Huiswerk bij "Diophantische vergelijkingen vanuit de verte bekeken" (NWD-2004)

1. Over Diophantus weten we bijna alleen het volgende, een epitaaf uit de Griekse Anthologie van Metrodorus: *Zijn jeugd maakte een zesde van zijn leven uit; na een verder twaalfde kreeg hij een baard; na een verder zevende trouwde hij, en zijn zoon werd 5 jaar daarna geboren; de zoon werd maar half zo oud als zijn vader, en de vader overleed vier jaar na de zoon.* Hoe oud was hij?

> vergelijk: `www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Diophantus.html`

2. Vindt *alle* oplossingen in breuken van de vergelijking $x^2 + 3 = y^2$.

(a) $P = (x, y) = (1, 2)$ is één oplossing.

(b) Bepaal het tweede snijpunt van de lijn $y = 2 + t(x - 1)$ door P met richtingscoëfficiënt $t \in \mathbf{Q}$ met de kegelsnede $x^2 + 3 = y^2$. Je krijgt de vorm $(x(t), y(t))$ van een algemene oplossing.

(c) Met bovenstaande relatie kan je de onbepaalde integraal $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ schrijven als $\int \frac{dx}{y}$. Doe hierin de substitutie $x = x(t), y = y(t)$. Kan je nu de integraal uitrekenen?

(d) Kan je *bewijzen* dat willekeurig dicht bij een reële oplossing van de vergelijking ook een rationale oplossing ligt? Je hebt dan een vermoeden van Mazur bewezen voor deze vergelijking.

> vergelijk: B. Mazur, The topology of rational points. Experiment. Math. **1** (1992), no. 1, 35–45.
> `www.expmath.org/expmath/volumes/1/1.html`

3. In "Carmen de Hastigae Proelio" van Guy, bischop van Amiens, lezen we over de slag van Hastings op 14 oktober 1066: *Harold's mannen stonden als gewoonlijk dicht samengedromd in 13 vierkanten van gelijke grootte, en wee de Noorman die het waagde in zulk een falanx te willen indringen. Maar toen Harold zelf op het slachtveld verscheen, vormden de Saksen één gigantisch vierkant met hun Koning aan de top en stormden voorwaarts onder de strijdkreten "Ut!", "Olicrosse!" en "Godemite!".*

> vergelijk: J. Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Aufgabe I.7.3, Springer-Verlag, 1992.

(a) Als x het aantal manschappen op een rij in het grote vierkant, en y dat in het kleine vierkant is, wat is dan de relatie tussen x en y?

> Dit is een zogenaamde "Pell-vergelijking", er is heel veel over te zeggen, voor geschiedenis zie `www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Pell.html` en vergelijk met H.W. Lenstra, Jr., Solving the Pell equation, Notices Amer. Math. Soc. **49** (2002), no. 2, 182–192,
> `www.ams.org/notices/200202/200202-body-pdf.html`

(b) Bewijs dat alle $(x, y) \in \mathbf{Z}$ bepaald door $x + y\sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^n$ voor zekere n in $\mathbf{Z}_{>0}$ een oplossing van het probleem geven.

4. (a) Laat zien dat de verzameling priemgetallen recursief opsombaar is, d.w.z. dat er een computerprogramma bestaat dat de priemgetallen opsomt.

(b) Laat zien dat de verzameling niet-priemgetallen diophantisch is.

> Het is véél moeilijker te laten zien dat de verzameling priemgetallen diophantisch is; dat volgt uit de DMPR-stelling. Een leesbare versie van het bewijs is in M. Davis, Hilbert's tenth problem is unsolvable, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 233–269.

Gunther Cornelissen