lineaire combinatie van *m* en *n* kunnen worden geschreven. Bij *(m-1)n* is dit duidelijk. Alle andere getallen *0, n, 2n, 3n, ..., (m-2)n* zijn kleiner en je kunt een veelvoud van *m* erbij optellen zodat zij tussen *(m-1)n-m+1* en *(m-1)n*, een interval met lengte *m*, komen te liggen.

Vanaf *(m-1)n-m+1* kan elk getal worden geschreven als optelsom van *m* en *n*. Bij *(m-1)n-m* lukt dit zeker niet zoals we boven hebben laten zien. Q.E.D.

Appendix III

Beschouwingen over de rij 3333…333331

De rij 31, 331, 3331, 33331, 333331, … bestaat uitsluitend uit priemgetallen. Een wiskundige geconfronteerd met deze bewering heeft onmiddellijk het idee dat deze rij niet uitsluitend uit priemgetallen kán bestaan. Anders zou zijn hele wereldbeeld in elkaar storten. Maar laat dat eens zien. Want door 2, 3 en 5 is zeker geen van deze getallen deelbaar. Zelfs door 7, 11 of 13 is geen van deze getallen deelbaar zoals je kunt zien als je gebruikt dat 7·11·13 = 1001. Maar hoe dan verder? Natuurlijk, een gewelddadige aanpak met een rekenmachine levert uiteindelijk een uitkomst maar daar is een echte wiskundige toch wel terecht een beetje vies voor. Wat is nu een uitkomst in vergelijking met een mooi probleem?

Laat eens kijken, wat kunnen we er wiskundig van maken? In eerste instantie merk je op dat geldt: $\underbrace{33333...331}_{n}=\frac{10^{n+1}-1}{3}-2$. De vraag is dus nu of er een priemgetal p bestaat waarvoor geldt: $\frac{10^{n+1}-1}{3}-2\equiv 0 \bmod p$. Maar dit is gelijkwaardig aan de bewering: $10^{n+1}\equiv 7 \bmod p$. Je ziet direct dat dit voor p = 2, 3, 5, 7 niet kan en ook voor p = 11 is het duidelijk omdat $10\equiv -1 \bmod p$. Bij p = 13 moet je echt gaan rekenen en je vindt dat de machten van tien op veelvouden van 13 na gelijk zijn aan 10, 9, 12, 3, 4, 1 en dus niet 7. Pas bij p = 17 is de eerste deler gevonden. Een berekening levert: de machten van tien modulo 17 zijn: 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1 en inderdaad, er is een 7. Dus 333.333.331 is deelbaar door 17.

Veel slimmer[1] is het probleem terug te brengen tot de zogenaamde *kleine stelling van Fermat*: Voor een priemgetal p en een willekeurig natuurlijk getal a geldt: $a^{p-1}\equiv 1 \bmod p$.
De centrale opmerking is: $\underbrace{33333...3331}_{n+1}=10^{n-1}\cdot 31+\underbrace{1111...111}_{n-1}\cdot 21$.

Het is dus voldoende om te weten of $\underbrace{1111...1111}_{n-1}=\frac{10^{n}-1}{9}$ deelbaar is door 31, dwz. de vraag luidt: Is er een n waarvoor $\frac{10^{n}-1}{9}\equiv 0 \bmod 31$ oftewel $10^{n}-1\equiv 0 \bmod 31$?
Ja, zo een n is er. Dat zegt de kleine stelling van Fermat. Voor $n = 30$ beschikken wij nu over het inzicht dat: 3.333.333.333.333.333.333.333.333.333.331 deelbaar is door 31.

Trouwens, de kleinste n met $10^{n}-1\equiv 0 \bmod 31$ is de lengte van de periode van $1/31 = 0,\overline{032258064516129}$, dus $n = 15$, want $10^{15}\cdot(1/31) - 1\cdot(1/31) = 32258064516129$.
Zelfs het bewijs van de kleine stelling van Fermat in dit verband kun je zo geven.
Hieruit leren we dus dat zelfs al 3.333.333.333.333.331 deelbaar is door 31 en dat je nooit met bruut geweld een wiskundig probleem moet bekijken.

---

[1] Dit idee is afkomstig van mevrouw Margriet Knops, Canisius College, Nijmegen.