Denken in cirkels en lijnen - Nieuwe wiskunde voor de tweede fase - Profiel N&T - Domein Voortgezette Meetkunde - deel II A+B

De afbeelding op de omslag is een fragment van 'De school van Athene' van Rafael Sanchio, 1483-1520. Op dit fresco komen allerlei geleerden uit de oudheid voor. Het fragment toont de Griekse wiskundige Euclides, temidden van enthousiaste leerlingen. Veel van de meetkunde die in dit boekje staat, is al door Euclides beschreven. Euclides leefde zo'n 300 jaar voor Christus. Voor het Euclides-portret maakte Rafael gebruik van de trekken van zijn vriend Bramante, architect van de koepel van de Sint Pieter in Rome. Geen slechte keus: een architect moet behoorlijk wat van meetkunde weten. Meer naar links op het schilderij staat Socrates afgebeeld, op dezelfde hoogte als de hoofdfiguren Aristoteles en Plato. Hij telt zijn argumenten op zijn vingers af. Argumenteren, redeneren, dat is wat aan de hand van dit boekje intensief zal gebeuren.

Inhoud

Denken in cirkels en lijnen, Voortgezette Meetkunde deel II A

Project:	Wiskunde voor de tweede fase.
Profiel:	N&T.
Domein:	Voortgezette Meetkunde.
Klas:	VWO 5.
Staat:	Herziene versie, januari 1998.
Ontwerp:	Aad Goddijn, Wolfgang Reuter.
	Het overzicht op bladzijde 6 en 7 is een bewerking van een door Anne van Streun gemaakte eerdere versie.

© **Freudenthal instituut, januari 1998.**

Het gehele domein Voortgezette Meetkunde omvat: *deel I: Afstanden, grenzen en gebieden; deel II, A en B: Denken in cirkels en lijnen; deel III: Conflictlijnen en spiegels.*

Hoofdstuk 1:
Werken met wat je weet

1: ‘Woord vooraf’ bij het overzicht

terugblik

In het voorgaande meetkundeboekje, ‘Afstanden, grenzen en gebieden’, werd ingegaan op het indelen van gebieden op grond van het naastebuur principe. Langzamerhand kwamen we echter in zuiver wiskundig vaarwater terecht. Daar werden definities gegeven en stellingen bewezen. Door redeneren vonden we allerlei nieuwe dingen.
In dit boekje gaan we verder met redeneren in de meetkunde.

overzichts-kaart

Het eerste hoofdstuk van dit boekje is hoofdzakelijk een herhaling van dingen die je ooit eerder gezien hebt, soms in iets ander licht gezet.
Op de volgende twee bladzijden – bladzijde 6 en 7, het *Overzicht bekende Meetkunde* – staan allerlei dingen die je al eerder gezien hebt en waarvan je voortaan kunt uitgaan bij het geven van bewijzen.

werkwijze

Een goede manier om dit hoofdstuk te bestuderen is:
- de indeling van het overzicht bekijken
- aan het werk gaan met bladzijde 8. Daar begint een serie activiteiten waarbij je steeds terug zult kijken naar het overzicht.

verderop

In de eerste helft van dit boekje zullen we ook veel nieuwe meetkundige stellingen tegenkomen, in de tweede helft leggen we meer nadruk op hoe je bewijzen kunt vinden. Dat laatste is het echte probleem. Bij het vinden van een bewijsidee biedt de computer ons ook een helpende hand.

Overzicht bekende Meetkunde ....

Hoeken en lijnen

1. De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk; (*overstaande hoeken*).

2a. Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk; (*F-hoeken, Z-hoeken bij // lijnen*).

2b. Als twee lijnen in twee verschillende snijpunten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar F-hoeken of Z-hoeken gelijk zijn, dan zijn die twee lijnen evenwijdig; (*gelijke F-hoeken, gelijke Z-hoeken.*).

3. Een gestrekte hoek is 180 ; (*gestrekte hoek*).
4. De hoeken van een driehoek zijn samen 180 ; (*som hoeken driehoek*).
5. De hoeken van een vierhoek zijn samen 360 ; (*som hoeken vierhoek*).

Gelijke driehoeken *)

6. Twee driehoeken zijn gelijk als ze gelijk hebben:
   a. Eén zijde en twee aanliggende hoeken; *HZH*.
   b. Eén zijde, een aanliggende hoek en de overstaande hoek; *ZHH*.
   c. Twee zijden en de ingesloten hoek; *ZHZ*.
   d. Alle zijden; *ZZZ*.
   e. Twee zijden en de rechte hoek tegenover een van die zijden, *ZZR*.

Alternatieve formulering gelijke driehoeken

6*. De gelijkheid van twee driehoeken volgt uit de gelijkheid van drie overeenkomstige elementen (hoeken of zijden), behalve als (*toegestane driehoeksgelijkheid*)
   – het de drie hoeken zijn,
   – als het twee zijden zijn en de niet-ingesloten hoek, en die is niet recht.

Equivalente definities en eigenschappen

7. Equivalente definities en eigenschappen van een *gelijkbenige driehoek:*
   a. Twee zijden van de driehoek zijn gelijk.
   b. Twee hoeken van de driehoek zijn gelijk.
   c. De driehoek heeft een symmetrieas.
8. Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*:
   a. Twee paar evenwijdige overstaande zijden.
   b. Twee paar gelijke overstaande zijden.
   c. De diagonalen delen elkaar middendoor.
9. Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*:
   a. Een parallellogram met vier gelijke zijden.
   b. Een parallellogram, waarvan een diagonaal een hoek middendoor deelt.
   c. Een parallellogram, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
10. Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek*:
   a. Een vierhoek met vier rechte hoeken.
   b. Een parallellogram met een rechte hoek.
   c. Een parallellogram met gelijke diagonalen.

*) In plaats van '*gelijke driehoeken*' kun je ook de term 'congruente driehoeken' tegenkomen.

.... Overzicht bekende Meetkunde

Lengte en afstand

11a. Eén zijde van een driehoek is altijd kleiner dan de som van beide andere zijden; (*driehoeksongelijkheid*).

11b. Als voor drie punten A, B en C geldt dat $|AB| + |BC| = |AC|$, dan ligt B op het lijnstuk AC; (*omgekeerde van driehoeksongelijkheid)*.

12a. In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de langste zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden; (*de stelling van Pythagoras*).

12b. Is in een driehoek het kwadraat van een zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de andere zijden, dan is die driehoek rechthoekig; (*het omgekeerde van de stelling van Pythagoras*).

13. De afstand, de kortste verbinding, van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn uit dat punt, neergelaten op de lijn; (*afstand tot een lijn*).

Puntverzamelingen

14. De middelloodlijn van het lijnstuk AB is de verzameling van punten die gelijke afstanden tot A en B hebben; (*middelloodlijn*).
    Dat wil zeggen:
    a. De punten van de middelloodlijn liggen even ver van A als van B.
    b. Alle punten, die gelijke afstand hebben tot de eindpunten A en B van lijnstuk AB, liggen op de middelloodlijn van AB.

15. De drie middelloodlijnen van de drie zijden van een driehoek gaan door één punt. Dat punt is het middelpunt van de cirkel die door de drie hoekpunten gaat (*omgeschreven cirkel.*)

16. De deellijn*) van een hoek is de verzameling van punten, die gelijke afstand hebben tot de benen van een hoek; (*deellijn*).

17. De cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van punten die de afstand r tot punt M hebben; (*cirkel*).

18. De verzameling van punten, die gelijke afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van die lijnen; (*middenparallel)*.

Lijn- en puntspiegelingen

19. Bij lijnspiegelen blijven onderlinge afstanden en hoeken gelijk; (*lijnspiegelen*).

20. Bij puntspiegelen blijven onderlinge afstanden en hoeken gelijk; (*puntspiegelen*).

Eigenschappen van cirkels

21. De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn van de cirkel*).

22. De loodlijn uit het middelpunt van een cirkel op een koorde van de cirkel, deelt deze koorde middendoor. En omgekeerd, de middelloodlijn van een koorde gaat door het middelpunt van de cirkel (*loodlijn op koorde*).

23. Voor een vierhoek zijn de volgende twee beweringen gelijkwaardig:
    a. De vier punten liggen op een cirkel.
    b. Twee overstaande hoeken zijn samen 180 .
    (*stelling van de koordenvierhoek*).

---

*) In plaats van ‘deellijn’ komt ook de term ‘bissectrice’ voor. Meervoud: ‘bissectrices’.

2: Het overzicht gebruiken

kijken naar het overzicht

1 **a.** Noem twee meetkundige stellingen of andere beweringen die jij kent, maar die níet in het overzicht op bladzijde 6 en 7 staan.
b. Maak lijstjes van de nummers van zaken uit het overzicht
- die je vanuit de onderbouw kent,
- die in '*Afstanden, grenzen en gebiedsindelingen*' bewezen zijn,
- die volgens jou eigenlijk nog bewezen moeten worden.

Voor de volgende opgave moet je het boekje '*Afstanden, grenzen en gebieden*' bij de hand hebben. Sla deze opgave desnoods nu over en werk eraan als je dat boekje wel bij de hand hebt.

2 Heel wat uit de lijst is in '*Afstanden, grenzen en gebieden*' in andere vorm aan de orde geweest en bewezen. Zoek op wat de stellingen zijn die horen bij de nummers 13, 14, 15 en 16 van het overzicht.

definities en stellingen

De begrippen *definitie* en *stelling* heb je al ontmoet. Omdat die een rol spelen bij de overzichtskaart, volgt hier een kleine herhaling van een en ander.

definities

Natuurlijk wist je al wat een middelloodlijn was. Je hebt daar direct een beeld bij. Maar als we gaan redeneren, moeten we precies *afspreken* wat ermee bedoeld wordt.
Zo'n afspraak heet: *definitie*. Hier is de *definitie* van het begrip 'middelloodlijn':

definitie middelloodlijn
De <u>middelloodlijn</u> van lijnstuk *AB* is de lijn die door het midden van *AB* gaat en loodrecht op *AB* staat.

stellingen

Het bewezen resultaat van een redenering wordt vaak in een stelling samengevat. We hadden bijvoorbeeld beredeneerd dat bij elke driehoek de middelloodlijnen van de drie zijden door één punt gaan.

Hier is nog eens de *stelling* over de middelloodlijnen van de driehoek:

stelling van de drie middelloodlijnen van een driehoek
In elke driehoek *ABC* gaan de drie middelloodlijnen van de zijden *AB*, *BC* en *CA* door één punt.

3 **a.** Welke stelling hoort bij nummer 14 van het overzicht?
b. Er is een soortgelijke stelling over deellijnen van een driehoek. Staat die stelling in het overzicht?

Achter elke stelling gaat een redenering schuil: het bewijs dat de stelling juist is. Daarover straks.

equivalente definities en eigenschappen

Onder dit kopje staat in het overzicht onder andere:

8. Equivalente definities en eigenschappen van een parallellogram:
a. Twee paar evenwijdige overstaande zijden.
b. Twee paar gelijke overstaande zijden.
c. De diagonalen delen elkaar middendoor.

De terechte vraag is: wat is nu hier de *definitie* van een parallellogram en wat zijn *stellingen* over parallellogrammen?
Je kunt bijvoorbeeld 8a als 'definitie' nemen. Voluit:

Een vierhoek heet parallellogram als de twee paren overstaande zijden evenwijdig zijn.

Daar uit kan beredeneerd worden:

In een parallellogram zijn twee paren overstaande zijden gelijk.

en

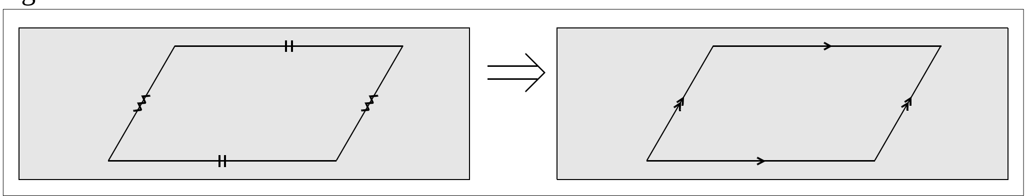
In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.

Maar, en dat wordt bedoeld met 'equivalente definities en eigenschappen', we hadden evengoed 8b of 8c als definitie kunnen nemen en dan werden de andere twee beweringen 'stelling'. Als alles eenmaal bewezen is, maakt het niets meer uit. Elk van de drie definities bepaald dan namelijk precies dezelfde vierhoeken.
Voordeel: als je een van de drie kunt aantonen, weet je dat de andere twee ook gelden. Zo staan in drie regels een heleboel mogelijke gevolgtrekkingen tegelijk. In bewijzen is het vermelden van '*parallellogram*' nu voldoende om hiernaar te verwijzen.

4 Bij nummer 10 van het overzicht gebeurt net zoiets.
a. Maar klopt het daar wel?
10c lijkt als twee druppels water op 8c. Is er nu nog wel verschil tussen parallellogrammen en rechthoeken?
b. Toon aan: als een parallellogram één rechte hoek heeft, dan zijn de andere hoeken ook recht.
Beroep je alleen op wat onder het kopje 'Hoeken en lijnen' in het overzicht staat.

beeldtaal bij bekende feiten

De overzichtskaart bevat alleen maar tekst. Maar om te zien waar het over gaat, is een figuur vaak heel verhelderend. Hier is een voorbeeld.



Je kunt dit als volgt interpreteren:

gelijke lengtes

– In het linkerdeel wordt met de kleine tekentjes op de zijden van deze vierhoek aangegeven dat de overstaande zijden even lang zijn. Voor de twee paren zijden worden verschillende tekens gebruikt.

evenwijdigheid

– De tekentjes op de zijden in de rechterfiguur suggereren richting. Er wordt aangegeven dat de overstaande zijden evenwijdig zijn.

Nu de pijl tussen de twee figuurdelen.

– De pijl naar rechts betekent: **als** de linker situatie zich voordoet, **dan** geldt ook wat rechts is uitgebeeld.

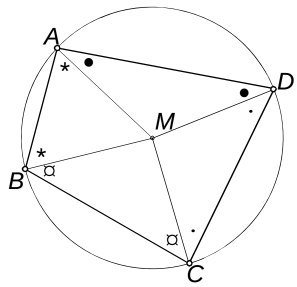
5 **a.** Bij welke onderdelen van het overzicht hoort deze figuur?
b. De figuur kan nog uitgebreid worden met een extra pijl. Waarom?

Twee pijlen die in twee richtingen tussen dezelfde figuren staan, kun je samennemen in een dubbele pijl.

c. De figuur kan ook uitgebreid worden met een derde figuuronderdeel. Doe dat en zorg dat alle dubbele pijlen aanwezig zijn.

gelijke en rechte hoeken

Behalve evenwijdigheid en gelijke lengtes kun je in figuren ook gemakkelijk gelijke hoeken aangeven.
In de figuur hiernaast zijn paren gelijke hoeken met hetzelfde tekentje aangegeven. Je mag allerlei tekentjes gebruiken, natuurlijk ook enkele en dubbele boogjes.
Onder de figuur staat nog een gelijkheid aangegeven. Als formule ziet het er behoorlijk vreemd uit, maar in relatie met de figuur is er geen probleem.



2 (• + * + ¤ + ·) = 360

6 **a.** Op grond waarvan zijn de hoeken met gelijke tekentjes hier gelijk?
b. Welk feit uit de lijst wordt door de vergelijking uitgedrukt en welk feit over koordenvierhoeken volgt ook nog direct uit deze vergelijking?

In een tekening kun je een rechte hoek markeren met het teken .

7 **a.** Breng de gelijkwaardigheid van 7a en b in beeld.
b. Breng de gelijkwaardigheid van 14a en b in beeld.

De hier aangegeven beeldtaal is heel visueel. Dat wil zeggen dat je snel ziet wat bedoeld wordt.

gevaren!

Er zijn ook gevaren. Zo kun je in de figuur niet nóg een teken gebruiken om $\angle DAB$ aan te geven. Dan wordt het een warboel en weet je niet welke hoek bedoeld wordt: $\angle DAM$, $\angle MAB$ of $\angle DAB$. In bewijzen moet dus toch altijd genoteerd worden welke hoeken bedoeld zijn.
De beeldtaal is alleen hulpmiddel: een korte manier van noteren; vaak handig, soms dubbelzinnig.

samenvatting

Er is een belangrijk verschil tussen definities en stellingen:
- een *definitie* is een afspraak
- een *stelling* is een bewezen bewering.

Er bestaat handige beeldtaal om verbanden *in figuren* aan te geven.
- *gelijke lengtes van lijnstukken*: met gelijke tekentjes op de lijnstukken
- *gelijke hoeken*: met gelijke tekentjes in de hoeken
- *evenwijdigheid*: met gerichte pijltjes op de lijnen
- *loodrechtheid*: met een recht hoekje in de hoek.

Met pijlen kun je ook verbanden *tussen figuren* aangeven.
- de pijl $\Longrightarrow$ kan in beeldtaal gebruikt worden om als-dan beweringen weer te geven.
- Voor de hand liggende andere pijlen zijn $\Longleftarrow$ en $\Longleftrightarrow$.

3: redeneringen vinden en bewijzen opschrijven

inleiding over notaties

In de vorige paragraaf heb je een paar hulpmiddelen gezien om *in tekeningen* bepaalde verbanden aan te geven.
In deze paragraaf gaat het om *opschrijven* van redeneringen en daar zijn ook weer hulpmiddelen voor. De meeste ken je al, hier staan ze bij elkaar.

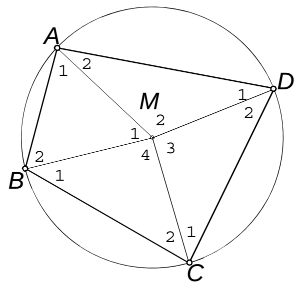
gelijke lengtes en afstanden

De afstand tussen twee punten A en B wordt aangegeven met d(A, B).
De lengte van het lijnstuk AB wordt aangegeven met $|AB|$.
De d-notatie kan ook worden gebruikt voor de afstand van een punt P tot een gebied G: d(P, G).

hoeken aangeven

Eerste manier (kan zonder tekening): de hoek bij punt B met benen BA en BC wordt aangegeven met $\angle ABC$.
Als er een tekening is, kan soms ook met een kortere notatie worden gewerkt: alleen de letter en een index, meestal een cijfertje.
Zo kun je bijvoorbeeld bij de tekening hiernaast opmerken:

$\angle A_1 = \angle B_2$, omdat AMB
een gelijkbenige driehoek is.



Als onduidelijkheid dreigt, kun je altijd nog toevoegen:

$\angle A_1 = \angle MAB$.

de tekens // en $\perp$

Evenwijdigheid en loodrechtheid zullen vaak gebruikt worden; daarom zijn er twee bijzondere tekens:
Als lijn DE evenwijdig is aan lijn GH, noteer je dat kort met: $DE \,/\!/\, GH$.
Als lijn PQ loodrecht staat op lijn QR, noteer je dat kort met: $PQ \perp QR$.

motiveringen, gegevens

Hierboven stond een voorbeeld van een kleine redenering

$\angle A_1 = \angle B_2$, omdat AMB een gelijkbenige driehoek is.

Het is een *bewering*, namelijk $\angle A_1 = \angle B_2$, die *gemotiveerd* is door verwijzen naar een bekend feit uit het overzicht, namelijk nummer 7 over gelijkbenige driehoeken. Het aangeven van het sleutelwoord *gelijkbenige driehoek* is hier voldoende.

8 Geef aan om welke onderdelen van nummer 7 uit het overzicht hierbij betrokken zijn en welke redeneerpijl tussen die gelijkwaardige onderdelen wordt gebruikt.

Maar waarom is AMB een gelijkbenige driehoek? In dit geval .... omdat $|AM| = |BM|$.

Maar waarom *zou* hier eigenlijk gelden $|AM| = |BM|$?

Een voor de hand liggend antwoord is: omdat A en B op een cirkel met middelpunt M liggen. Dat had dan eigenlijk wel van tevoren duidelijk gezegd moeten worden!

gegevens

Het feit dat A en B op een cirkel met middelpunt M liggen, volgt eigenlijk nergens uit, het is wat in de situatie waar het over gaat *gegeven* is.

9 In dit gedeelte heb je motiveringen van verschillende soorten bij redeneerstappen gezien. Welke?

De definitieve vorm van de redenering van *gegeven* naar het *eindresultaat* $-A_1 = -B_2$ kun je heel volledig nu zó opschrijven:

	redeneerstap	***motivering***
1:	A en B liggen op een cirkel met middelpunt M	*gegeven*
2:	$\|AM\| = \|BM\|$	*definitie cirkel*
3:	$-A_1 = -B_2$	*gelijkbenige driehoek AMB.*

10 Er is ten opzichte van de inleiding van dit onderdeel iets veranderd in de volgorde van het verhaal. Licht toe wat dat is, en geef aan waarom dat gedaan zal zijn.

Bij de motiveringen kun je dus verwijzen naar:

- *gegevens*
- *definities*
- *bekende zaken uit het overzicht*

maar ook

- naar *wat eerder aangetoond is in je bewijs*; hiervoor kan het handig zijn de stappen van het bewijs te nummeren, of sommige stappen nummers te geven.
- naar *wat eerder bewezen* is (vaak is dat dan een stelling waar je naar kunt verwijzen; soms is het een eerdere opgave).

Voortaan zullen we natuurlijk bij problemen precies moeten weten wat gegeven is.

bewijs

Een redenering die op deze wijze is opgezet, zullen we een *bewijs* noemen. In een bewijs komen dus alleen redeneerstappen voor die op de aangegeven manier gemotiveerd kunnen worden.

duidelijkheid!

Dat je in bewijzen alle redeneerstappen moest kunnen motiveren, heb je al gezien in het eerste meetkundeboekje, *Afstanden, Grenzen en Gebieden.* Het nieuwe van dit hoofdstuk is, dat je nu precies weet welke motiveringen je mag gebruiken.
Dat lijkt een beperking, maar van de andere kant: je hebt nu een hele lijst mogelijke motiveringen tot je beschikking. Bij het vinden van bewijzen kun je daaruit putten.

Dat gaan we oefenen in de volgende paragraaf.

4: voorbeelden van bewijzen

In deze paragraaf gaan we enkele nieuwe meetkundige feiten bewijzen. We gebruiken de manier van werken en opschrijven van de vorige paragrafen.

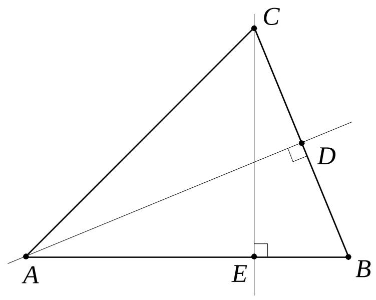
voorbeeld één: twee hoogtelijnen

Omdat we in dit voorbeeld werken met hoogtelijnen, moeten we die eerst definieren.

definitie hoogtelijn

Een hoogtelijn uit een hoekpunt van een driehoek is de loodlijn uit dat punt op de overstaande zijde.

Nu het eigenlijke probleem:



Gegeven is hier een driehoek *ABC* met de hoogtelijnen uit *A* op *BC* en die uit *C* op *AB*.
De hoogtelijn uit *A* snijdt *BC* in *D*, de hoogtelijn uit *C* snijdt *AB* in *E*. Bij nameten in verschillenmde gevallen zou je snel merken: $\angle DAB = \angle ECB$. Dat moet dan ook bewezen worden. Dus:

Te bewijzen is: $\angle DAB = \angle ECB$.

11 Probeer eerst zelf een redenering te vinden waarom die hoeken gelijk zijn en kijk dan of je de redenering in de vorm van een bewijs kunt brengen dat aan de eisen van de vorige paragraaf voldoet.

Mooi als je dat gelukt is, niet erg als het niet gelukt is. Lees in ieder geval verder.

12 Bekijk eerst $\angle DAB$. Het is vaak een goed idee een hoek op te vatten als *hoek van een driehoek*.
- **a.** Je hebt twee keuzen, maar bij een ervan hebben alle hoekpunten al namen. Dat lijkt het eenvoudigst. Welke driehoek moeten we nemen?
- **b.** Met $\angle ECB$ kun je net zoiets doen. Welke driehoek ga je dus ook gebruiken?
- **c.** Wat hebben deze driehoeken voor gemeenschappelijke kenmerken?

13 Na deze waarnemingen ligt het bewijspad in grote lijnen voor je: $\angle DAB$ en $\angle ECB$ kunnen in $\angle B$ worden uitgedrukt en daaruit moet gaan blijken of ze gelijk zijn.
Nu gaat het erom het bewijs precies te noteren. Vooral dat ‘uitdrukken in’.
Begin als volgt, vul de gaten in met de juiste motiveringen en maak het bewijs af. Denk eraan dat je naar voorgaande regels kunt verwijzen.

	redeneerstap	***motivering***
1:	$\angle DAB + \angle ADB + \angle B = 180$	*som hoeken in driehoek* ....
2:	$\angle ADB =$	*gegeven*
3:	....	....

aanvulling: gevalsonderscheiding

In de figuur met de twee hoogtelijnen lag het snijpunt van de twee hoogtelijnen *binnen* de driehoek. Daardoor liep het bewijs gemakkelijk: de twee driehoeken hebben een overlappende hoek.
Toch moet je goed uitkijken: in de gegevens is niet opgenomen dat de driehoek scherp is. In zulke situaties moet je ook het andere geval (hier van de stomphoekige driehoek) nagaan. Kortom: ***gevalsonderscheiding***.

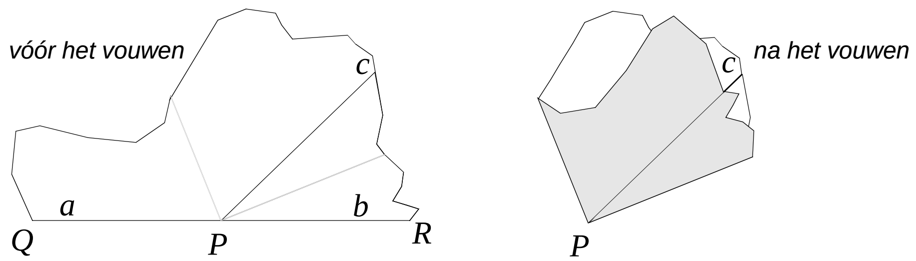
14 a. Teken een driehoek *ABC* met een stompe hoek bij *B* en teken weer de hoogtelijnen uit *A* en uit *C*. Deze lopen nu buiten de driehoek.

b. Ga na in hoeverre het gegeven bewijs nog correct is. Voeg zo nodig een stap (met motivering) toe.

voorbeeld twee: een onverwachte hoek

Van belang is, dat je in een figuur kunt herkennen welke definities, feiten en andere zaken daar van belang zijn, zonder dat ze genoemd zijn. De volgende opgaven zijn een oefening in dat herkennen.

15 Van een vel papier is een snipper afgescheurd. *QR* is een rechte kant, lijn *c* is 'zomaar' getekend. Met een andere stand moet het ook kunnen. Vouw nu lijn *a* op *c* en lijn *b* op *c*, dus zoals hieronder te zien is.



a. Wat voor bijzonders merk je ná het vouwen op aan de hoek bij *P*?

b. Vouw alles nu weer uit. Vanuit *P* lopen nu drie lijnen. Maak een nieuwe tekening met alle lijnen die van belang zijn. De scheurrand van de papiersnipper is dat duidelijk niet.

c. Geef in de tekening gelijke hoeken bij *P* alvast aan met tekentjes.

d. Zet op elke van de drie lijnen een punt met een letter, neem bijvoorbeeld *U*, *V* en *W*. Dat is om makkelijk te kunnen noteren wat je bedoelt.

Tot nu toe heb je een vooronderzoek gedaan. Je hebt nu een tekening waar de gegevens in zijn te vinden. In de tekening zie je ook wat er bewezen zal moeten gaan worden.

e. Zoek naar een redenering: Welk van de bekende feiten ga je nu gebruiken om duidelijk te maken dat de twee vouwlijnen inderdaad de vermoedelijke ligging hebben? Let ook op het bijzondere van −*QPR*.

f. Noteer nu de *gegevens*, en apart daarvan *wat je wilt bewijzen* en ten slotte het *bewijs* zelf in de bekende vorm.
(Er zijn diverse manieren mogelijk.)

voorbeeld drie: de vier deellijnen van een parallellogram

In dit gedeelte ga je twee eigenschappen van parallellogrammen bewijzen.

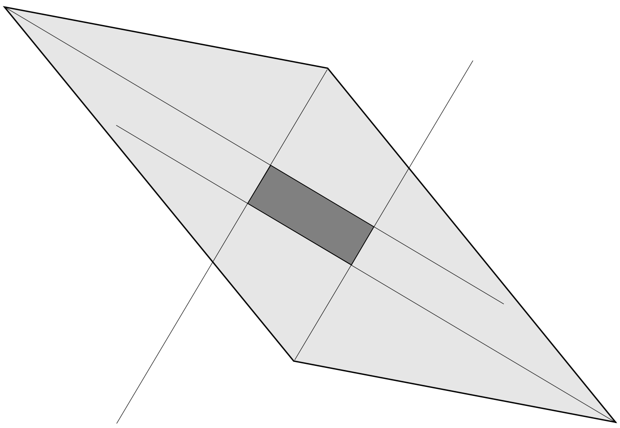
16 Het gaat eerst om:

Opeenvolgende hoeken van een parallellogram zijn samen 180 .

- **a.** Maak een tekening.
- **b.** Noteer de gegevens en wat te bewijzen is.
- **c.** Geef een (kort) bewijs.

Bij de volgende opgave kun je het resultaat van opgave **16** vast wel gebruiken in het bewijs. Motiveer bijvoorbeeld met ‘volgens opgave **16**’. Dat mag volgens de criteria voor bewijzen, het is dan immers een eerder bewezen bewering.

17 Hier is een parallellogram met vier deellijnen uit de hoeken getekend.



- **a.** Teken twee andere parallellogrammen en hun vier deellijnen uit de hoeken.
- **b.** De figuur die steeds door de deellijnen wordt ingesloten, lijkt een bijzonder soort vierhoek te zijn. Formuleer hier een vermoeden over: wat voor soort vierhoek zou het kunnen wezen?
- **c.** Nu werken we verder in de geest van de vorige problemen.
  Begin dus met noteren wat de *gegevens* zijn, wat *te bewijzen* is en maak een tekening waarin alle gegevens zichtbaar zijn gemaakt met tekentjes.
- **d.** Zoek weer een redenering om het vermoeden te onderbouwen.
  Enkele tips:
  - Geef de hoekpunten van het parallellogram namen: *A*, *B*, *C* en *D*. En ook die van de te onderzoeken vierhoek: *P*, *Q*, *R* en *S*.
  - Nu moet er op een of andere manier een verband gezocht worden tussen een hoek van *PQRS* en de hoeken van *ABCD*. Kies een van de hoeken van *PQRS* uit om mee te werken. Het maakt niet uit welke.
  - Ook moeten de deellijnen een rol spelen. Zoek een driehoek waarin .... etc.
  - ....
  - enzovoort ....
- **e.** Als je een redenering gevonden hebt, noteer die dan in de vorm van een correct bewijs.

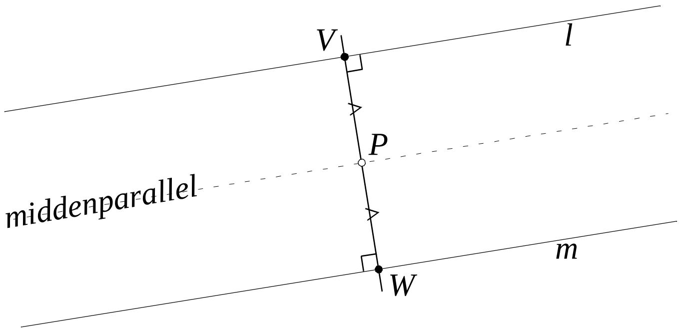
voorbeeld vier: meer over middenparallellen

Bij dit voorbeeld gaan we gebruikmaken van een speciaal onderdeel van het overzicht en kijken wat ermee bereikt kan worden. Dat lijkt anders dan bij de vorige voorbeelden, want daar wist je wat je moest bewijzen en moest je de bewijzen vinden.
Echt anders is het niet: uiteindelijk heb je bij dit voorbeeld ook een nieuwe bewering te pakken en een bewijs voor die bewering.

We nemen nummer 18 van het overzicht als uitgangspunt; nu met een tekening erbij:

uit de lijst

18: De verzameling van punten, die gelijke afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van die lijnen; (middenparallel).



Volgens het gegeven (gelijke afstanden tot de lijnen) zijn $|PV|$ en $|PW|$ gelijk en staan PV en PW loodrecht op l en m. In de figuur gaat door P een lijn evenwijdig aan l en m; volgens de bewering bevat deze lijn juist alle punten die gelijke afstanden hebben tot l en m.

Wat zou er te zien zijn als we nog een lijn n door P kiezen, nu eens niet loodrecht op l en m?

18 Als de snijpunten van n met l en m S en T heten, geldt dan nu ook $|PS| = |PT|$? Ook als de snijlijn bijna parallel aan l loopt, zodat de snijpunten heel verweg liggen?
Daar gaat het volgende vraagstuk over.

- **a.** Tekende figuur over en voeg zo'n lijn n toe. Markeer de snijpunten met l en m met de leeters S en T.
- **b.** Noteer precies wat gegeven is; laat je helpen door de figuur hierboven.
- **c.** Te bewijzen is: $|PS| = |PT|$.
  Vind een redenering die gebruikmaakt van een van de mogelijkheden voor 'gelijke driehoeken'; zie het overzicht, nummer 6. Omdat de figuur niet zo erg veel driehoeken bevat, valt het zoeken wel mee.
  Met een van de lettercodes (*ZZZ*, *HZH*, enzovoort) die daarbij staan, kun je aangeven op welke soort gelijkheden je de bewering baseert.
  (Let erop dat je de goede kiest, want niet alles mag zomaar; zie aan het eind van deze paragraaf de ***'voetnoot gelijke driehoeken***'.)
- **d.** Noteer het bewijs correct met alle motiveringen.

Na voltooien van opgave **18** is bewezen:

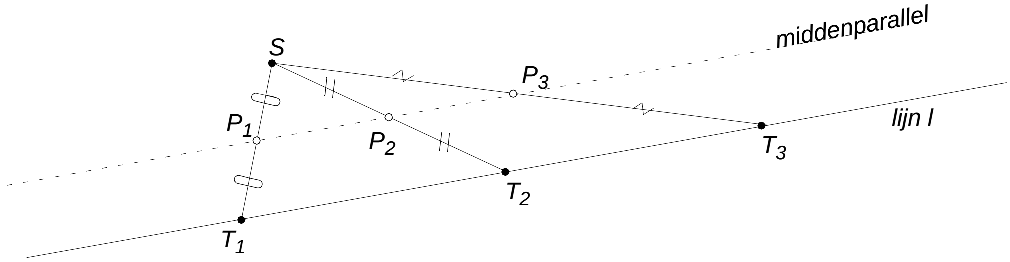
principe van de midden-parallel

Als *l* en *m* evenwijdig zijn, dan verdeelt de middenparallel van *l* en *m* elk lijnstuk *ST* met *S* op *l* en *T* op *m* in twee gelijke delen.

Omdat zo'n lijnstuk maar één midden heeft, geldt ook:

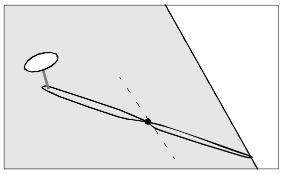
Als *l* en *m* evenwijdig zijn, dan ligt het midden van elk lijnstuk *ST*, waarvan *S* op *l* en *T* op *m* ligt, op de middenparallel van *l* en *m*.

Dat is méér dan wat oorspronkelijk bekend was, daar ging het alleen om lijnen loodrecht op *l* en *m*.
In veel gevallen ziet de figuur er zó uit:

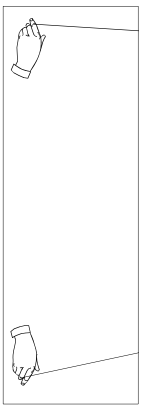


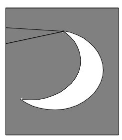
S ligt wel op de lijn *m*, maar omdat er maar met één punt van *m* wordt gewerkt, is *m* niet getekend.
In dit geval kun je ook zeggen: de lijn P_1P_2 is een middenparallel tussen *S* en *l*.
Alle middens van lijnstukken *ST* met *T* op *l* liggen op de middenparallel van *S* en *l*.

Erg onverwacht is het allemaal nog niet, maar de grenzeloze algemeenheid ervan is het sterke punt. Doe eens mee met de volgende gedachtenexperimenten.



19 Prik een punaise in een oude tafel, ongeveer 15 cm van de rand. Knoop nu twee even grote elastiekjes aan elkaar, zodat je twee gelijke lussen aan één knoop hebt. Ook bij uitrekken blijft de knoop middenin.
Leg één lus om de punaise en beweeg het andere eind langs de rand van de tafel. Hoe beweegt de knoop dan?





20 Ga met gespreide armen met je gezicht naar de maan staan. Span een dunne rode draad van je rechterhand naar een punt op de maan. Span nu een blauwe draad van precies datzelfde punt van de maan naar je linkerhand. Trek beide draden strak zodat ze perfecte rechte lijnen vormen.
Hoever ligt het midden van de blauwe draad van de rode af?
(De afstand van jou tot de maan is ongeveer 385000 kilometer.)

vervolg voorbeeld vier: zwaartelijnen van een driehoek

Nu passen we het principe van de middenparallel toe in het onderzoek naar zwaartelijnen van de driehoek. Die hebben immers ook alles met 'middens' te maken:

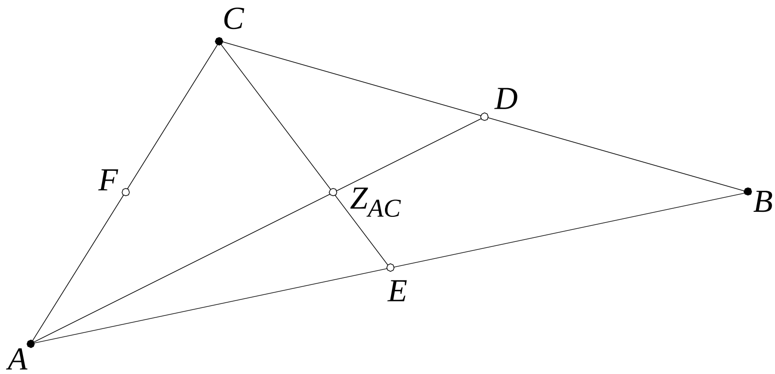
definitie zwaartelijn

De zwaartelijn uit een hoekpunt van een driehoek verbindt dat punt met het midden van de overstaande zijde.

Ons uiteindelijke doel is aan te tonen

dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.

Daartoe onderzoeken we eerst het snijden van *twee* zwaartelijnen.



21 In de tekening zie je een driehoek met twee zwaartelijnen (die uit A en C) en hun snijpunt Z_{AC} getekend. Ook het midden F van zijde AC is gemarkeerd.

a. Geef met *blauwe* tekentjes aan wat de *gegevens* zijn; het gaat om allerlei paren gelijke lijnstukken.

b. Teken de lijnen door D en F die evenwijdig zijn met de zwaartelijn uit C.

c. Je hebt middenparallellen getekend. Van allerlei lijnstukken kun je dus nu aangeven dat ze evenlang zijn. Doe dat met *rode* tekentjes. Deze gelijkheden gaan een rol spelen in het *bewijs* dat straks moet komen!

d. Probeer te komen tot een redenering die uitkomt op:

de zwaartelijn uit A wordt door de zwaartelijn uit C in twee delen verdeeld die zich verhouden als 1 : 2. Het grootste deel begint bij A.

e. Noteer nu wat je gevonden hebt in de correcte vorm *gegevens-te bewijzen-bewijs*. Bij het bewijsdeel geef je ook de motiveringen aan.

22 a. Als je uitgegaan was van de zwaartelijnen uit A en B, had je net zoiets gevonden over hun snijpunt Z_{AB}. Wat?

b. Wat weet je dus van de 'twee' punten Z_{AC} en Z_{AB}?
Laat zien hoe daaruit nu volg:

de drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.

samenvatting, driestappenplan

In deze paragrafen heb je zelf aan enkele bewijzen gewerkt.
Als je naar de opgaven terug zou kijken, zie je dat er steeds een *driestappenplan* gebruikt is:

stap een: teken- en verkenningsfase

het maken van een tekening waarin je aangeeft wat gegeven is en waarin je goed kunt zien wat er eigenlijk bewezen moet worden.

De beeldtaal van dit hoofdstuk wordt daarbij gebruikt.

stap twee: de redeneer- en zoekfase

het vinden van een redenering naar wat te bewijzen is.

Hierbij voegde je vaak dingen aan de figuur toe. (Je kunt ook vaak handig van een gummetje gebruikmaken !) Aan het eind van deze fase heb je weliswaar/hopelijk een weg gevonden naar wat bewezen moet worden, maar heb je nog niet een correct genoteerd bewijs.

stap drie: de afwerkingsfase

Het noteren van een correct bewijs.

Het geheel noteerde je steeds in de vorm van de drieslag:

gegevens:
....

te bewijzen:
....

bewijs:
....

Bij *gegevens* staat meestal niet veel, maar wat er staat, is van vitaal belang. Er staat alleen wat er gegeven is voor *deze* situatie. Dus geen voorlopige conclusies, andere dingen die je weet, enzovoort. Dit moet heel sec zijn.
Bij *te bewijzen* staat alleen de eindconclusie waar je naar toe moet.
In het *bewijs* laat je de *bewijsstappen* zien en je geeft steeds de *motiveringen* aan. Dit is het meest uitgebreide gedeelte.
De motiveringen kunnen verwijzen naar:

- *gegevens*
- *definities*
- *eerdere bewijsstappen*
- *eerder bewezen beweringen*
- *onderdelen van het overzicht van bladzijde 6 en 7, aangeduid met de daar gecursiveerde termen en/of een nummer.*

Als afsluiting van deze samenvatting volgt hier een netjes uitgeschreven bewijs bij een bewering die niet in het overzicht staat. Het gaat om de bewering:

> *Als een vierhoek een parallellogram is, dan zijn de overstaande hoeken van de vierhoek paarsgewijs gelijk.*

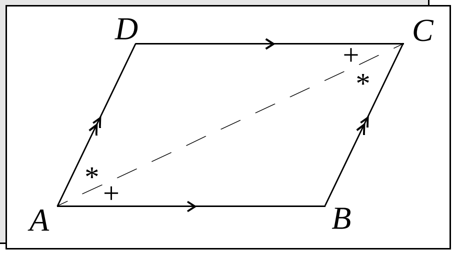
Bij ‘*Gegevens:’* zul je zien wat achter ‘als’ staat.
Bij ‘*Te bewijzen:*’ vind je in feite de zin achter ‘dan’ terug.

Je zult het bewijs wel niet ingewikkeld vinden; het gaat hier dan ook meer om de vorm waarin alles gezet is.

Gegeven:

een vierhoek ABCD;
AB evenwijdig aan CD en BC evenwijdig aan AD.

Figuur:



Te bewijzen:

$\angle DAB = \angle BCD$

Bewijs:

Bewijsstap	motivering
Trek de diagonaal *AC*. Dan geldt:	
$\angle DAC = \angle ACB$	*Z-hoeken*
En ook :	
$\angle CAB = \angle ACD$	*Z-hoeken*
Dus	
$\angle DAB = \angle DCB$	*Uit regel 1 en 2. Optellen van hoeken.*
Dit moest bewezen worden.	

Het bewijs is *achteraf gezien* niet ingewikkeld.
Toch is er één probleem: hoe kòm je op het idee om die slimme hulplijn *AC* te trekken? Als je zoiets niet direct vindt, geef dan toch niet op, er zijn vaak vele andere wegen.

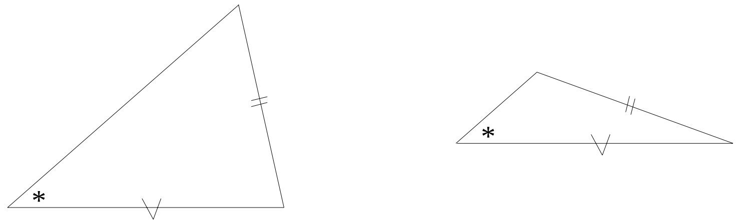
23 Maar zonder trekken van *AC* kan het ook!
Zoek zelf welke eerdere opgave je hier te hulp kunt roepen. Noteer een bewijs van drie regels.
Tip: werk van hoek *A* naar hoek *C* via hoek *D.*

vooruitblik

Vooral stap twee van het stappenplan is van belang: het zoeken van een weg. Je hebt ook al gemerkt dat er niet altijd één feit uit het overzicht is dat de juiste aansluiting geeft; je moet soms meerdere dingen aan elkaar knopen. Het zoeken hiernaar gaan we aan de hand van allerlei situaties nog uitvoerig oefenen, vooral in deel *B* van dit boekje, dat later komt.

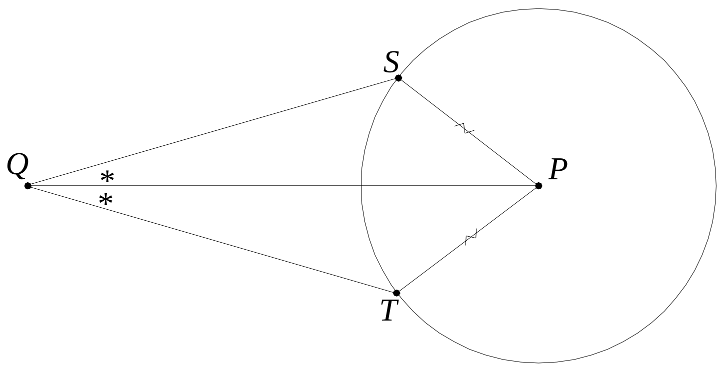
voetnoot gelijke driehoeken

24 Bij deze twee driehoeken zijn wél drie overeenkomstige onderdelen gelijk, maar de driehoeken als geheel overduidelijk niet.



a. Welke letterkarakterisering met *H*'s en/of *Z*-en in de stijl van nummer 6 van het overzicht zou hier moeten staan? Komt die nummer 6 voor?
b. Om welke reden is de alternatieve formulering (nummer 6*) hier ook niet toepasbaar?

25 In de volgende figuur zijn twee gegevens gemarkeerd.
(De cirkel heeft *P* als middelpunt.)



a. Met $|QP| = |QP|$ erbij heb je drie gegevens over de driehoeken *QPS* en *QPT*. Toch mag je niet concluderen dat $|QS| = |QT|$. Waarom niet?
b. Breid de figuur zo uit dat er nog een ander punt *T'* op de lijn *QT* ligt, dat aan dezelfde gegevens voldoet en waarvoor niet geldt: $|QS| = |QT'|$.

26 De onderdelen 6a en 6b van het over zicht kun je ook samenvatten in:
Twee driehoeken zijn gelijk als ze één zijde en drie overeenkomstige hoeken gelijk hebben.
a. Welke ander meetkundig feit ligt hieraan ten grondslag?
b. Toch gaat er iets verloren bij die formulering. Wat?

5: slotbeschouwing: de wortels en de boom

de driehoeksongelijkheid als uitgangspunt

In deze paragraaf gaat het om de fundering onder alles wat we tot nu toe in de meetkunde gezien hebben.
Je herinnert je je de *driehoeksongelijkheid* nog wel:

> **Driehoeksongelijkheid**
>
> **Voor elk drietal punten *A*, *B* en *C* geldt dat $d(A,C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.**
> **Het gelijkteken treedt alleen op als *B* op het lijnstuk *AC* ligt.**
> **In alle andere gevallen is er sprake van een echte ongelijkheid.**

Dat is géén bewezen stelling en ook geen definitie. Wat was het dan wel?
We namen de driehoeksongelijkheid aan als een *uitgangspunt* waaraan ons werkterrein - het platte vlak- voldeed. Iedereeen die met deze aanname meegaat, moet ook alle logische gevolgen ervan accepteren.
Je hebt in '*Afstanden, grenzen en gebieden*' gezien dat de driehoeksongelijkheid de uiteindelijke basis was onder de theorie van de middelloodlijnen.

takken en wortels

In dit hoofdstuk is in het overzicht samengevat wat je nog meer mag gebruiken. Veel van die dingen zijn beweringen die ook bewezen hadden kunnen worden uit slechts enkele grondbeginselen.
In theorie is het namelijk mogelijk een opbouw te geven die van veel primitievere uitgangspunten uitgaat, zoals bijvoorbeeld:
– door elke twee punten gaat precies één rechte lijn
– door een punt buiten een lijn gaat precies één lijn evenwijdig aan die lijn.

Je moet dan echter lang en subtiel redeneren om te komen waar je nu al bent. Je zou binnen zo'n opzet de driehoeksongelijkheid niet eens mogen aannemen, maar volledig moeten bewijzen, geheel vanuit die primitieve uitgangspunten.
Voor wie in de wortels van de wiskunde is geïnteresseerd, is dit van belang. Dat is natuurlijk niet iedereen. Wij zullen vooral naar de takken van onze boom kijken en hoe die vanuit andere takken, of de stam, opgroeien. Van de wortels nemen we aan dat ze er zijn en de boom in alle stormen overeind houden.

nog anders!

Er zijn nog meer manieren om de meetkunde te funderen. Zo kun je ook denken aan het gebruik van coördinaten. Je weet dat je rechte lijnen en cirkels ook met vergelijkingen in x en y kunt noteren. Snijden van een cirkel met een lijn is dan oplossen van x en y uit twee vergelijkingen. De coördinatenmethode geeft zo wéér een andere basis onder de meetkunde. In een volgend boekje (*Conflictlijnen en Spiegels*, in de zesde klas) komen we nog op het gebruik van coördinaten terug. Daar worden coördinaten niet gebruikt als versteviging van de wortels onder het meetkundegebouw, maar als een bijzondere manier van bewijzen leveren.

Hoofdstuk 2:
Speciale bewijsvormen

6: over als-dan beweringen en omkeringen

als-dan vorm, (on)omkeerbaarheid

Veel onderdelen van het overzicht zijn in feite *als-dan*-beweringen. Je hebt ook gezien dat je zulke beweringen met een pijl kunt weergeven, zoals bij de beweringen over parallellogrammen is gedaan.
Je hebt vroeger uitvoerig gezien dat je zulke beweringen niet zonder meer mag omkeren. Plat gezegd: elke koe is een beest, maar niet elk beest is een koe.
Bij een aantal beweringen kan het wel, daar zijn de omkeringen apart bewezen.
Bij nummer 23 van de lijst kun je dit opschrijven:

Vierhoek ABCD is een koordenvierhoek	$\Rightarrow$	*In vierhoek ABCD geldt –ABC + –CDA = 180*

Maar ook:

In vierhoek ABCD geldt –ABC + –CDA = 180	$\Rightarrow$	*Vierhoek ABCD is een koordenvierhoek*

De twee beweringen zijn elkaars omkeringen. Je kunt ze samennemen in:

Vierhoek ABCD is een koordenvierhoek	$\Leftrightarrow$	*In vierhoek ABCD geldt –ABC + –CDA = 180*

En dat is juist de in 23 bedoelde equivalentie.

In elk blok wordt een eigenschap van vierhoeken beschreven. De *als-dan*-beweringen zeggen: als de vierhoek de ene eigenschap heeft, dan heeft hij ook de andere.

1 Zouden de zaken bij deze twee beweringen net zo liggen?

I:	*In vierhoek ABCD delen de diagonalen elkaar middendoor.*	$\Rightarrow$	*Vierhoek ABCD is een rechthoek.*
II:	*Vierhoek ABCD is een rechthoek.*	$\Rightarrow$	*In vierhoek ABCD delen de diagonalen elkaar middendoor.*

a. Welke van de twee beweringen beeld iets van het overzicht uit?
b. Is de andere bewering ook waar?

2 Zoek in het overzicht van bladzijde 6 en 7 nog een voorbeeld van wel omkeerbare en niet omkeerbare beweringen.

bewijs uit het ongerijmde

Een *bewijs uit het ongerijmde* kwam soms bij *als-dan*-vormen voor.

Je moest in zulke gevallen bewijzen: **_A geldt_** $\Rightarrow$ **_B geldt_**.

en wat je deed, was bewijzen: **_B geldt niet_** $\Rightarrow$ **_A geldt niet_**.

Eigenlijk gaat het om ***verschillend uitziende*** versies van ***dezelfde*** bewering.

Wat je in feite aantoont, is dat de combinatie van

A geldt met **_B geldt niet_**

uitgesloten is. Ouderwets gezegd: *ongerijmd* is.
Vandaar de traditionele naam *bewijs uit het ongerijmde*.

voorbeeld Een voorbeeld, maar nu in *als-dan*-vorm genoteerd.

De bewering over de raaklijnen aan de cirkel (nummer 21) kan als volgt geformuleerd worden, waarbij P steeds een punt op de cirkel is en M het middelpunt van die cirkel:

Versie EEN

Als *l een raaklijn in punt P aan de cirkel is,*
dan *staat l loodrecht op PM.*

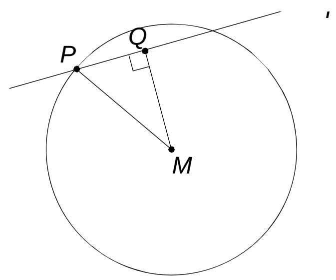
Maar in het bewijs gaat het om:

Versie TWEE

Als *lijn l* ***niet*** *loodrecht op PM staat,,*
dan *is l* ***geen*** *raaklijn in P aan de cirkel.*

3 Vat raaklijn hier op als: een lijn die wel door een punt van de cirkel gaat, maar niet door het inwendige van de cirkel loopt. De tekening hiernaast geeft een idee voor een redenering.

a. Formuleer die redenering in het kort.



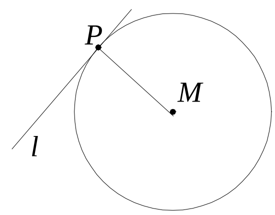
Het bewijs van de bewering van versie EEN ziet eruit zoals hieronder.

b. Maak het verder af.

Gegeven:

cirkel met middelpunt M;
een punt P op de cirkel;
de raaklijn l in P aan
de cirkel.

Figuur:



Te bewijzen:

l staat loodrecht op PM

Bewijs:

Bewijsstap	**motivering**
1: Veronderstel dat de lijn l **niet** loodrecht staat op PM	(bewijs uit het ongerijmde)
2: Zij Q het punt op l met $MQ \perp l$.	
3: Dan geldt:	(overzicht nr. 13, afstand punt tot lijn)
4:	....
......	
......	

4 Strikt genomen moet je ook nog bewijzen: alle punten (op P na) van de lijn door P, die loodrecht staat op PM, liggen buiten de cirkel.
Vind hier zelf een redenering voor.

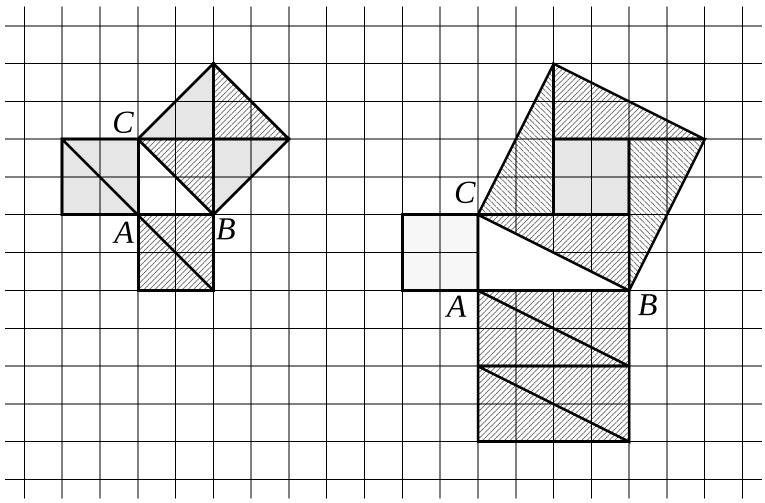
7: voorbeelden en tegenvoorbeelden

rol van een tegenvoorbeeld

5 Deze *als-dan*-bewering is onjuist.
Als
van een vierhoek twee overstaande zijden even lang zijn en de andere twee evenwijdig zijn,
dan
is de vierhoek een parallellogram.
Toon de onjuistheid van deze bewering aan, door een vierhoek aan te geven (in beeldtaal is genoeg) die wel de eigenschappen heeft die achter *als* staan, maar toch geen parallellogram is.

weerleggen Wat je gedaan hebt, is de bewering *weerleggen* door een tegenvoorbeeld te geven. Eén tegenvoorbeeld is genoeg om een bewering te weerleggen. Weerleggen is vooral van belang als je iets probeert te bewijzen en het lukt niet. Misschien ben je bezig met een stap die niet juist is en kun je die beter even weerleggen!

voorbeelden of bewijzen
Er zit een andere kant aan deze zaak.
In onderstaande figuur zie je tweemaal een rechthoekige driehoek *ABC*.



6 Ga door vergelijken van oppervlakten (in de twee gevallen op verschillende manieren) na dat in beide gevallen geldt $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

a. Is hiermee de stelling van Pythagoras overtuigend
- aangetoond?
- toegelicht?
- bewezen?

Leg je keuze in enkele regels uit.

b. Wordt het ‘bewijs’ beter als nóg een vergelijkbare berekening wordt uitgevoerd, uitgaand van weer een andere driehoek?

c. Formuleer een zo krachtig mogelijke waarschuwing over dit soort ‘bewijzen’.

8: Bewijzen in 1-1bis vorm

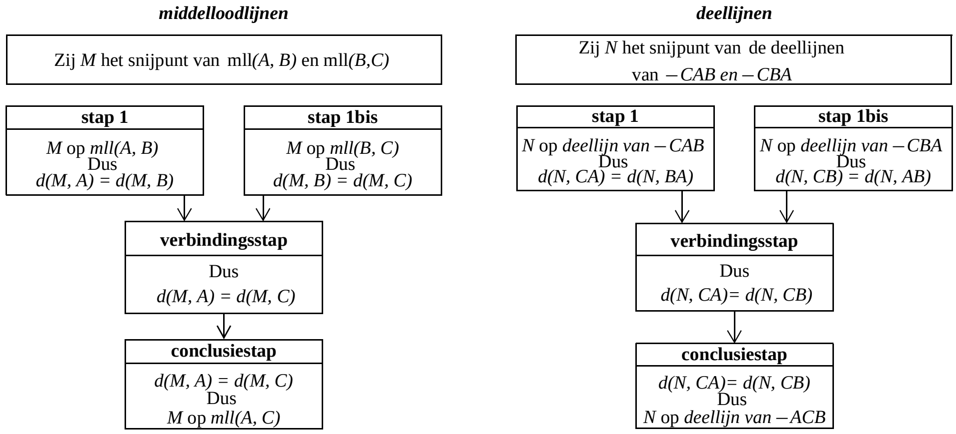
In *'Afstanden, grenzen en Gebieden'* ben je twee keer bijzondere lijnen in de driehoek tegengekomen die door één punt gaan:

– de *middelloodlijnen* van de zijden
– de *deellijnen* van de hoeken.

In het vorige hoofdstuk heb je nog zo'n situatie waar drie speciale lijnen door één punt gingen:

– de *zwaartelijnen*, die hoekpunten met het midden van de overstaande zijden verbinden.

De bewijzen leken in vorm erg op elkaar: je keek naar het snijpunt van twee van de lijnen en leidde af dat het de derde door dat snijpunt gaat, of: dat het snijpunt ook op de derde lijn ligt. Hier zie je de bewijsschema's nog een keer.



Je kunt deze bewijzen ook makkelijk in de vorm brengen die we in dit hoofdstuk gebruiken; het is dan wel handig regelnummers te gebruiken. Bij de verbindingsstap verwijs je dan naar twee van de vorige regels.

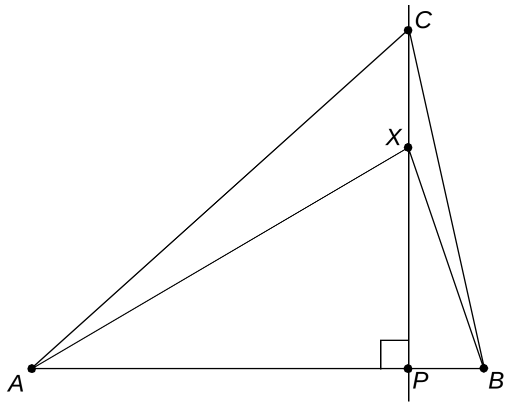
Bij de eerste twee gevallen (middelloodlijnen en deellijnen) gebruikte je een *karakteriserende eigenschap* van de punten van die lijnen. Dat wil zeggen: je gebruikte een bijzondere eigenschap die de punten op zo'n lijn wel hadden en alle andere punten niet.

7 Wat waren die karakteriserende eigenschappen in die gevallen en waar vind je die terug in het overzicht op bladzijde 6 en 7?

In deze paragraaf passen we het schema nog twee keer toe:

– één keer op de *hoogtelijnen* van de driehoek
– één keer op bijzondere cirkels bij de driehoek.

de hoogtelijnen



Om het schema te kunnen gebruiken moeten we eerste een *karakteriserende eigenschap* van de punten van de hoogtelijn bewijzen.

8 Het helpt niet veel om van de punten X alleen te zeggen:
$XP \perp AB$.
a. Waarom zet dit weinig zoden aan de dijk?

9 We bewijzen nu de volgende eigenschap van punten op de hoogtelijn uit C.

kenmerk punt op hoogtelijn

X op de hoogtelijn uit C	$\Leftrightarrow$	$\|AX\|^2 - \|BX\|^2 = \|AC\|^2 - \|BC\|^2$

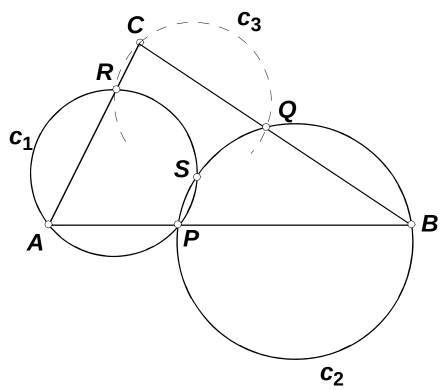
a. Toon eerst aan dat voor alle punten X op de hoogtelijn uit C geldt:
$$|AX|^2 - |BX|^2 = |AC|^2 - |BC|^2.$$
Tip: Zoek allerlei rechthoekige driehoeken.
b. Geldt deze gelijkheid ook als X *buiten* de driehoek *op* het verlengde van de hoogtelijn ligt?
c. Toon aan: als Y **niet** op de hoogtelijn ligt, geldt **ook niet**:
$$|AY|^2 - |BY|^2 = |AC|^2 - |BC|^2$$
Tip: Vergelijk de afstanden van Y tot A en B met die van een geschikt punt X op de hoogtelijn.

10 Bewijs nu dat het snijpunt H van de hoogtelijnen uit B en C óók op de hoogtelijn uit A ligt. Gebruik de bewijsstructuur die op de vorige bladzijde belicht is.

de stelling van Miquel

Bij de volgende opgave kun je hetzelfde bewijsplan gebruiken.

11 Op de zijden van driehoek ABC liggen de punten P, Q, R .
De punten A, P, R bepalen een cirkel c_1 en de punten B, Q, P bepalen een cirkel c_2.
Deze twee cirkels snijden elkaar binnen de driehoek in een punt S. De punten C, R, Q bepalen een cirkel c_3.
Bewijs dat cirkel c_3 ook door punt S gaat.
Noteer dit bewijs in de correcte vorm van hoofdstuk 1.
Tip: Zoek een karakterisering voor bijvoorbeeld de punten X op de boog RSP van cirkel c_1.
(NB.: Deze opgave komt uit het examen 1997.)



9: zijn alle driehoeken gelijkbenig?

Als het antwoord op de vraag in dit kopje ‘ja’ is, wordt de meetkunde vermoedelijk een stuk eenvoudiger!

12 Hier onder zie je een ‘bewijs’ bij het ja-antwoord op de vraag.
Aan jou de taak aan te wijzen wat de fout (fouten?) in het bewijs is.

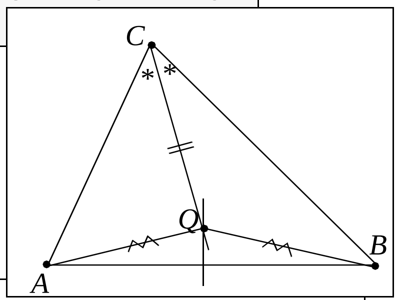
Gegeven:

Een driehoek ABC.

Te bewijzen:

$|AC| = |BC|$

Figuur bij het bewijs:



Bewijs:

Bewijsstap	motivering
1: Laat Q het snijpunt zijn van de deellijn uit C en de middelloodlijn van AB.	
2: $\lvert AQ\rvert = \lvert BQ\rvert$	Q op mll(A, B)
3: –*ACQ* = –*BCQ*	Q op deellijn uit C
4: $\lvert CQ\rvert = \lvert CQ\rvert$	
5: Dus: $\lvert AC\rvert = \lvert BC\rvert$	Driehoeken *ACQ* en *BCQ* zijn gelijk wegens 2, 3 en 4....................
6: Dus driehoek *ACB* is gelijkbenig.	

10: samenvatting bijzondere lijnen in de driehoek

Omdat we nu de van vier belangrijkste soorten bijzondere lijnen in de driehoek hebben gezien dat ze steeds door één punt gaan, vatten we dit alles samen in een stelling:

Stelling **(Bijzondere lijnen in de driehoek)**
In elke driehoek
- **gaan de *middelloodlijnen* van de drie zijden door één punt; dat is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.**
- **gaan de *deellijnen* van de drie hoeken door één punt; dat is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.**
- **gaan de drie *zwaartelijnen* door één punt; dat punt heet het *zwaartepunt* van de driehoek.**
- **gaan de drie *hoogtelijnen* door één punt; dat punt heet het *hoogtepunt* van de driehoek.**

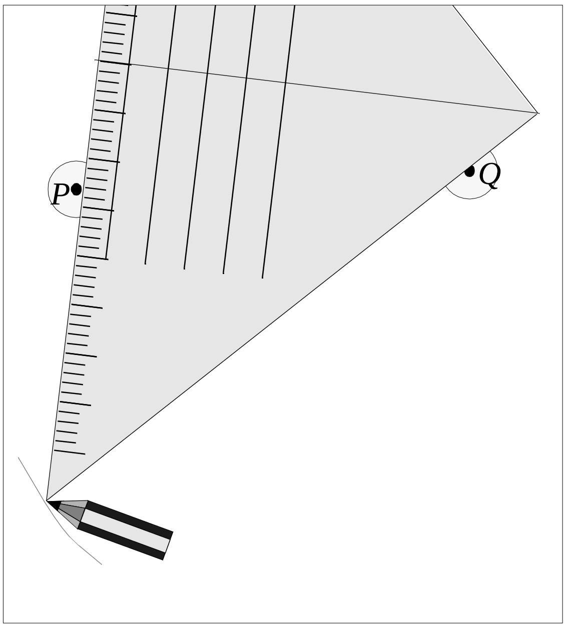
Hoofdstuk 3:
De cirkel onder de loep

In dit hoofdstuk maak je kennis met enkele stellingen over cirkels waarbij het begrip hoek van belang is. In het volgende hoofdstuk en vooral in het tweede deel van dit boekje zal blijken dat met behulp van deze stellingen zeer verschillende dingen bewezen kunnen worden.

11: tussen twee punaises

een experiment

We beginnen dit hoofdstuk met een klein experiment.



1 Prik vanaf de *achterkant* van deze bladzijde twee punaises door de punten *P* en *Q*.
Steek nu je geodriehoek er voorzichtig tussen, ongeveer zoals aangegeven. Je kunt punt *X* nog bewegen, terwijl de geodriehoek langs beide punaises glijdt.
Je laat *X* zo een *baan* beschrijven.

a. Teken die baan met potlood.

b. Doe hetzelfde met de rechte hoek van de geodriehoek en ook met een stuk karton dat je in de vorm van een scherpe hoek van ongeveer 20 graden knipt.

vermoeden

c. Je hebt nu vast wel een *vermoeden* wat de vorm van deze banen is. Noteer dat vermoeden.

2 Laten we het geval van de rechte hoek eerst onder de loep nemen. We willen het vermoeden bewijzen en volgen het stappenplan van bladzijde 20.

a. Maak een *tekening* van de situatie. Teken dus $\angle PQX$ rechthoekig.
Je weet nu: $\angle PQX = 90$. Dat mag je *gebruiken*.
Je vermoedt: *X* ligt op de cirkel met middellijn *PQ*. Dat moet je *bewijzen*.
Teken dus ook het midden van *PQ*.

b. Nu het zoeken naar een *redenering*.
Het enige gegeven is die rechte hoek; bij het zoeken naar een bewijs van het vermoeden moet je dat zeker gebruiken. Twee associaties zijn mogelijk:
- Pythagoras. Maar dat legt geen verband met het midden van *PQ*.
- Rechthoeken. Die zijn weliswaar niet te zien, maar probeer toch of je *PXQ* als helft van een rechthoek kunt zien. Van rechthoeken weten we namelijk wel het een en ander.

Noteer nu vast de nummers van stellingen uit het overzicht die je nu ván het gegeven van de rechthoek brengen náár de gewenste gelijke lengtes van lijnstukken.

c. Noteer nu een *correct bewijs* voor de volgende stelling.

Stelling 1 **(Stelling van Thales)**
Als van driehoek *ABC* hoek *C* recht is, dan ligt *C* op de cirkel met middellijn *AB*.

---

3 Het is goed om de stelling van Thales ook in lichte vermommingen te leren herkennen.
Welke van de volgende beweringen zeggen precies hetzelfde als de stelling van Thales en welke is in feite de omkering van de stelling?

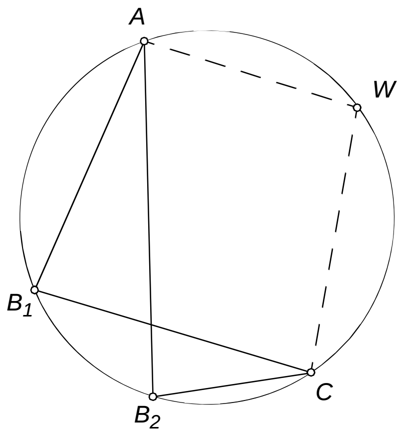
a. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde.
b. Als AB middellijn van een cirkel is, en X ligt op die cirkel, dan is $\angle AXB$ recht.
c. In een rechthoekige driehoek is de afstand van het midden van de schuine zijde tot het hoekpunt dat niet op die zijde ligt, gelijk aan de helft van de lengte van de schuine zijde.

Houd in je achterhoofd dat we die omkering eigenlijk nog moeten bewijzen!

12: de stelling van de constante hoek

Bij het experiment in de vorige paragraaf gingen we uit van een constante hoek, die van de geodriehoek of het stuk karton. Er leek een cirkel te ontstaan.
Als de constante hoek niet recht is, hebben we nog niets bewezen. We hebben alleen ons vermoeden dat cirkels een rol spelen.
Wat we nu zullen doen, is iets nieuws bewijzen over cirkels dat past bij de situatie van de constante hoek. Daarna zien we verder.

4 In deze tekening zie je twee koordenvierhoeken die gedeeltelijk samenvallen.
Beredeneer dat de hoeken bij B_1 en B_2 gelijk moeten zijn.



(Je hoeft hier geen volledig bewijs op te schrijven, alleen een verklaring te geven. Later, bij de omkering van deze stelling, schrijven we wel een volledig bewijs uit.)

Punt *W* heeft in deze figuur een aparte rol. Om op te schrijven dat de hoeken bij B_1 en B_2 gelijk zijn, is *W* overbodig, je noteert gewoon:

$$\angle AB_1C = \angle AB_2C.$$

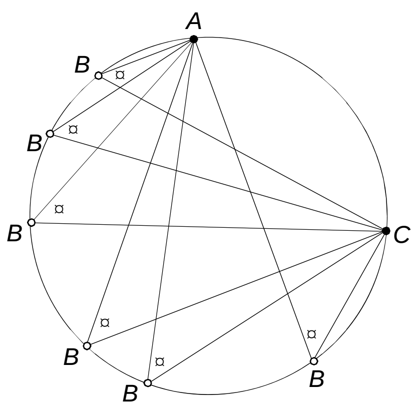
$\angle W$ is wél gebruikt om te beredeneren dát de hoeken bij B_1 en B_2 gelijk zijn. Punt *W* speelt hierbij de rol van een hulppunt, dat in het bewijs gebruikt is.

Het resultaat van opgave **4** kun je dan ook als stelling opschrijven zonder het hulppunt te noemen.

Stelling 2 **(Stelling van de constante hoek)**
Als punt *B* over een van de cirkelbogen tussen *A* en *C* beweegt, verandert de grootte van $\angle ABC$ niet.

5 In de redenering bij opgave **2** speelde ook een hulppunt *Y* een rol. Driehoek *PXQ* werd erdoor aangevuld tot een rechthoek. Bij opgave **4** hadden we hulppunt *W* nodig. Toch zijn er verschillen. Welke?

De grootte van $\angle ABC$ hangt blijkbaar alleen af van de onderlinge ligging van *A* en *C* op de cirkel en niet van de plaats van *B*. De figuur laat precies zien wat er in de stelling staat: *B* kan overal op de aangegeven boog gekozen worden, voor $\angle ABC$ maakt dat niets uit.



6 **a.** Kun je met deze stelling het ontstaan van de cirkelboog bij opgave **1** *verklaren*?
b. Maar is echt *bewezen* dat de getekende baan een stuk cirkel is? Waarom wel of waarom niet?

13: de omkeringen

We hebben behoefte aan de omkering van zowel de stelling van Thales als de stelling van de constante hoek. Eerst de omkering van Thales. Die is al geformuleerd:

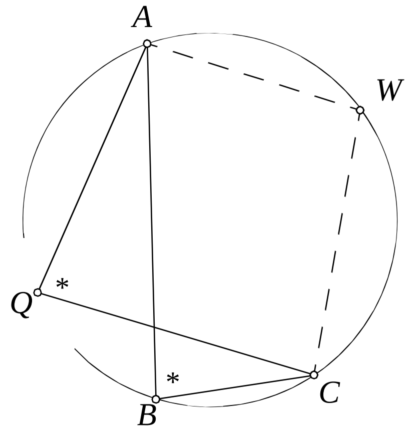
Stelling 3 **(Omkering van de stelling van Thales)**
Als *AC* middellijn van een cirkel is, en *B* ligt op die cirkel, dan is $\angle ABC$ recht.

7 Dit gaan we op twee manieren bewijzen. Wees bij één van de bewijzen volledig, beperk je bij de ander tot een korte redeneerschets. Maak in beide gevallen een tekening.
De bewijsideeën zijn:
a. Driehoek *ABC* aanvullen tot een parallellogram *ABCD* en gebruikmaken van nummer 10 van het overzicht.
b. Gebruikmaken van de al bewezen stelling van de constante hoek. Kies daartoe een handig punt *P* op de boog *ABC*, waarvan je gemakkelijk kunt bewijzen dat $\angle APC$ recht is.

Nu de omkering van de stelling van de constante hoek. Hier is iets hinderlijks aan de hand, dat bij Thales niet optreedt. Bij Thales mag je punt *B* op de hele cirkel met middellijn *AC* leggen, steeds is dan $\angle ABC$ recht. Bij de andere stelling moest het beweeglijke punt op één van de bogen van de cirkel liggen. Daarom eist de omkering van de stelling van de constante hoek wat meer zorg.

Stelling 4 **(Omkering van de constante hoek-stelling)**
Als punt *Q* aan dezelfde kant van *AC* ligt als punt *B* en $\angle AQC = \angle ABC$, dan ligt *Q* op de cirkelboog *ABC*.

Voor het bewijs maken we gebruik van een figuur die als twee druppels water lijkt op die bij opgave 4. Maar in deze figuur is aangegeven:
– $\angle AQC = \angle ABC$
– dat je *niet* mag gebruiken dat *Q* op de cirkel door *A*, *B* en *C* ligt, want dat moet je nu net bewijzen.

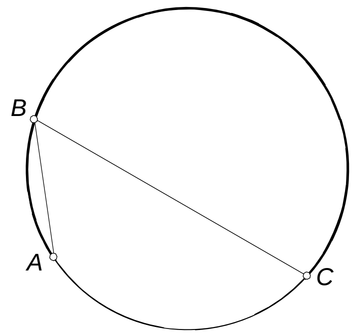


8 Bewijs stelling 4. Laat je inspireren door opgave **4**, maar *gebruik* niet dat *A***Q***CW* een koordenvierhoek is; *bewijs* dat juist door daartoe geschikte stellingen aan te roepen. Je kunt natuurlijk wèl gebruiken dat *A***B***CW* een koordenvierhoek is.
Schrijf dit bewijs volledig op.

9 Een laatste blik op het experiment van het begin van de vorige paragraaf. Met welke stelling(en) kun je verklaren:
a. dat punt *X* over een vaste cirkelboog beweegt.
b. dat het middelpunt van die cirkel op *PQ* ligt als hoek *PXQ* recht is. (De cirkel is daar dus al aanwezig.)

14: de grootte van de hoek

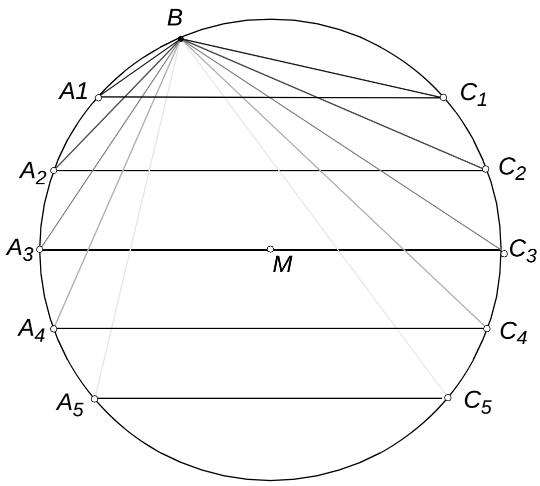
Al het voorgaande van dit hoofdstuk kun je zo samenvatten:
Als in de figuur hiernaast *A* en *C* vaste punten zijn, dan is de grootte van ∠*ABC* volledig bepaald, *B* mag overal op de aangegeven boog liggen, die hoek is steeds dezelfde.
Als bovendien gegeven is dat *AC* een middellijn van de cirkel is, dan is de grootte van de hoek bij *B* bekend: 90 (in deze tekening is dat natuurlijk niet zo).



Voor de hand ligt de vraag:

Hoe hangt ∠ABC van de ligging van A en C af?

Aan de hand van de volgende figuur onderzoeken we dat verband eerst heel globaal.
In de figuur is *B* een vast punt op de cirkel. Er zijn verschillende koorden *AC* getekend. Deze koorden worden vanuit *B* onder verschillende hoeken 'gezien'.
Je ziet dat ∠*ABC* steeds kleiner wordt naarmate de koorde verder van *B* af ligt. Daarbij wordt de boog waarop *B* ligt steeds langer, maar dat geldt niet voor de koorden *AC* zelf!
Er kan dus geen eenvoudig verband bestaan tussen de grootte van ∠*ABC* en de lengte van de koorde *AC* of de afstand van *B* tot die koorde.



10 Kijk nu naar de bogen *AC* die *tegenover* punt *B* liggen.

a. Als *AC* daalt, wijzigen zich zowel de boog onder *AC* als de hoek vanuit *B*. Omschrijf het verband tussen die wijzigingen globaal. Dat wil zeggen in de vorm: *als de hoek groter wordt, dan wordt de boog* .....

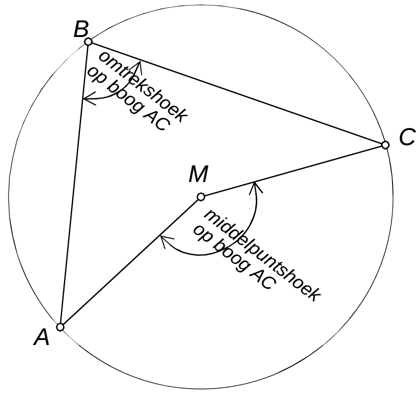
b. Als je de figuur vergroot onder een kopieerapparaat, dan blijven de hoeken bij *B* wel allemaal hetzelfde, maar de bogen worden langer. Geldt dat ook voor de hoeken waaronder je koorde *AC* 'ziet' vanuit punt *M?* Teken desnoods een paar van die hoeken.

De lengte van de cirkelbogen *AC* (onder de koorde in onze figuur) kan goed gekoppeld worden aan de hoek *AMC*. Dat is de hoek waaronder je die boog vanuit het middelpunt van de cirkel ziet.
We voeren nu eerst twee nieuwe termen in: *omtrekshoek* en *middelpuntshoek*, die we even definiëren. Het zijn precies de hoeken waar ons onderzoek toe leidde.

definities omtrekshoek en middelpunts-hoek

> **Als *A*, *B* en *C* op een cirkel liggen met middelpunt *M*, dan heet**
> **–*ABC* een *omtrekshoek* op boog *AC***
> **en**
> **–*AMC* een *middelpuntshoek* op boog *AC*.**
> **Bedoeld worden de boog *AC* waar *B niet* op ligt en de hoek *AMC* waar *B* niet *in* ligt.**

Ten overvloede een figuur hierbij.
Een middelpuntshoek kàn groter dan 180 zijn. Dat is bijvoorbeeld op de vorige bladzijde bij koorde A_2C_2 het geval.



11 a. Hoeveel verschillende omtrekshoeken kun je bij gegeven *A* en *C* vinden? Wat weet je inmiddels van de grootte van de hoeken?
(Let op het onderscheid tussen de hoek als figuur en de grootte van een hoek!)
b. Hoeveel verschillende middelpuntshoeken horen bij *AC*?

Globaal zien we nu dit: hoe groter omtrekshoek –*ABC*, hoe groter ook middelpuntshoek –*AMC*.
Maar wat is nu het exacte verband tussen die twee hoeken? Om zo'n verband op het spoor te komen, kun je een speciale strategie gebruiken

strategie

> **Als je een nog onbekend algemeen verband moet zoeken, kan het onderzoeken van *bijzondere gevallen* je op een idee brengen.**

12 We passen de *bijzondere gevallen strategie* onmiddellijk toe.
a. Teken zelf drie cirkels en onderzoek de volgende situaties:
1. *AC* is middellijn van de cirkel.
2. *AB* is een middellijn en *AC* = *CB*.
3. Driehoek *ACB* is gelijkzijdig.
In deze gevallen kun je zowel –*AMC* als – *ABC* gemakkelijk bepalen.
Welke relatie geldt in de drie gevallen tussen die twee hoeken?
b. Geeft de *bijzondere gevallen strategie* een bewijs?

bewijs als kroon op het werk

We hebben nu een duidelijk vermoeden over de samenhang tussen de omtrekshoek en de middelpuntshoek. Nu rest nog de afronding: het bewijs dat dit vermoeden algemeen juist is. Als dat bewijs gegeven is, hebben we de hoofdstelling van dit hoofdstuk te pakken.

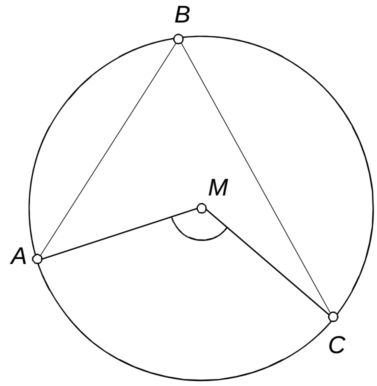
een idee voor het bewijs

De volgende overweging bevat het 'zoeken naar het bewijs'.
We weten al dat de precieze ligging van *B* op de boog *ABC* er niet toe doet; in het bewijs kunnen we daar gebruik van maken door een *bijzondere* ligging van punt *B* te kiezen. Daarbij laten we ons inspireren door situatie 2 van opgave **12**, daar is *AB* een middellijn van de cirkel. Er ontstaat dan een bijzondere figuur, die waarschijnlijk eenvoudiger is dan het algemene geval.

de details van de redenering vinden

In de volgende twee opgaven worden de details van het bewijs in kaart gebracht.

13 Teken in de figuur hiernaast nóg een punt *B*’ op de cirkel, maar zo dat *A* en *B*’ één middellijn vormen.
Teken de bijbehorende omtrekshoek op *AC*.
- **a.** Waarom geldt $\angle ABC = \angle AB'C$?
- **b.** Driehoek *B’MC* is van een bijzonder type. Maak daarvan gebruik om via $\angle B'MC$ een verband tussen $\angle AMC$ en $\angle AB'C$ te leggen.

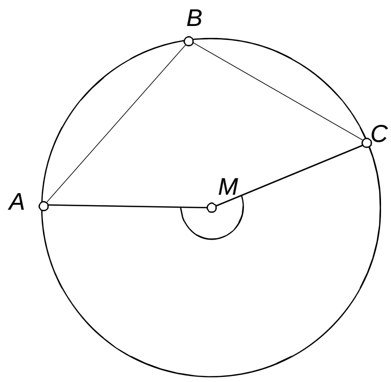


Voor de situatie in de figuur is dus het bereikte resultaat: *$\angle ABC$ is de helft van $\angle AMC$.*

let op! gevalsonderscheiding

Voordat we dit resultaat in de vorm van een stelling vastleggen, moeten we eerst onderzoeken of de onderzochte situatie representatief is voor alle gevallen.
Als de middelpuntshoek groter dan 180 is, gaat er iets mis.

14 Hiernaast is een nieuwe figuur getekend.
- **a.** Wat is het essentiële verschil tussen deze situatie en de vorige?
- **b.** Laat nu *D* een punt zijn op de boog tegenover *B*. Op punt *D* en de bovenboog *AC* kan het resultaat van de vorige opgave wél toegepast worden. Waarom?
- **c.** Hoe leidt je nu af dat ook in dit geval $\angle ABC$ gelijk is aan de helft van de getekende hoek $\angle AMC$?
- **d.** Zijn nu alle principieel verschillende situaties onderzocht?



We hebben nu de details van het bewijs, dat de omtrekshoek de helft van de middelpuntshoek is, te pakken. Nu de te bewijzen stelling.

Stelling 5 **(Stelling van de omtrekshoek)**
Als drie (verschillende) punten *A*, *B*, *C* op de cirkel met middelpunt *M* liggen, dan geldt: de omtrekshoek $\angle ABC$ is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek $\angle AMC$.

---

het bewijs zelf

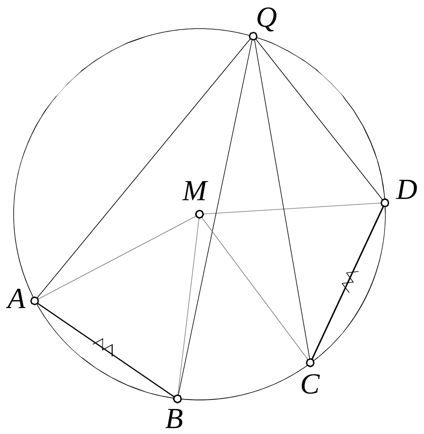
De afronding: een correct genoteerd bewijs. Omdat deze stelling een sleutelrol vervult, doen we dat hier wel.

15 Noteer nu tot slot het bewijs van deze stelling in de vorm van bladzijde 21. In je bewijs moet je dus gevalsonderscheiding toepassen, zoals dat in feite in opgave **14** is voorbereid.

15: deellijn en raaklijn

gelijke boog, gelijke hoek

In deze paragraaf bekijken we enkele bijzondere posities van punten op de cirkel.



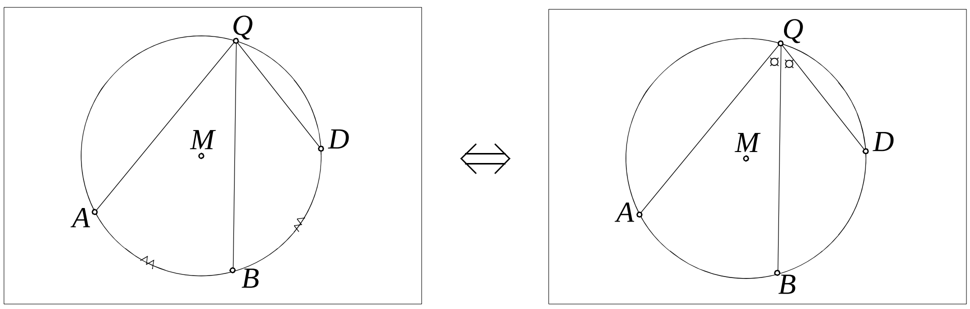
16 In de figuur hiernaast zijn de koorden AB en CD evenlang; dat is met tekentjes aangegeven.

- **a.** Geef nu aan welke middelpuntshoeken ook gelijk moeten zijn.
- **b.** Verklaar nu waarom de hoeken $\angle AQB$ en $\angle CQD$ gelijk moeten zijn.
- **c.** Noteer wat hier bewezen is, kort en krachtig in een met *als-dan* geformuleerde stelling.
- **d.** Formuleer en bewijs volledig de omkering van die stelling. Dan is dus gegeven dat de hoeken bij Q gelijk zijn en moet bewezen worden dat de koorden AB en CD gelijk zijn.
- **e.** Bij Q zijn nog twee gelijke hoeken te vinden. Welke?

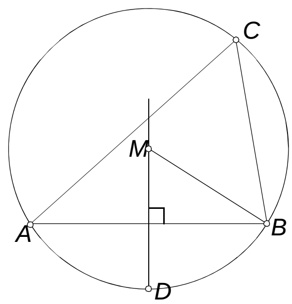
(De stelling en zijn omkering die je bij **16 c** en **d** hebt geformuleerd is - misschien in andere woorden - als één geheel in de samenvatting op bladzijde 45 opgenomen.)

een toepassing op deellijn en middelloodlijn

Een bijzondere situatie treedt op als B en C in bovenstaande figuur gaan samenvallen. Dan wordt boog AD door C (of B) in twee gelijke delen verdeeld. In beeldtaal kan die situatie zó worden aangegeven.



Beide richtingen ken je van 16 c en d.
Hier volgt nog een toepassing van een gehalveerde boog.

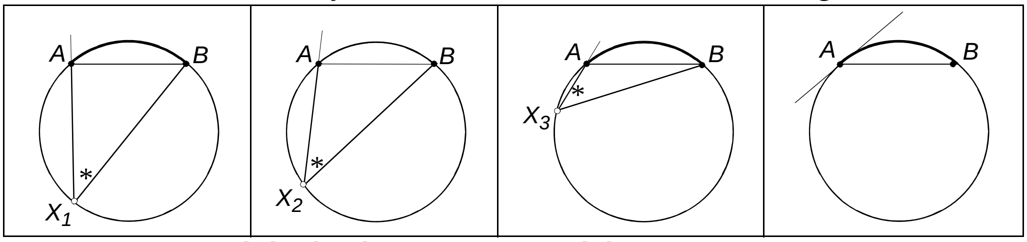


17 In deze figuur is de middelloodlijn van AB getekend, die de omgeschreven cirkel in D snijdt. M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
Toon aan: $\angle DMB = \angle ACB$.

18 Op bladzijde 32 stond een driehoek waarbij het snijpunt van de deellijn uit C en de middelloodlijn van AB elkaar binnen de driehoek leken te snijden. Nu weet je dat dit niet zo kan zijn. Waar ligt dat snijpunt wél?

een stelling over de raaklijn

19 In onderstaande film zie je steeds dezelfde cirkels en dezelfde boog AB.



a. Waarom zijn de hoeken bij X_1, X_2 en X_3 gelijk?
b. Waar is deze hoek in de laatste figuur te vinden?

Zo stuiten we op een (nog te bewijzen) stelling:

Stelling 6 **(Hoek tussen raaklijn en koorde)**
Gegeven een cirkel met punten A en B erop.
Dan is de hoek tussen de raaklijn in *A* en de koorde *AB* gelijk aan de halve middelpuntshoek op boog *AB*.
Hierbij moet de hoek aan dezelfde kant als de boog *AB* gekozen worden.

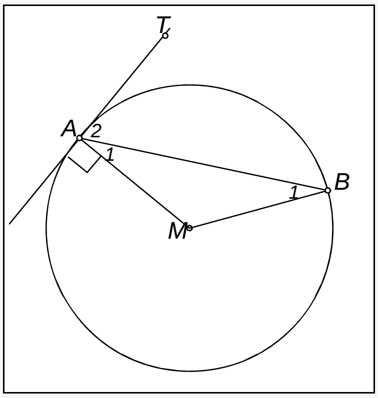
In opgave **19** is dat als het ware toegelicht door de raaklijn te zien als de limietstand van de bewegende koorde XA. Omdat $\angle AXB$ steeds de helft is van de middelpuntshoek op AB, is de limiethoek – dus tussen raaklijn en koorde – dat ook.

20 Van de raaklijn in een punt aan de cirkel weten we ook dat hij loodrecht staat op de straal naar dat punt. Met behulp daarvan kan een helder bewijs van de stelling gegeven worden zonder limietovergangen. Hier is een begin van dat bewijs. Voltooi het.

Gegeven:

een cirkel met middelpunt M;
A en B op de cirkel;
T ligt op de raaklijn in A;
T en M aan weerszijden van AB.

Figuur:



Te bewijzen:

$\angle TAB = \frac{1}{2}\angle AMB$

Bewijs:

Bewijsstap	**motivering**
$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle AMB = 180$	*som hoeken driehoek ABM .*
$\angle A_1 = \angle B_1$	*ABM is gelijkbenig.*
Dus $\angle A_1 = ...$	*Omwerken.*
......	.....

16: iso-hoek-lijnen

De hoofdopgave van deze paragraaf is:

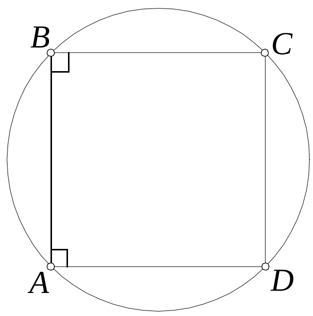
> *Gegeven is een lijnstuk AB en een vaste hoek γ. Teken nu precies de verzameling van de punten X, waarvoor geldt $\angle AXB = \gamma$*

Je zou in analogie met de iso-afstands-lijnen kunnen zeggen:

> *Bepaal de **iso-hoek** γ-**lijn** van lijnstuk AB.*

Als $\gamma = 90^\circ$, is het gemakkelijk: bepaal het midden *M* van *AB* en teken de cirkel om *M* die door *A* en *B* gaat.
In andere gevallen moet eerst één punt *X* bepaald worden. Dan kan het middelpunt van de omgeschreven cirkel van *AXB* gevonden worden, en dan zijn we klaar. De constante hoekstelling vertelt nu dat boog *AXB* voldoet. Aan de andere zijde van *AB* ligt nog zo'n boog; samen vormen de bogen de *iso-hoek-lijn*.
De vraag is: hoe vinden we zo'n punt *X*?

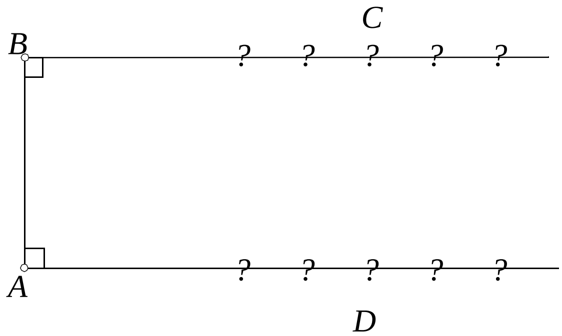
21 We nemen eerst eens $\gamma = 45^\circ$.



a. Laat zien dat de *X* moet liggen op de omgeschreven cirkel van een vierkant waarvan *AB* een zijde is.

b. Nu kan makkelijk aangegeven worden hoe zo'n *X* gevonden kan worden.
X mag punt *C* zijn. Vandaar:
Stap één is: teken een lijn loodrecht op *AB* door *B*. Wat is stap twee?

22 In het algemene geval, dus met een andere hoek γ kunnen we nog wel de lijnen *BC* en *AD* goed gebruiken, maar *ABCD* zal nu geen vierkant meer zijn.



a. Wat wordt *ABCD* wel voor soort figuur?

Neem voor de constructie in deze opgave een hoek γ tussen 0° en 90° naar eigen keuze.

b. Punt *C* moet nog bepaald worden, dus vanuit C kunnen we nog niet werken.
Maar $\angle CAD$ ken je wél. Hoezo?

c. Nu kun je dus *AC* ook trekken.
Maak de constructie af door nu het middelpunt van de omgeschreven cirkel van *ACB* te bepalen. Vergeet niet: dit is een bijzondere driehoek.

17: samenvatting en gevarieerde oefenopgaven

Om te beginnen een lijstje van de tot nu toe bewezen stellingen. Die vormen de basis voor de zo dadelijk volgende opgaven. In latere hoofdstukken bewijzen we diverse gevolgen van deze stellingen. Daar is het wat lastiger de bewijzen te vinden dan wat je bij de volgende opgaven nodig hebt. Vandaar: *oefenopgaven*.

stellingenoverzicht

1: (Stelling van Thales)
Als van driehoek *ABC* hoek *B* recht is, dan ligt *B* op de cirkel met middellijn *AC*.

2: (Omkering van de stelling van Thales)
Als *AC* middellijn van een cirkel is, en *B* ligt op die cirkel, dan is $\angle ABC$ recht.

3: (Stelling van de constante hoek)
Als punt *B* over een van de cirkelbogen tussen *A* en *C* beweegt, verandert de grootte van $\angle ABC$ niet.

4: (Omkering van de constante hoek-stelling)
Als punt *Q* aan dezelfde kant van *AC* ligt als punt *B* en $\angle AQC = \angle ABC$, dan ligt *Q* op de cirkelboog *ABC*.

5: (Stelling van de omtrekshoek)
Als drie (verschillende) punten *A*, *B*, *C* op de cirkel met middelpunt *M* liggen, dan geldt: de omtrekshoek $\angle ABC$ is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek $\angle AMC$.

6: (Hoek tussen raaklijn en koorde)
Gegeven een cirkel met punten *A* en *B* erop.
Dan is de hoek tussen de raaklijn in *A* en de koorde *AB* gelijk aan de halve middelpuntshoek op boog *AB*.
Hierbij moet de hoek aan dezelfde kant als de koorde gekozen worden.

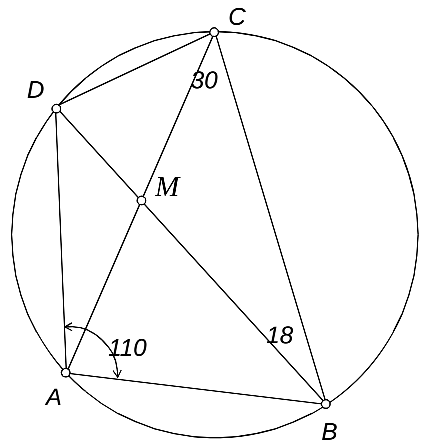
7: (Stelling van de gelijke bogen)
Bij gelijke bogen op een cirkel horen gelijke omtrekshoeken en andersom.

oefenopgaven

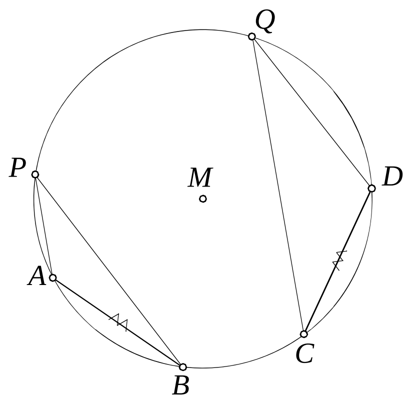
Het gaat om oefenen met wat in dit hoofdstuk is onderzocht. Alleen als dat expliciet gevraagd wordt, moet je een volledig bewijs noteren. In de andere gevallen staat er ‘toon aan’ of ‘verklaar’ of ‘bereken’. Bij ‘toon aan’ moet je wel de gebruikte stellingen vermelden.

23 Bepaal alle nog niet aangegeven hoeken in deze figuur (het hoeft niet in deze volgorde!):

a. $\angle DAC$
b. $\angle CDB$
c. $\angle DCA$
d. $\angle ABC$
e. $\angle ABD$
f. $\angle DAC$
g. $\angle AMB$



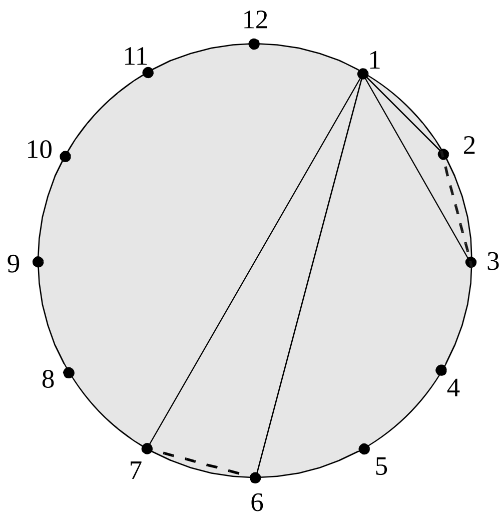
24 In de figuur hiernaast zijn de koorden AB en CD even lang; dat is met tekentjes aangegeven.
Toon aan $\angle CQD = \angle APB$.



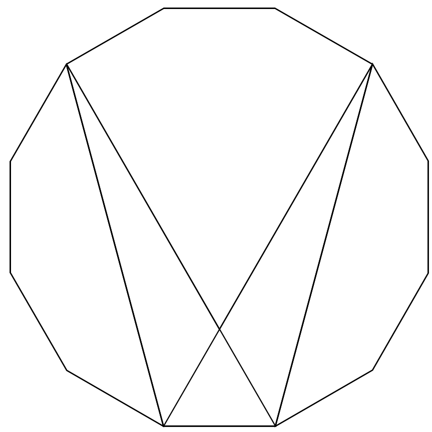
25 a. Stel je voor: je staat op de (grote) wijzerplaat hiernaast bij de 1. Je kijkt naar de andere cijfers.
Welke hoek zal groter zijn: de hoek waaronder je het lijnstukje ziet dat de 2 en 3 verbindt of de hoek waaronder je het lijnstukje ziet dat de 6 en 7 verbindt?

b. Bereken die twee hoeken met behulp van een van de stellingen.

c. Je kunt ook de 5 en de 7 met een lijnstukje verbinden. Is de hoek waaronder je dit lijnstuk vanuit de 1 ziet, twee keer zo groot als de bij **b** berekende hoek?



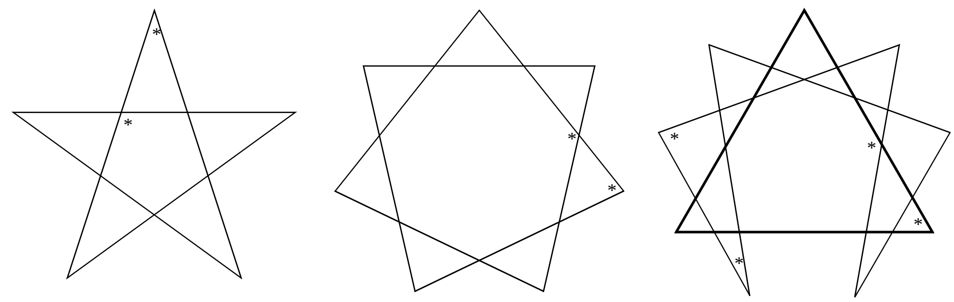
26 In deze figuur is een regelmatige twaalfhoek in zes delen verdeeld.



a. Bereken *alle* hoeken van de zes onderdelen.

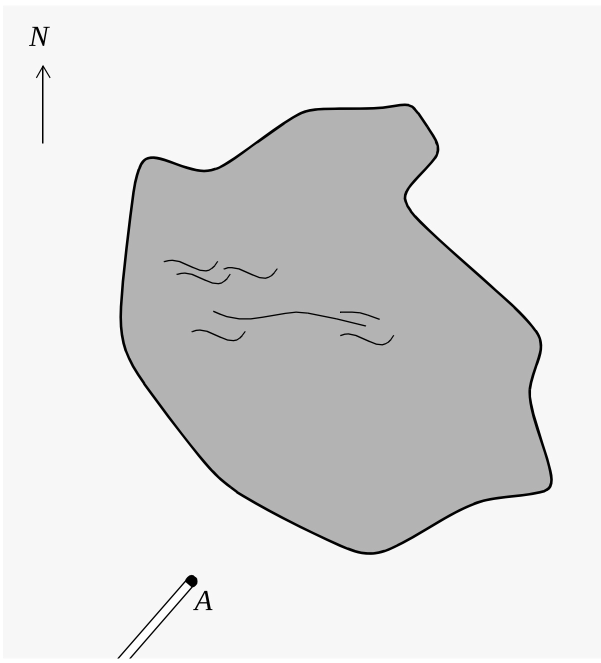
b. Knip de stukken uit het werkblad op bladzijde 63 en leg er een vierkant van. Gebruik daarvoor het vel achterin.
Tip: Probeer in ieder geval hoeken van 90 te maken.
Toon aan dat alle aan elkaar gelegde hoeken en zijden exact passend zijn.

27 Onderstaande figuren spelen in sommige takken van de *magie* een grote rol. Ze zijn gebaseerd op respectievelijk de regelmatige vijfhoek, zevenhoek en negenhoek. Bereken de met sterretjes aangegeven hoeken.

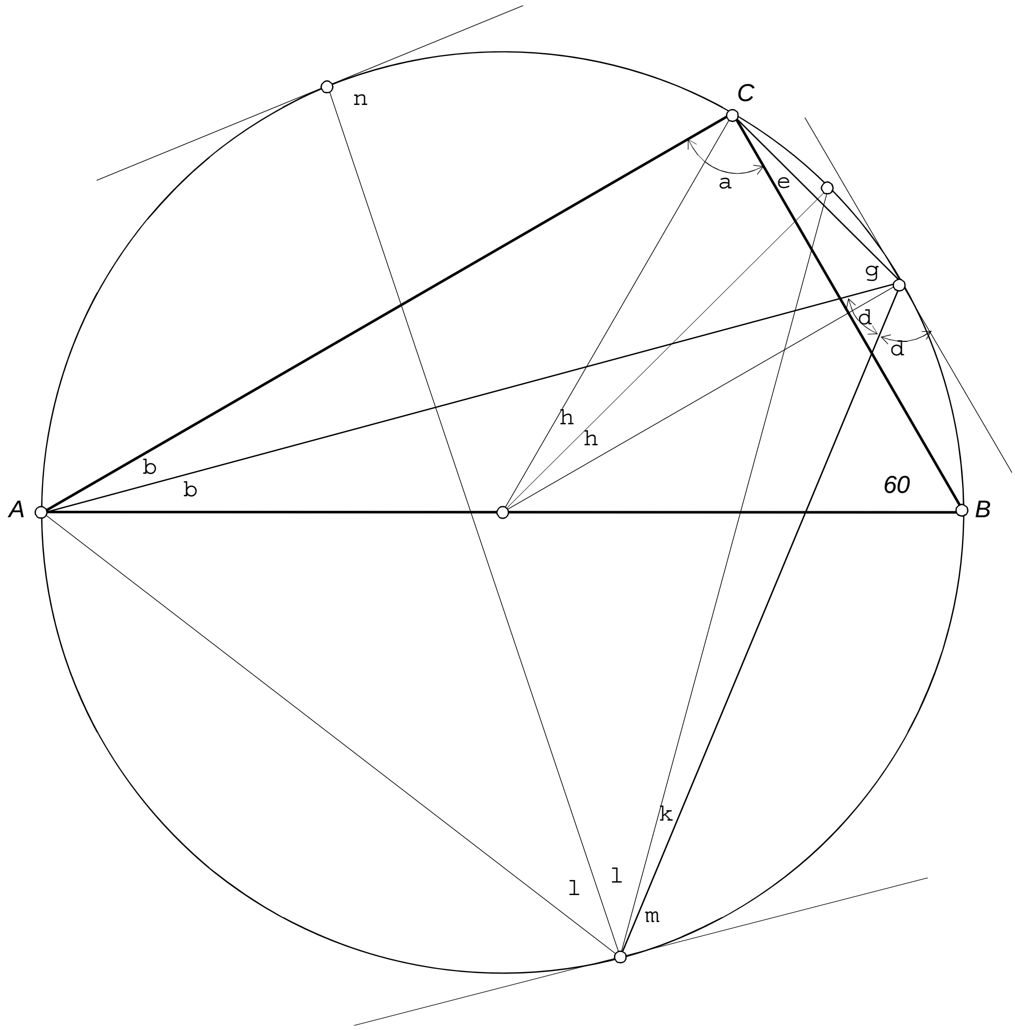


pentagram *heptagram* *enneagram*

28 Een landmeter moet rondom een meertje een cirkelvormig pad uitzetten.
Het middelpunt van de cirkel is voor hem onbereikbaar. Het pad moet bij punt A beginnen en daar terugkeren.
De landmeter beschikt over een instrument waarmee hij hoeken in het veld kan meten.
De landmeter begint met de klus door een jalon (zo'n goed zichtbare rood-witte paal) in punt A te plaatsen.
Waar zou hij een tweede jalon plaatsen en hoe zou hij (in zijn eentje) de klus verder klaren?

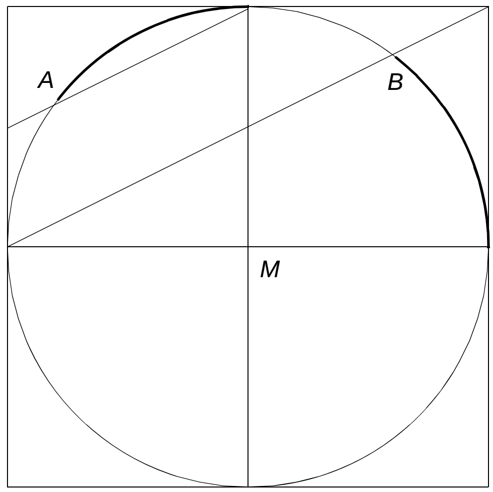


29 Gegeven is de driehoek *ABC* met rechte hoek bij *C*; $\angle B = 60$.
Bepaal achtereenvolgens alle met Griekse letters aangegeven hoeken in deze figuur.
(Gelijke letters betekent gelijke hoeken, zo herken je enkele deellijnen. Als raken gesuggereerd wordt in de figuur, dan is dat zo ook bedoeld.)

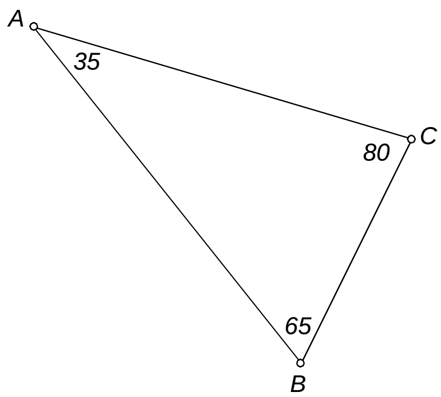


a =	b =	g=	d=	e=
h =	k =	l =	m =	n =

30 Een vierkant, rakend om een cirkel.
Gegeven is dat de schuine lijnen evenwijdig zijn.
Beredeneer dat de dik getekende bogen even groot zijn en dat –*AMB* recht is.



31 Gegeven een driehoek *ABC* met hoeken van 35 , 65 en 80 .



a. Teken de omgeschreven cirkel en de raaklijnen aan die cirkel in de drie hoekpunten. Die lijnen sluiten een driehoek *PQR* in.
Wat zijn daarvan de hoeken?

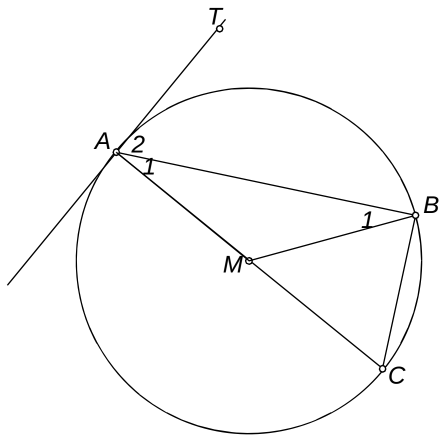
b. Teken ook de deellijnen van de hoeken *A*, *B* en *C*. Deze snijden de omgeschreven cirkel in *D*, *E* en *F*. Bepaal de hoeken van de driehoek *DEF* en van de zeshoek *AFBDCE*.

c. Teken ook de raaklijnen aan de cirkel in de punten *D*, *E* en *F*. Ook die vormen een driehoek, zeg *KLM*. Bepaal ook daar de hoeken van. Je *kunt* dit doen op de manier waarop je bij vraag **a** hebt gewerkt.

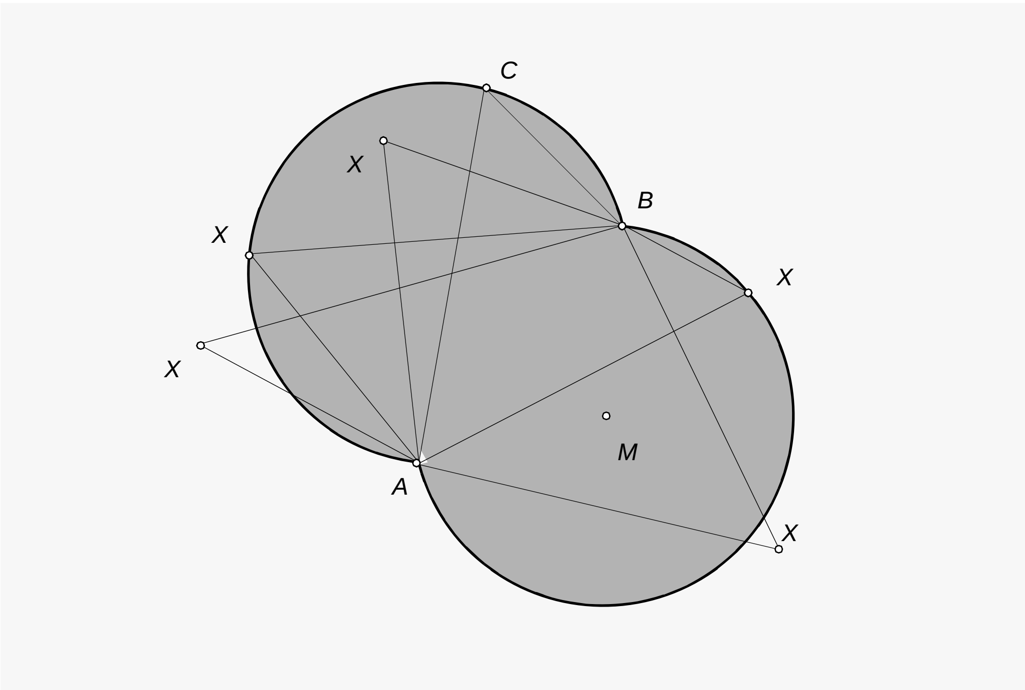
d. Nu je de hoeken van *KLM* kent, zie je dat die op een veel gemakkelijker manier bepaald kunnen worden. Hoe?

e. De driehoeken *PQR* en *KLM* sluiten een zeshoek in.
Bepaal de hoeken van die zeshoek.

32 Geef nog een derde bewijs van stelling 6, waarin het basisidee is: Thales toepassen in nevenstaande figuur. Werk dit bewijs geheel uit.



33 We hebben tot nu toe alleen naar punten *X* en *C* óp de cirkel gekeken. Als die punten niet op de cirkel liggen, gelden ongelijkheden. Breng het geheel zelf in kaart aan de hand van de onderstaande figuur.



Karakteriseer dus de drie gebieden (lichtgrijs, donkergrijs, zwarte lijn) met gelijkheden of ongelijkheden tussen diverse hoeken.

Hoofdstuk 4:
Standbeelden en cirkelnetten

18: zien onder de grootste hoek

inleiding: Marx en Liberty

Op de foto hieronder zie je het standbeeld van Karl Marx in Chemnitz, Oost-Duitsland. Deze kop van Marx is behoorlijk groot, vergelijk maar met de mensen die erbij staan.

Karl Marx in Chemnitz, Duitsland; (voorheen Chemnitz, vanaf 1948 Karl Marxistadt,, nu weer Chemnitz)

Op het gebouw zie je de beroemdste oproep van Karl Marx in vele talen. Links naast Marx is de Nederlandse variant te zien: '*Proletariërs aller landen van de wereld, verenigt U*'.
Vroeger hadden alle belangrijke plaatsen in het Oostblok hun eigen standbeeld van Marx of Lenin. Na de Val van de Muur in 1991 in Oost-Duitsland en het verdwijnen van het communistisch systeem in de meeste Oostbloklanden zijn veel van deze standbeelden opgeruimd. Soms door woedende volksmenigten, soms in opdracht van de nieuwe machtshebbers.
Nu kun je zulke standbeelden in West Europa aantreffen bij verzamelaars.

We beginnen deze paragraaf met een probleem dat de sfeer van het Oostblok ademt:

waar moet je gaan staan, zodat de kop van Marx zo groot mogelijk lijkt?

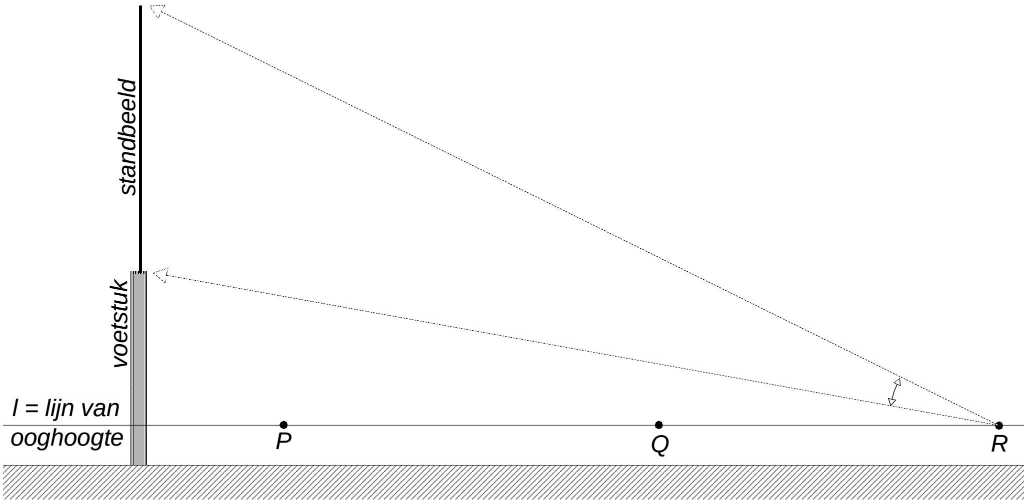
Voor de broodnodige nuancering passen we de oplossing ook toe op het Vrijheidsbeeld in New York.
Het slot van het hoofdstuk behandelt een puur wiskundig probleem, dat mooi bij Marx, Liberty en andere standbeelden aansluit: een netwerk van cirkels met bijzondere eigenschappen.

een verkenning van het probleem

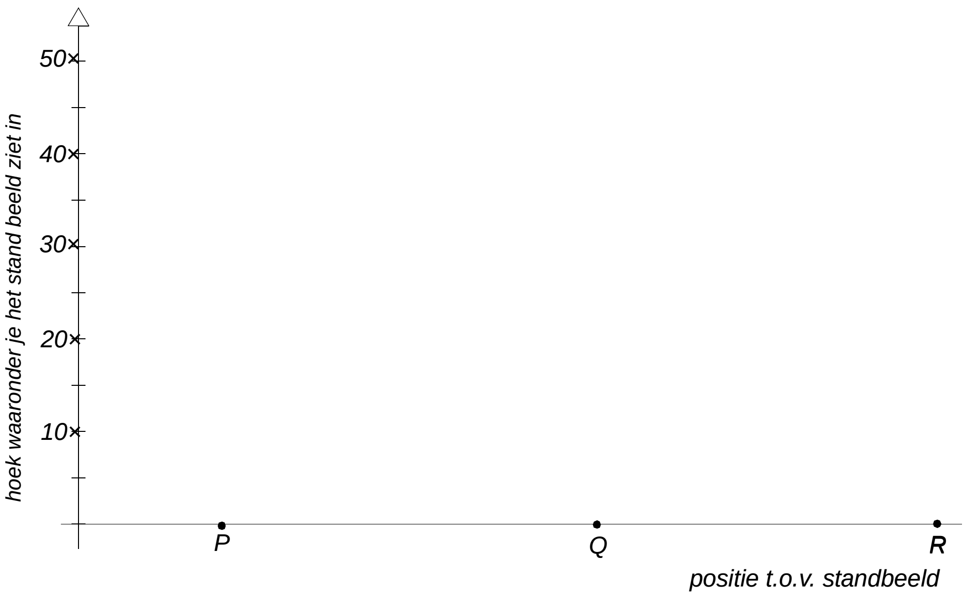
We stileren het standbeeld – of het gezicht van Marx – met een verticaal lijnstuk.
Als je ver van zulke 'standpeelden' afstaat zie je ze onder een kleinere hoek. Maar ook als je er pal onder staat zie je niet veel!

1 Het gaat om de hoek die de lijnen vanuit je oog naar top en voet van het standbeeld- maken .

a. Meet in onderstaande gestileerde voorstelling die hoek waaronder je het standbeeld ziet als je oog zich bij *P*, *Q* of *R* bevindt. Dat zijn drie punten die zich op ooghoogte bevinden.



b. Schets een grafiek van deze hoek, uitgezet tegen de afstand tot de voet van het standbeeld.

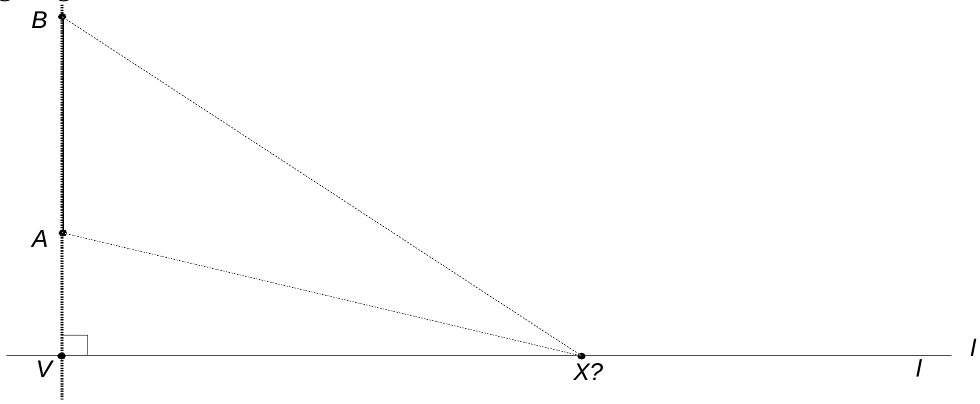


c. Ergens op de lijn l ligt het punt waarbij de de hoek maximaal is. Markeer dat punt met de letter *X*.

de maximale kijkhoek

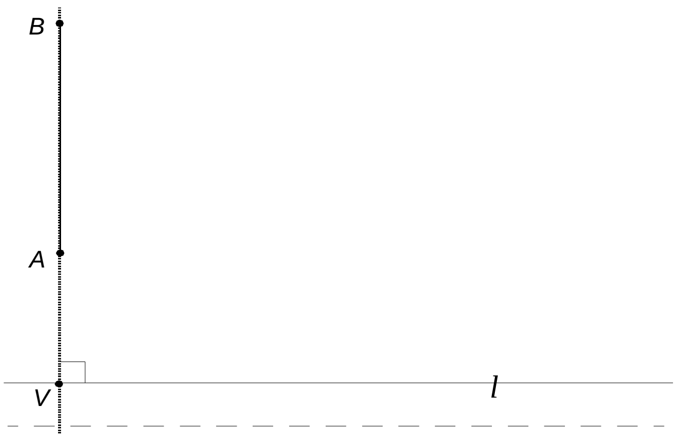
We gaan nu exact bepalen waar het punt X dat bij de maximale kijkhoek hoort, moet liggen. Daarna is het bepalen van de grootte van de hoek niet moeilijk meer.

Zie de figuur, waarin AB het oorspronkelijke standbeeld voorstelt en X ligt op de lijn van ooghoogte.



2 We gaan dit probleem op een speciale manier oplossen, die gebruikmaakt van de *iso-hoek-lijnen* van bladzijde 44.
Je maakt daarbij X als het ware tijdelijk los van de getekende lijn en kijkt naar *alle* X bij een vooraf gegeven hoek. Daarna zoek je wat er gebeurt als je die hoek zo groot mogelijk neemt.
Gewoon proberen of dit plan werkt:
a. Geef in bovenstaande tekening *alle* punten aan van waarvuit je AB onder 60 ziet.
b. Doe dit ook voor 45 en 30 en 10 .
c. Je weet dat deze figuren cirkelbogen zijn. Waar liggen de middelpunten M_{60}, M_{45}, M_{30} en M_{10} van de bijhorende cirkels, en ook de andere mogelijke middelpunten bij nog andere hoeken?

3 De figuren die ontstaan zijn, zijn stukken van cirkels.
a. Wat is hier het verband tussen de grootte van de hoek zelf en de grootte van de bijhorende cirkel? Druk dit uit in formuleringen als: '*... is kleiner/groter als .... kleiner/groter...*'
b. Het te zoeken punt X op lijn l ligt ook op zo'n cirkelboog. Hoe zou je die cirkel beschrijven? Wat is de rol van de ooghoogtelijn l voor *deze* iso-hoeklijn?
c. De straal van die cirkel kun je nu bepalen!
Construeer met behulp van de passer in de figuur hieronder nauwkeurig het middelpunt M van die cirkel en ook het punt X waarin de maximale kijkhoek wordt aangenomen.



4 In de figuur is V het snijpunt van l en het verlengde van AB De hoek tussen l en de lijn VA is recht.
Het middelpunt van de bij het maximum horende cirkel noemen we M. M ligt op de middelloodlijn van AB; T is het midden van AB.
X is het raakpunt van deze cirkel met l. De straal van de cirkel is r.

a. Voeg al deze zaken aan je tekening toe.

b. Druk de straal r van de cirkel in $|VA|$ en $|VB|$ uit.

c. Het punt X kan precies bepaald worden.Toon door berekening in geschikt gekozen rechthoekige driehoeken aan dat:

$$|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|.$$

d. De maximale grootte φ van de kijkhoek, dus van $\angle AXB$, moet ook bepaald kunnen worden. Je zou daartoe $\angle AXV$ en $\angle BXV$ apart kunnen bepalen, maar je kunt beter gebruikmaken van het 'makkelijker' punt M.
Toon aan dat voor de maximale hoek geldt:

$$\sin\varphi = \frac{|VB| - |VA|}{|VA| + |VB|}$$

oversteek naar het vrijheidsbeeld

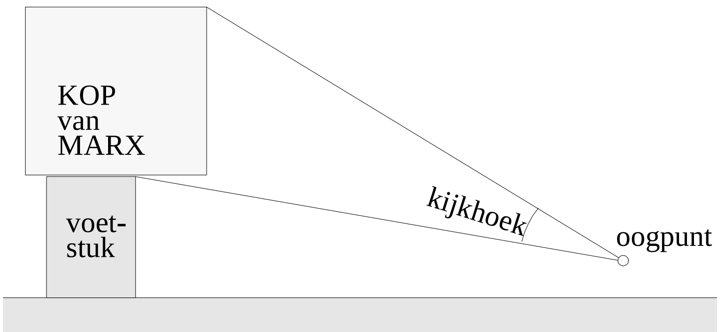
Het *Statue of Liberty* bij Manhattan in de USA is in totaal 92.90 meter hoog. De voeten van het beeld staan 46.50 meter boven het wateroppervlak van de baai.
Op de voorpagina van dit hoofdstuk zie je Miss Liberty op een aquarel van Frederic Auguste Bartholdi (1834-1904). Bartholdi ontwierp het beeld, Eiffel (inderdaad, van de Eiffeltoren) voerde het op de juiste grootte in koper en staal uit, in totaal 225 ton. Het beeld was voltooid in 1886.
Het vrijheidsbeeld was een geschenk van Frankrijk aan de USA. In de rechterhand heeft het standbeeld een toorts vast, in de linkerhand een paneel met de tekst 'July 4, 1776',de datum waarop Amerika onafhankelijk van Engeland werd.

5 Bepaal de maximale hoek waaronder Liberty vanaf zeenivo is te zien en bepaal ook de afstand die in genomen moet worden om die hoek te realiseren.

19: de scheve situatie onderzoeken (extra)

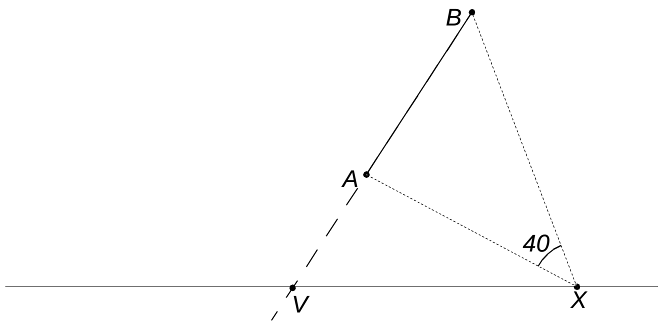
In deze paragraaf gaan we nog een stukje verder.
We laten eerst zien dat ook bij andere standbeelden, waarbij je niet mag aannemen dat de hoek bij V recht is, de formule voor VX geldt.
Daarna gebruiken we die formule om enkel fraaie eigescahppen van een netwerk van cirkels af te leiden.

We hebben de kop van Marx gemodelleerd met een verticaal lijnstuk. Het zou beter zijn een forse rechthoek te gebruiken. Zo ongeveer:

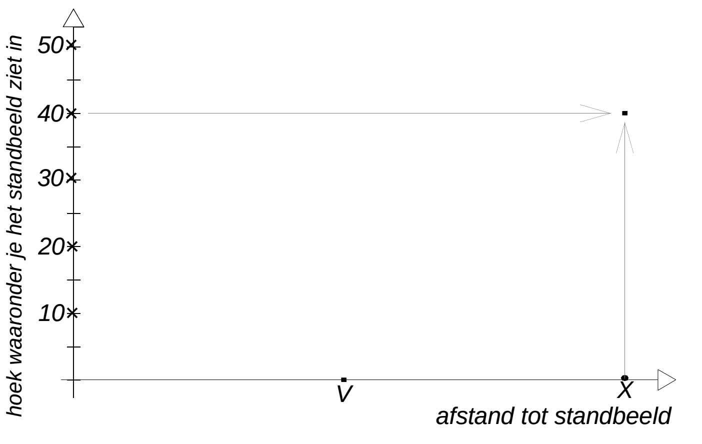


We moeten dus nog onderzoeken wat het effect is van het schuin staan van lijnstuk *AB op de maximale kijkhoek.*

6 Als *AB* niet loodrecht op *l* staat is het probleem ogenschijnlijk wat lastiger. De situatie is hier weer getekend. *V* is weer het snijpunt van *l* met de lijn door *A* en *B*.
(*Je vindt beide figuren van deze opgave ook nog uitvergroot op op bladzijde 65*)



a. Maak ook nu een schetsgrafiek van de kijkhoek vanuit punten op de ooghoogtelijn *l*. Nu moeten de twee kanten afzonderlijk behandeld worden.



b. Er zijn nu twee punten *X* waarbij –*AXB* maximaal, dat wil zeggen dat –*AXB* kleiner wordt als *X* een beetje wordt verschoven. Aan welke kant ligt het grootste van deze twee maxima?

7 Werk in de bovenste tekening weer met *iso-hoek-cirkels*. De middelpunten van die cirkels liggen op de middelloodlijn van AB.

a. Teken die om te beginnen.

b. Vind proberenderwijs met de passer de twee cirkels die door A en B gaan en aan l raken. Werk zo nauwkeurig mogelijk.
De twee punten waarbij de kijkhoek-maxima worden aangenomen, noemen we nu X en Y.

c. Meet de lengtes van VX en VY. Valt er iets op?

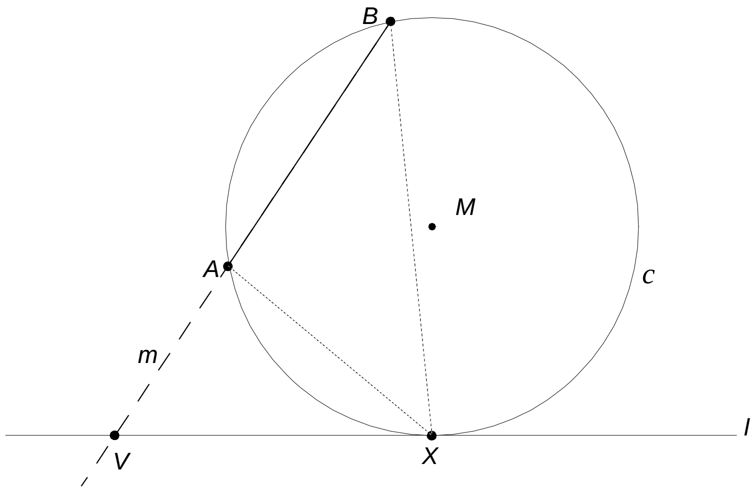
d. Controleer of ook nu voor het gunstigste punt X geldt:

$$|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|.$$

een bewijs via Pythagoras

Uit het voorgaande onderzoek blijkt dat het niet zo gek is te vermoeden dat ook in de scheve situatie geldt dat de maximale hoek wordt bereikt als $|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|$.
Dat moet nu bewezen worden.

8 In deze figuur is alvast het middelpunt van de rakende cirkel aangegeven.



a. Noem de straal van de cirkel r en teken de MA, MB en MC. Teken ook de middelloodlijn van de koorde AB; die lijn heeft in het begin namelijk ook een gunstige rol gespeeld. Het midden van de koorde heet weer T.

b. Trek ook VM. Nu zijn er vast wel voldoende rechthoekige driehoeken te zien om verbanden tussen $|VA|$, $|VB|$, r, $|VM|$ en $|VX|$ op te stellen. Doe dat.

c. Leidt het gezochte verband tussen $|VA|$, $|VB|$, en $|VX|$ hieruit af. Desnoods stel je nog een nieuw verband op om verder te komen.

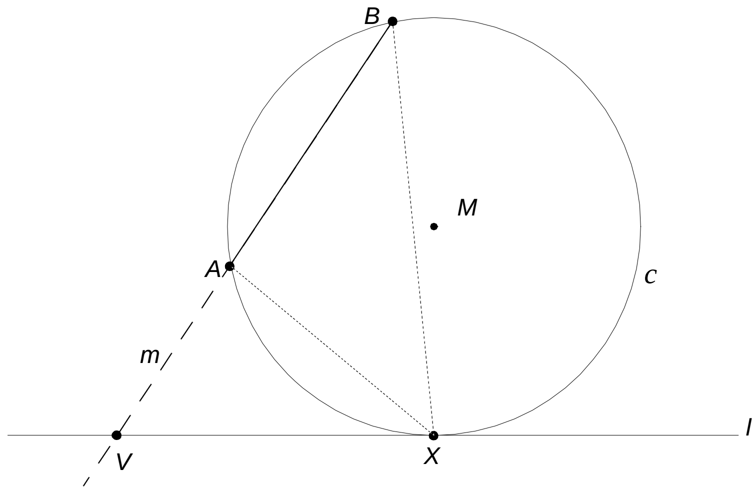
Als je nu een bewijs zou moeten opschrijven, zou je een aantal keer ‘Pythagoras’ als motivering opgeven en daarna een afleiding geven waarin wat gerekend wordt. Dat levert niet veel nieuws op. Het resultaat van de opgave formuleren we wel, want het is bijzonder:

> *Laat c een cirkel zijn en V een punt buiten c. Laat X een punt op de cirkel zijn zodat de lijn VX aan de cirkel raakt en laat m een andere lijn door V zijn, die de cirkel snijdt in A en B.*
> *Dan geldt: $|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|$*

opmerkelijke gevolgen

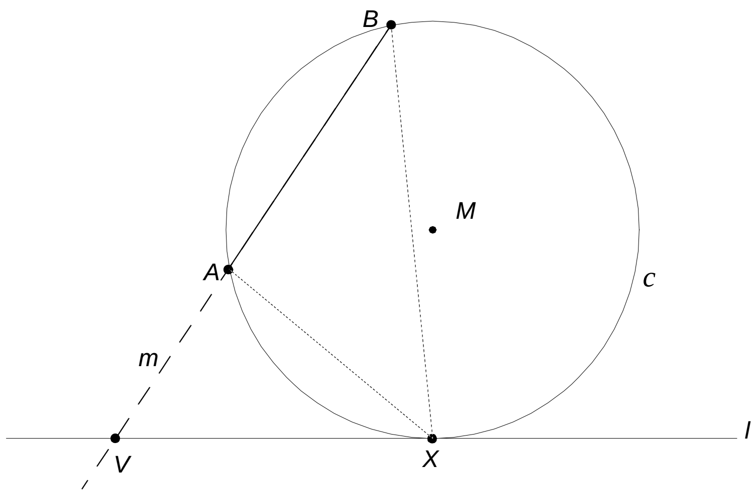
De grote afwezigen in het verband $|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|$ zijn de straal van de cirkel en de hoek tussen de lijnen *l* en *m*. Dat geeft interessante mogelijkheden om te varieren en toch iets constant te houden, namelijk $|VX|$.

9 Eerst werken we met andere lijnen door *V*. Gebruik de figuur hieronder.



a. Teken in de figuur nog een lijn *l’* door *V* en bepaal nu onmiddellijk met de passer een punt *Y* op die lijn, waarvoor —*AYB* maximaal is.
b. Teken de cirkel die door *A* en *B* gaat en raakt aan *l’*. Het middelpunt van die cirkel kan via een extra middelloodlijn gevonden worden.
c. Al de mogelijke punten *Y* als *l’* ‘draait’ om *V*, liggen op een cirkel. Welke cirkel, waarom?

10 Teken in deze figuur nog een lijn *m’* door *V* die de cirkel in *C* en *D* snijdt.

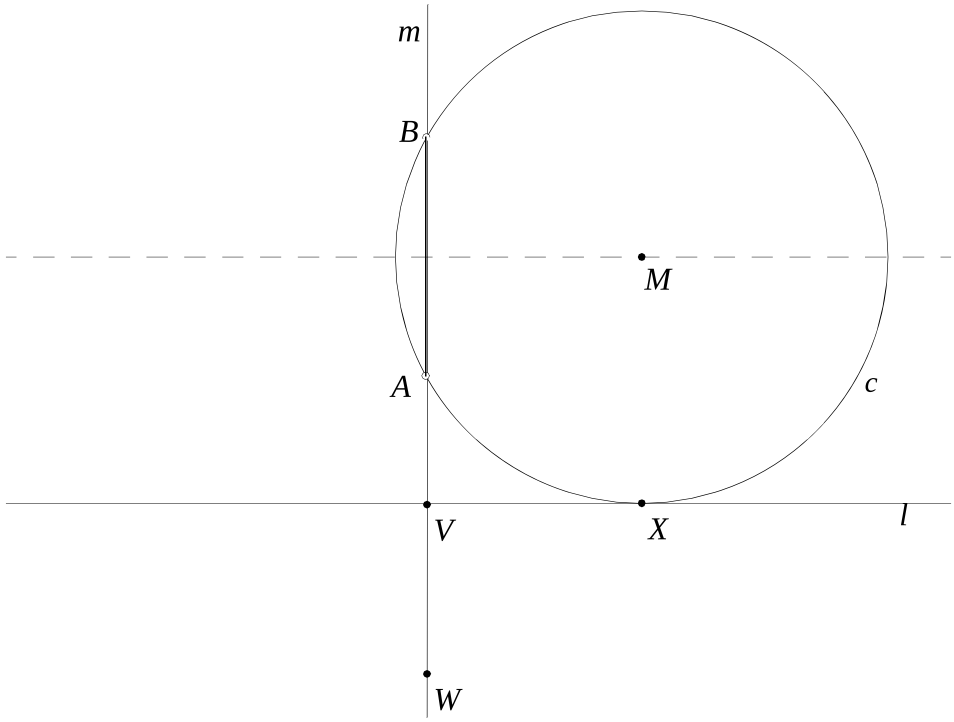


Toon aan: $|VA| \bullet |VB| = |VC| \bullet |VD|$

samenvatting in een netwerk van cirkels

De zojuist gevonden gevolgen laten zich vertalen in de constructie van een fraai netwerk van cirkels. Daarin speelt het voorgaande een rol, maar ook nog het variëren van punt *V* op de lijn door *A* en *B*.

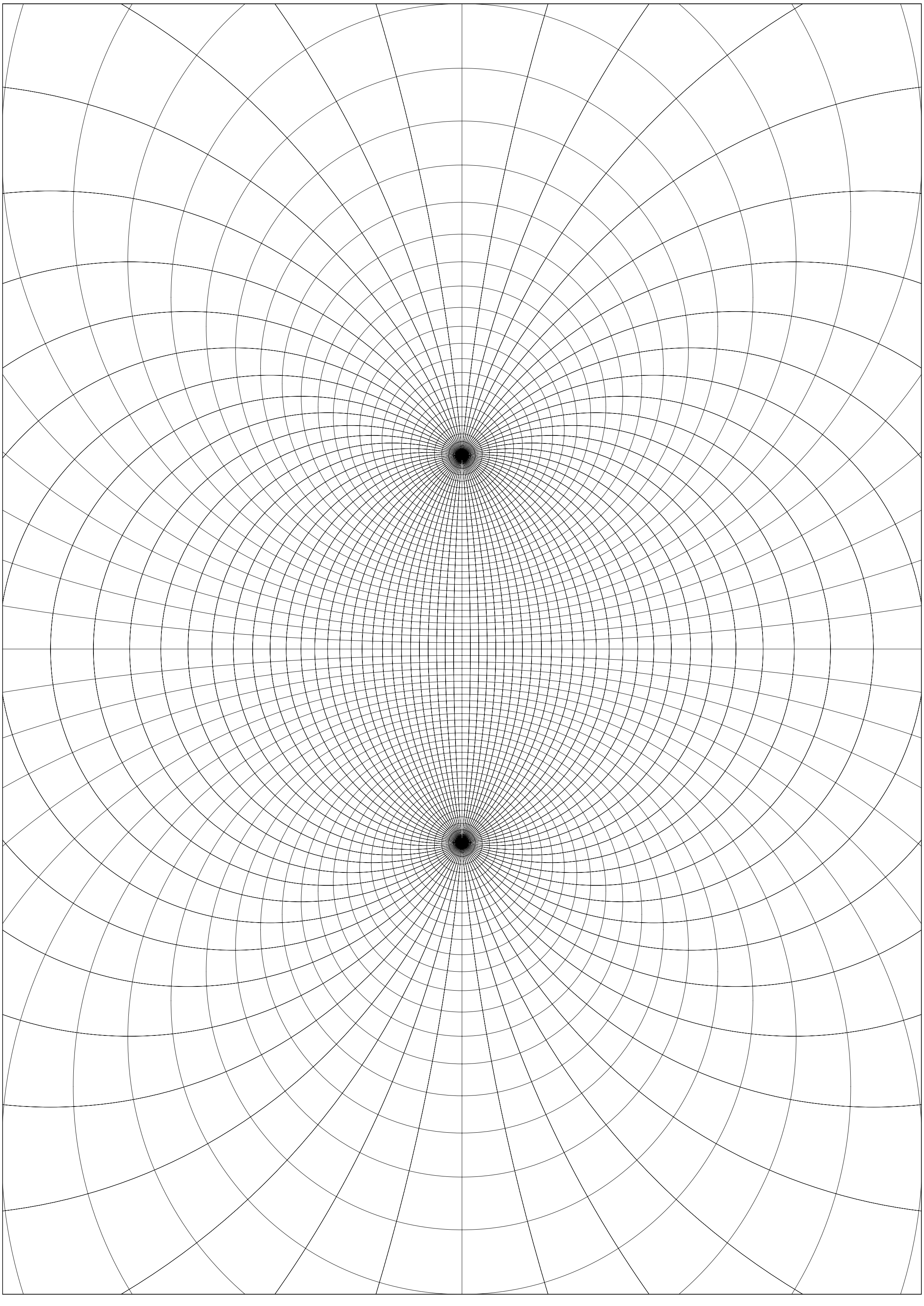
11 In onderstaande figuur is de nu bekende situatie getekend. De cirkel raakt aan de lijn *l* die in dit geval loodrecht op *m* staat.

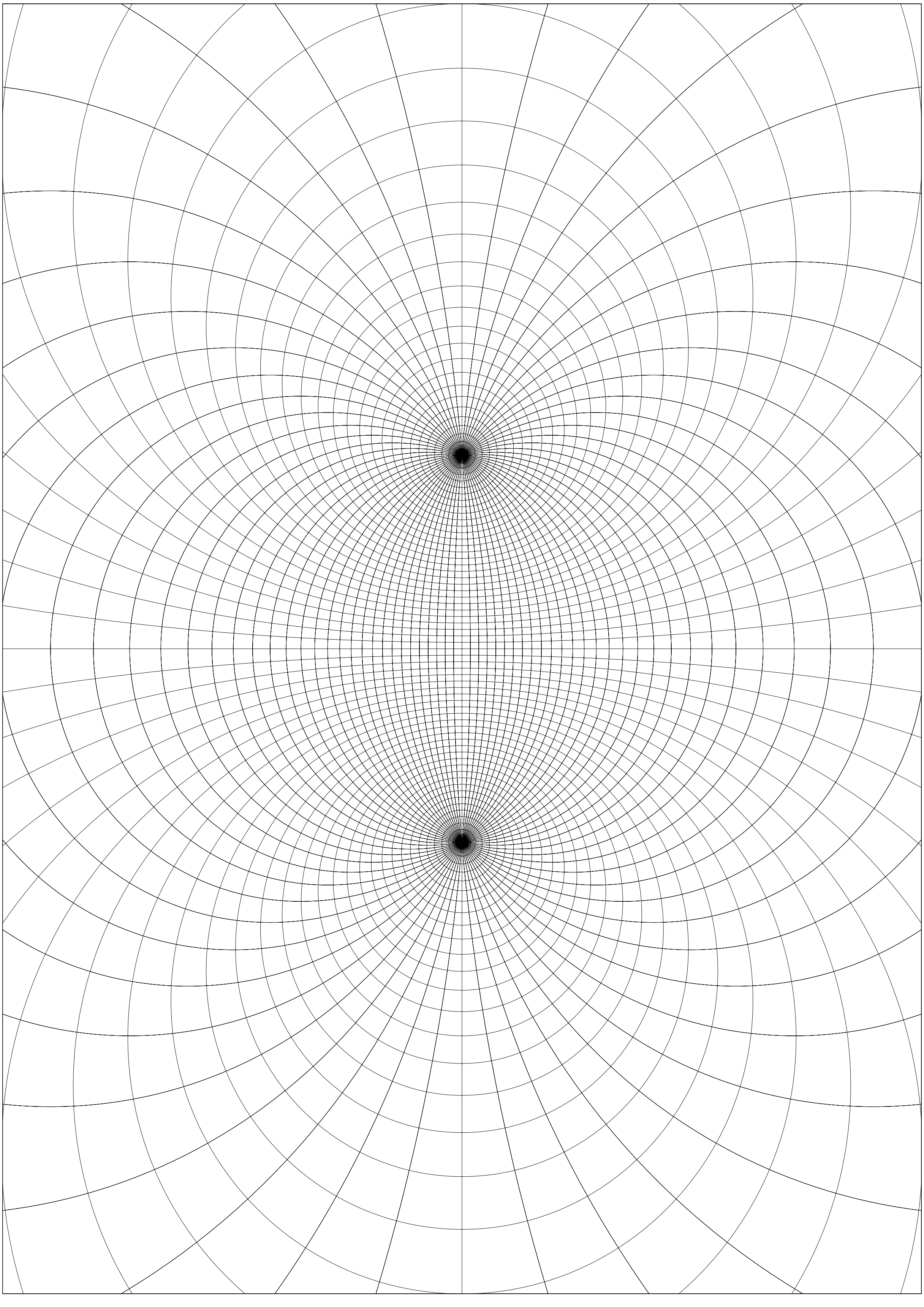


a. Teken drie andere cirkels die door *A* en *B* gaan. Teken met de passer ook de cirkel om *V* die door *X* gaat.
b. Waarom snijdt deze cirkel alle cirkels die door *A* en *B* gaan loodrecht?

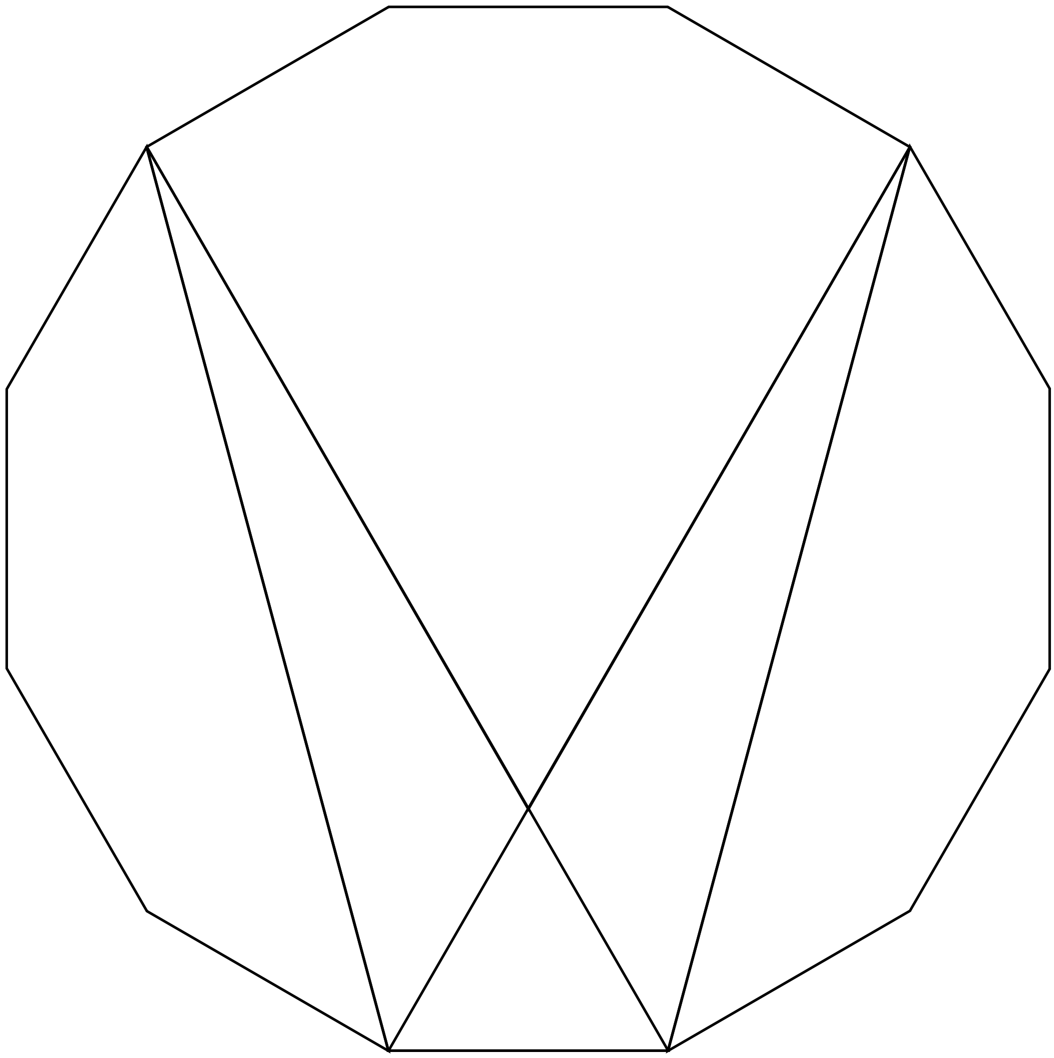
12 Teken de lijn *n* door *W* die evenwijdig is aan *l*.
a. Bepaal de cirkel die door *A* en *B* gaat en aan *n* raakt via de constructie van opgave **3**, bladzijde 55. Noem het raakpunt *Y*.
b. Bepaal nu weer de raakijnen door *W* aan de (vier) cirkels door *A* en *B*. Bepaal ook de raakpunten.
c. Teken ook weer de cirkel met middelpunt *W* die door *Y* gaat.
Welke hoeken maakt die cirkel met de vier cirkels door *A* en *B*?

13 Je hebt het begin gezien van de constructie van een netwerk van cirkels.
Geef nu een toelichting op de figuur op de volgende bladzijde, waarin twee series cirkels te zien zijn:
- serie I, van cirkels die door twee vaste punten *A* en B gaan
- serie II, van cirkels die alle cirkels van serie I loodrecht snijden.

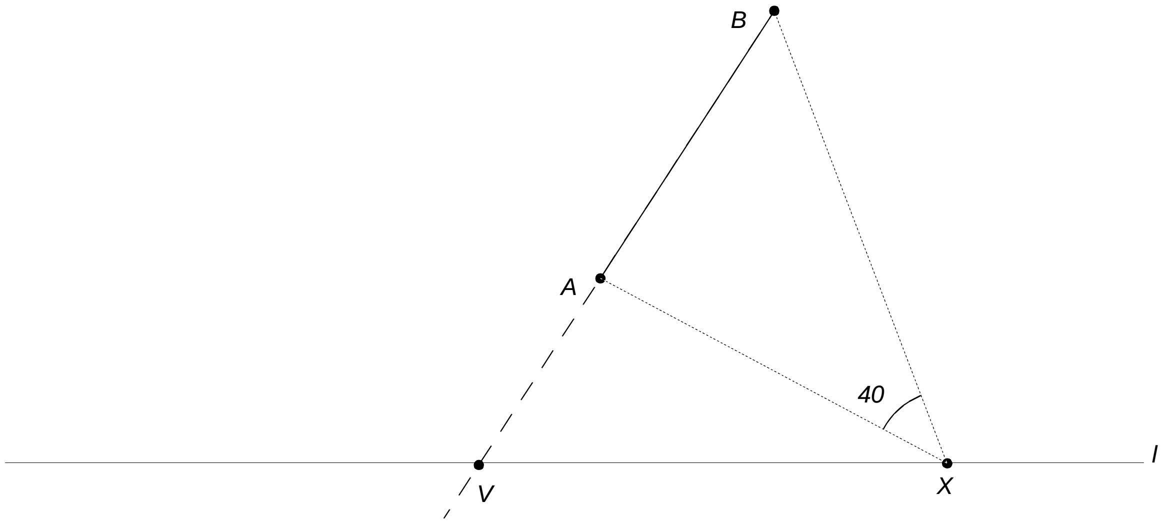


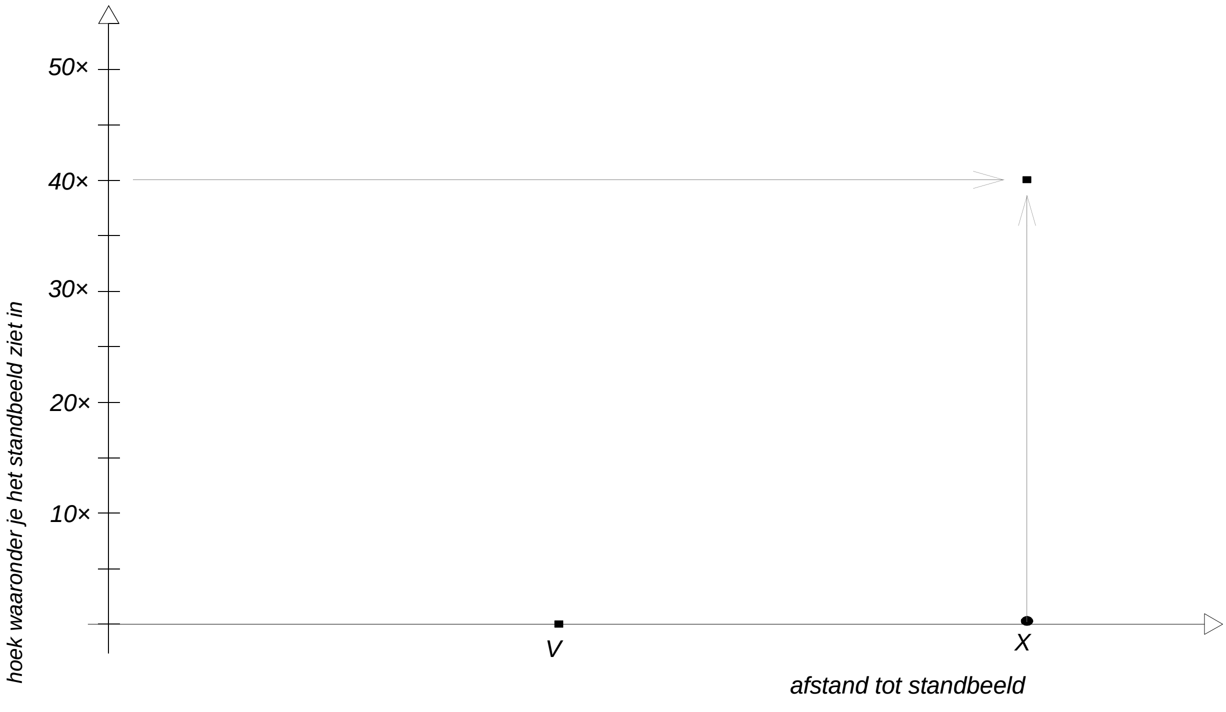


knipfiguur voor opgave 26, bladzijde 47.

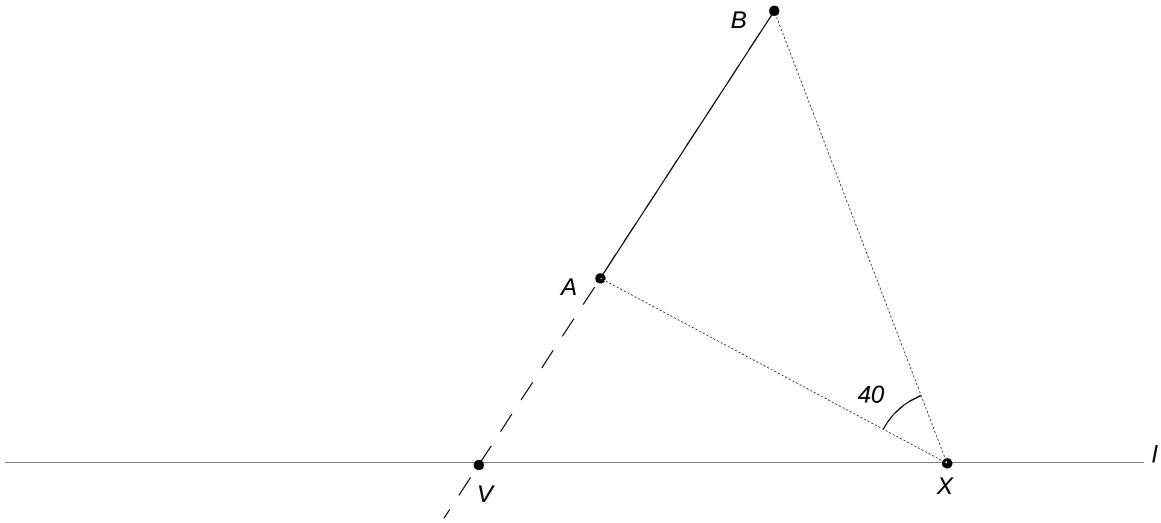


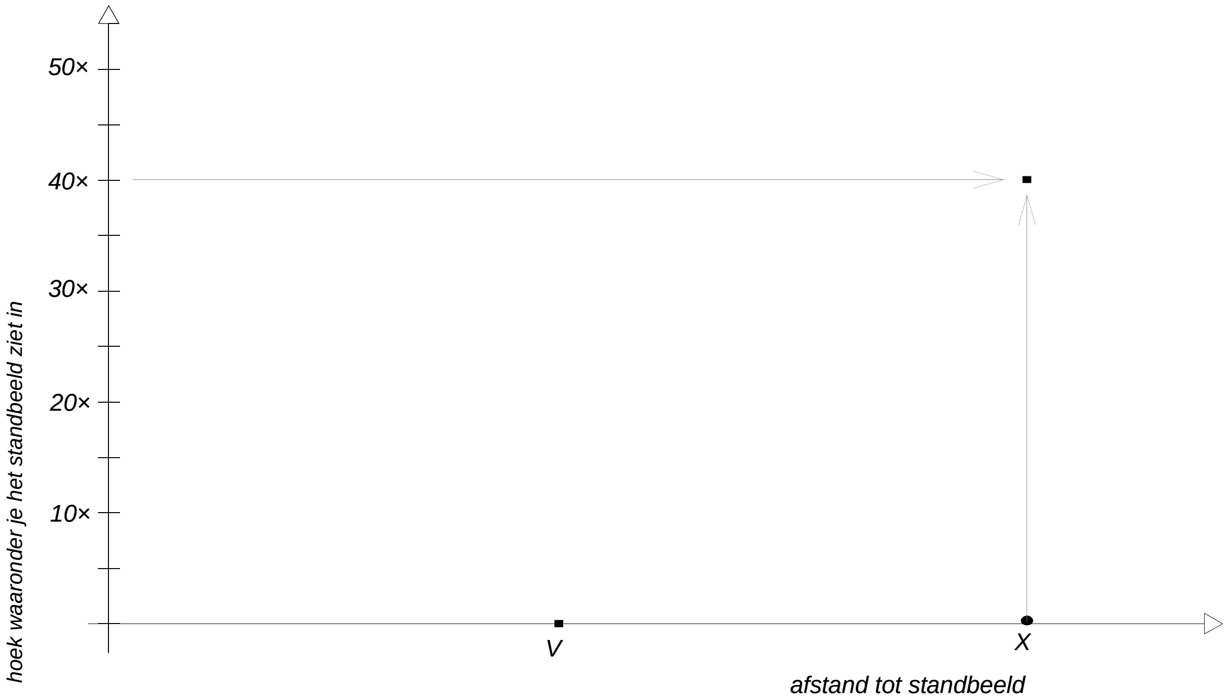
Extra figuren voor opgave opgave 6, bladzijde 57.





Extra figuren voor opgave opgave 6, bladzijde 57.





Voorbeelduitwerkingen

Voorbeelduitwerkingen hoofdstuk 1: Werken met wat je weet

1: ‘Woord vooraf’ bij het overzicht

2: Het overzicht gebruiken

1 **a.** Bijvoorbeeld:
- de drie deellijnen van een driehoek gaan door één punt.
- het principe van Fermat bij spiegelen en optimaliseren.

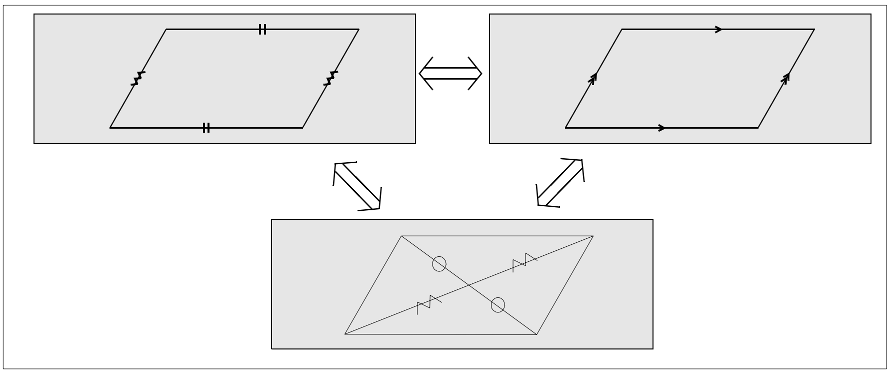
b.
-
- ‘*Afstanden, grenzen en gebiedsindelingen*’: 12a, 13, 14, 15, 16, 23.
- 23, misschien 18 ook wel.

2 13: blz. 22 (geen stellingnummer)
14: stelling 3, bladzijde 27
15: stelling 4, bladzijde 28
16 : stelling 8, bladzijde 67.

3 **a.** stelling 3, bladzijde 27
b. Nee.

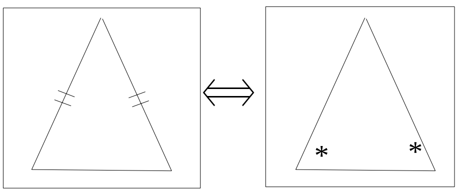
4 90
a. Bij 10c gaat het om gelijke diagonalen, bij 8c gaat het om één diagonaal die in twee gelijke delen wordt gedeeld. Daar hoeven de twee diagonalen niet gelijk te zijn.
b. Neem aan $\angle ABC$ is loodrecht.
AB loodrecht *BC* en *AD* en *BC* zijn evenwijdig. Dus $\angle BAD$ is 90 . Dit volgt uit F-hoeken.
AB loodrecht *AD* en *AB* en *DC* zijn evenwijdig. Dus $\angle ADC$ is 90 . Idem.
AD loodrecht *DC* en *AD* en *BC* zijn evenwijdig. Dus $\angle BCD$ is 90 . Idem.
Steeds F-hoeken. Maar ook is gebruikt dat twee rechte hoeken samen een gestrekte hoek vormen.

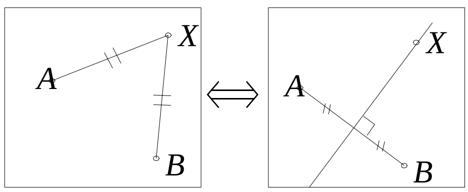
5 **a.** 8a en 8b.
b. Een pijl naar links. Want als 8b geldt, geldt 8a ook.
c.



6 **a.** *ABM*, *BCM*, enzovoort, zijn gelijkbenige driehoeken.
b. Nummer 5. Je ziet meteen dat $\angle A + \angle C = 180$. En dat is nummer 23b.

7 **a.**
b.





3: Redeneringen vinden en bewijzen opschrijven

8 Gebruikt is: 7b volgt uit 7a.

9 Soort één: motivering door beweringen in het overzicht.
Soort twee: motivering door definitie van wat een cirkel is.
Soort drie: motivering doordat het een cirkel is, dat was nu eenmaal de situatie waar het omging.

10 Eerst werd steeds ‘waarom’ gevraagd. Dan kom je steeds meer bij wat er als het ware onder zit. In de definitieve redenering begin je met wat je zeker weet. Bij redeneren ga je van wat je weet naar het nieuwe. Bij het zoeken naar de redenering is het wel eens andersom.

4: Voorbeelden van bewijzen

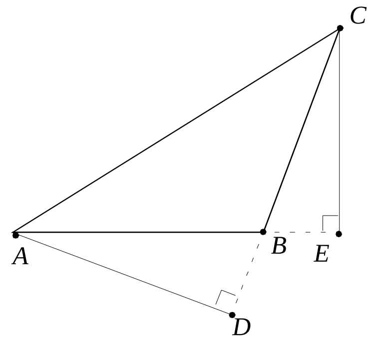
11

12 Bekijk eerst $\angle DAB$. Het is vaak een goed idee een hoek op te vatten als *hoek van een driehoek*.
- **a.** Driehoek *DAB*.
- **b.** *ECB*
- **c.** Allebei hebben ze een hoek van 90 en ze hebben $\angle B$ gemeen.

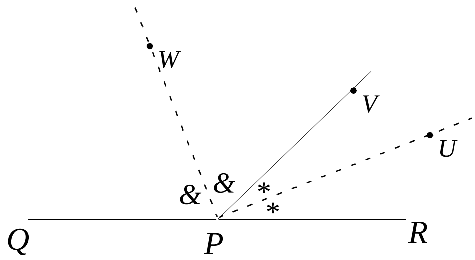
13

	redeneerstap	**motivering**
1:	$\angle DAB + \angle ADB + \angle B = 180$	*som hoeken in DAB*
2:	$\angle ADB = 90$	*AD is hoogtelijn, gegeven*
3:	$\angle DAB = 180 - 90 - \angle B = 90 - \angle B$	*omrekenen uit 1: en 2:*
4:	$\angle ECB + \angle CEB + \angle B = 180$	*som hoeken in ECB*
5:	$\angle CEB = 90$	*CE is hoogtelijn, gegeven*
6:	$\angle ECB = 180 - 90 - \angle B = 90 - \angle B$	*omrekenen uit 4: en 5:*
7:	$\angle DAB = \angle ECB$	*regel 3 en 6.*

14 a.
- **b.** De hoeken bij *B* vallen niet meer samen en zijn ook niet meer de ‘gewone’ hoek bij *B*. In het bewijs moet je nu aangeven welke hoek bij *B* bedoeld wordt. In de eerste drie regels is dat $\angle ABD$; in regel 4 t/m 6 is dat $\angle CBE$.
Er moet een regel toegevoegd worden na regel 6:
$\angle ABD = \angle CBE$; *overstaande hoeken.*



15 .
- **a.** De hoek bij *P* is recht.
- **b.**
- **c.**
- **d.**
- **e.** $\angle QPR = 180$. Tussen de stippellijnen staat de helft.

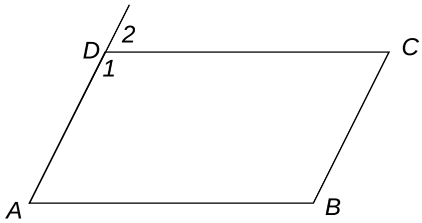


f. *Gegeven*: $\angle QPW = \angle WPV$ en $\angle VPU = \angle UPR$.
Te bewijzen: $\angle WPU = 90$.
Bewijs :

$\angle QPW + \angle WPV + \angle VPU + \angle UPR = 180$	*(gestrekte hoek)*
$\angle WPV + \angle VPU = \angle QPW + \angle UPR$	*(gegevens, twee keer)*
$\angle WPU = \angle WPV + \angle VPU = 90$	*(helft van* 180 *).*

16

a.



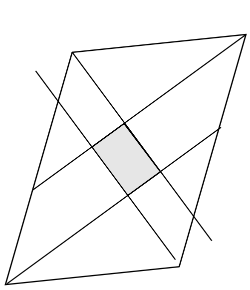
b. *Gegevens: AB // DC*. (De andere evenwijdigheid is niet eens nodig)
Te bewijzen: $\angle DAB + \angle ADC = 180$.

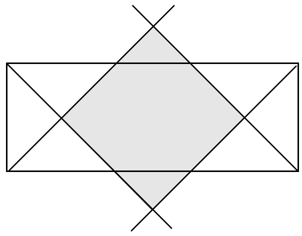
c. *Bewijs*:

1: $AB \,//\, DC$	*(gegeven)*
2: $\angle A = \angle D_2$	(*F-Hoeken)*
3: $\angle D_1 + \angle D_2 = 180$	*(gestrekte hoek)*
4: $\angle D_1 + \angle A = 180$	*(gevolg uit 2 en 3)*

17

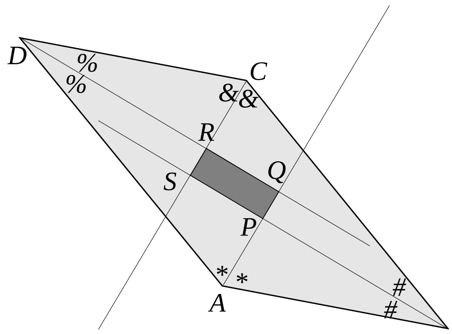
a.





b. Het lijkt steeds een rechthoek te zijn.

c.



We bewijzen alleen dat de hoek bij *P* recht is. Voor de andere hoeken gaat jet net zo.

gegevens:	$AD \,//\, BC$	(*parallellogram*)
	$\angle DAP = \angle PAB$	*(deellijnen)*
	$\angle ABP = \angle PBC.$	

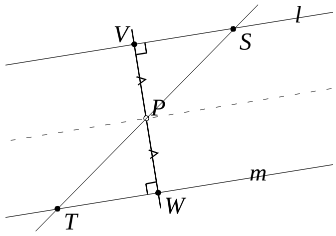
te bewijzen: $\angle SPQ = 90$

d. Kijk naar driehoek *ABP*. De hoeken bij *A* en *B* zijn samen de helft van 180 . Dan moet de hoek bij *P* ook 90 zijn.

e. Bewijs:

$\angle DAP + \angle PAB + \angle ABP + \angle PBC = 180$	(*volgens opgave 16*)
$\angle DAP = \angle PAB$ en $\angle ABP = \angle PBC.$	*(gegevens)*
Dus: $\angle PAB + \angle ABP = 90$	(*helft nemen*)
$\angle PAB + \angle ABP + \angle APB = 180$	(*som hoeken driehoek APB*)
Dus: $\angle APB = 90$	
$\angle SPQ = \angle APB = 90$	(*overstaande hoeken*)

18



a.

b. *Gegeven*: |*VP*| = |*PW*|
–*PVS* = –*PWT* = 90

Te bewijzen is: |*PS*| = |*PT*|.

c. De driehoeken *PVS* en *PWT* zijn gelijk.

d. *Bewijs*:

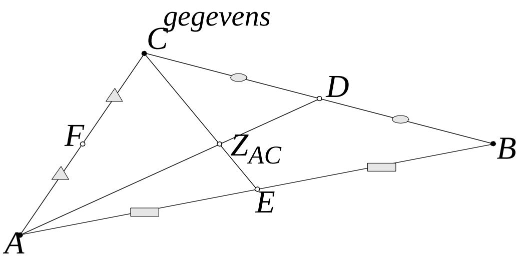
1:	|*VP*| = |*PW*|	(gegeven)
2:	–*PVS* = –*PWT*	(gegeven)
3:	–*VPS* = –*WPT*	*(overstaande hoeken)*
4:	Dus driehoeken *PVS* en *PWT* zijn gelijk	(*HZH*; *volgens 1, 2 en 3*))
5:	|*PS*| = |*PT*|	(*uit 4*)

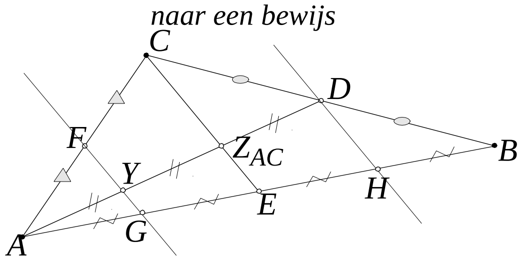
19 De knoop loopt over de middenparallel van punaise en tafelrand.

20 Het midden ligt op de middenparallel van *linkerhand* en *rode draad*. Dus is de afstand tot de rode draad is de helft van de afstand tussen je handen.
(Opmerking: Het is verleidelijk met de verbindingslijn van het rode en blauwe midden te werken. De middens van beide draden liggen namelijk op de middenparallel van maanpunt en jouw armspan-lijn. Dat is mooi, maar je bent er dan nog niet. Je moet dan toch nog aantonen dat een middenparallel in een driehoek de helft van de zijde is waaraan hij parallel is. Dat is precies wat hierboven gedaan is!)

21 I

a.
b.
c.





d.

e. *Gegevens:* |*AE*| = |*EB*|, |*BD*| = |*DC*|, |*CF*| = |*FA*|.
Te bewijzen: $|AZ_{AC}| = 2\bullet|Z_{AC}D|$
Bewijs:
(*G* is het midden van *AE* en *H* is het midden van *EB*.)

1:	|*AG*| = |*GE*|	*bepaling G*
2:	|*CF*| = |*FA*|	*gegeven*
3:	*FG* // *CE*	*middenparallel van A en CE, 1en 2*
4:	|*EH* = |*HB*|	*bepaling H*
5:	|*BD*| = |*DC*|	*gegeven*
6:	*DH* // *CE*	*middenparallel, uit 6 en 7*

(*Y is* het snijpunt van *AD* en *FG*.)

7:	$\|AY\| = \|YZ_{AC}\|$	*middenparallelprincipe in A en CE*
8:	|*AE*| = |*EB*|	*gegeven*
9:	|*GE*| = |*EH*|	*halveren van 5, definitie van G en H*
10:	*FG* // *CE* // *DH*	*volgt uit 3 en 6*
11:	$\|YZ_{AC}\| = \|Z_{AC}D\|$	*CE is middenparallel FG en DH, 9 en 10*
12:	$\|AZ_{AC}\| = 2\bullet\| Z_{AC}D\|$	*volgt uit 7 en 11.*

22 a. $|AZ_{AB}| = 2 \cdot |Z_{AB}D|$

b. Z_{AC} en Z_{AB} zijn hetzelfde punt.
Noem dat punt Z.
De drie zwaartelijnen gaan alledrie door Z.

23 Gebruik opgave **16**.

$-D + -A = 180$ (opgave **16**)

en

$-D + -C = 180$ (opgave **16**)

Dus

$-A = -C$.

24

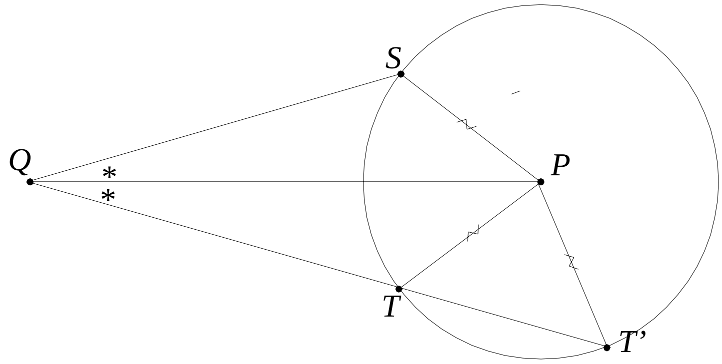
a. *HZZ*. Die staat er in het overzicht niet bij!

b. *H* is niet recht.

25

a. Ook dit is *HZZ*.

b.



26

a. Als er twee overeenkomsige hoeken gelijk zijn, moeten de overblijvende overeenkomstige hoeken dat ook zijn wegens nr. 4 van het overzicht: hoekensom in de driehoek.
Je hoeft dus maar twee gelijkheden van overeenkomstige hoeken aan te tonen en het maakt niet uit welke.

b. Je kunt niet met zo'n lettercode aangeven welke hoekgelijkheden bewezen zijn.

5: slotbeschouwing: de wortels en de boom

Voorbeelduitwerkingen hoofdstuk 2: Speciale bewijsvormen

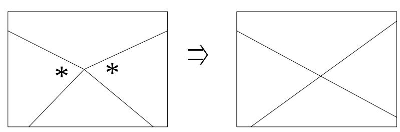
6: Over als-dan beweringen en omkeringen

1

a. II is waar en volgt uit 10b en 8c.

b. I is in het algemeen niet waar.

2 Nummer 18 en 21 zijn omkeerbaar.
Uit 7, 8, 9 en 10 kun je een heleboel omkeerbare beweringen maken omdat het daar over gelijkwaardige dingen gaat.
Niet omkeerbare beweringen zijn er niet zo duidelijk meer, tenzij je bijvoorbeeld de bewering hiernaast als omkering van nummer 1 wilt zien. Dan moet je de conclusie lezen als: dan liggen de halve lijnen in elkaars verlengde en vormen dus een lijn. Dat is duidelijk niet in orde.



3

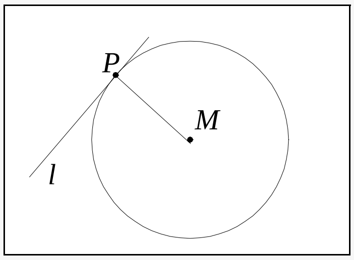
a. *Q* ligt dan dichterbij *M* dan *P*. Dus ligt *Q* echt binnen de cirkel. Dus kan dan de lijn *PQ* nooit raaklijn zijn aan de cirkel.

b.

Gegeven:

cirkel met middelpunt M;
een punt P op de cirkel;
de raaklijn l in P aan de cirkel.

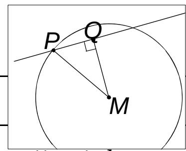
Figuur:



Te bewijzen:

l staat loodrecht op P

Bewijs:



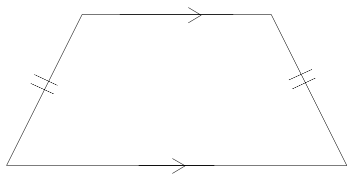
Bewijsstap	**motivering**
1: Veronderstel dat de lijn *l* **niet** loodrecht staat op *PM*	*(start van bewijs uit het ongerijmde)*
2: *Q* is het punt op *l* met $MQ \perp l$.	*(vastlegging wat met Q bedoeld wordt)*
3: Dan geldt: |QM| < |QP|......	(*afstand punt tot lijn*)
4: Dus *Q* binnen de cirkel	(*cirkel*)
5: Dus is *l* niet de raaklijn in *P*.	
6: Daaruit volgt dat veronderstelling 1 onjuist is. Dus moet *l* wél loodrecht op *PM* staan.	(*afronding bewijs uit het ongerijmde)*

4 **a.** Als *Q* op *l* ligt en ongelijk *P* is, dan staat *QM* niet loodrecht op *l*. Dus is |*QM*| groter dan |*PM*| en ligt *Q* dus buiten de cirkel.
Nu is in totaal bewezen: de loodlijn op *PM* door *P* heeft alleen punt *P* met de cirkel gemeen en ligt op *P* na geheel buiten de cirkel.

7: Voorbeelden en tegenvoorbeelden

rol van een tegenvoorbeeld

5



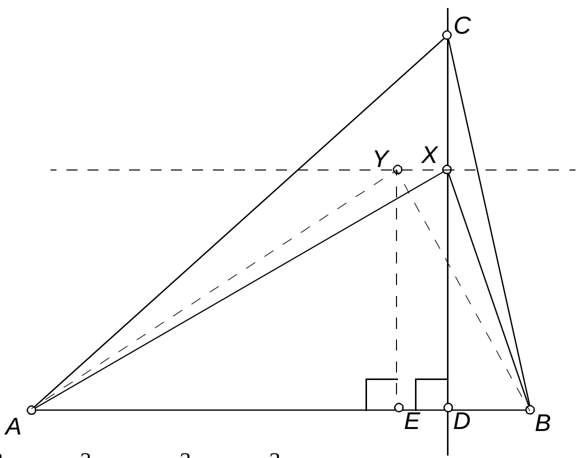
6 In het eerste geval passen de vier driehoeken waar de kleine vierkanten uit zijn opgebouwd op de aangegeven manier in het vierkant.
In het tweede geval passen de vier driehoeken van het onderste vierkant met het kleine vierkant juist in het schuine vierkant.
Dat is met het rooster aan te tonen.
a. Eigenlijk alleen met twee voorbeelden toegelicht.
b. Het is geen bewijs. Als er nog een voorbeeld wordt gegeven, ga je natuurlijk wel iets vermoeden. Verdacht is wel dat je in de twee gevallen op verschillende manieren moest knippen.
c. Hoeveel voorbeelden je ook geeft, een bewijs wordt het NOOIT.

8: Bewijzen in 1-1bis vorm

7 Bij de middelloodlijnen: de middelloodlijn van *AB* is de verzameling van punten met gelijke afstand tot A en tot B. (Nummer 14 van het overzicht).
Bij de deellijnen: de deellijn van een hoek is de verzameling punten met gelijke afstand tot de benen van de hoek. (Overzicht nummer 16)

8
a. Dat is niets meer dan de defintitie van hoogtelijn. Het is niets nieuws.

9 Tekening:



a. ***Te bewijzen is :*** $|AX|^2 - |BX|^2 = |AC|^2 - |BC|^2$.
Tweemaal Pythagoras toepassen, en tussentijds handig samennemen:
Pythagoras in driehoek *ADX* om $|AX|$ te bepalen: $|AX|^2 = |AD|^2 + |DX|^2$.
Pythagoras in driehoek *BDX* om $|BX|$ te bepalen: $|BX|^2 = |BD|^2 + |DX|^2$.

Linkerlid kan nu bepaald worden. Door het aftrekken verdwijnt $|DX|$.
$$|AX|^2 – |BX|^2 = |AD|^2 – |DB|^2.$$

X mag elk punt op de hoogte lijn zijn, dus ook mag *X* het punt *C* zelf zijn:
$$|AC|^2 – |BC|^2 = |AD|^2 – |DB|^2.$$
Samennemen, nu verdwijnt *D* uit het verband:
$$|AX|^2 – |BX|^2 = |AC|^2 – |BC|^2.$$
b. Het geld voor *alle* punten op de lijn door *P* en *C*. De rechthoekige driehoeken zijn er immers altijd.
c. Zie *Y* in de figuur, *YX* is evenwijdig aan *AB*.
Neem aan: *Y* ligt aan de kant van *A* van de hoogtelijn. (Voor *Y* aan de andere kant van *PC* loopt het bewijs bijna net zo.)

Omdat $|AE| < |AD|$ en $|YE| = |XD|$ geldt:

$$|AY|^2 = |AE|^2 + |YE|^2 < |AD|^2 + |XD|^2 = |AX|^2 .$$

Op dezelfde manier:

$$|BY|^2 = |BE|^2 + |YE|^2 > |BD|^2 + |XD|^2 = |BX|^2 .$$

Dus $|AY|^2 - |BY|^2 < |AX|^2 - |BX|^2 = |AC|^2 - |BC|^2$.

10 H is het snijpunt van de hoogtelijnen uit A en die uit B. Het bewijs toont in feite aan: H ligt ook op de hoogtelijn uit C.

hoogtelijnen

H is het snijpunt van de hoogtelijnen uit A en uit B.

stap 1

H op hoogtelijn uit A
Dus (kenmerk hll)
$|BH|^2 - |CH|^2 = |BA|^2 - |CA|^2$

stap 1bis

H op hoogtelijn uit B
Dus
$|CH|^2 - |AH|^2 = |CB|^2 - |AB|^2$

verbindingsstap

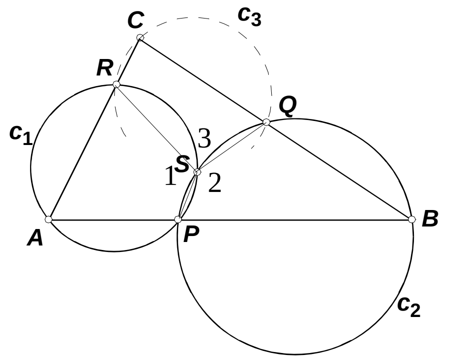
Dus
$|BH|^2 - |AH|^2 = (|BH|^2 - |CH|^2)+(|CH|^2 - |AH|^2) =$
$|BA|^2 - |CA|^2 + |CB|^2 - |AB|^2 = |CB|^2 - |CA|^2$

conclusiestap

$|BH|^2 - |AH|^2 = |CB|^2 - |CA|^2$
Dus
H op *hoogtelijn uit C*

11

a. Gebruik voor karakterisering het koordenvierhoekkenmerk. Teken de koordenvierhoeken $APSR$ en $BQSP$.



Bewijs:

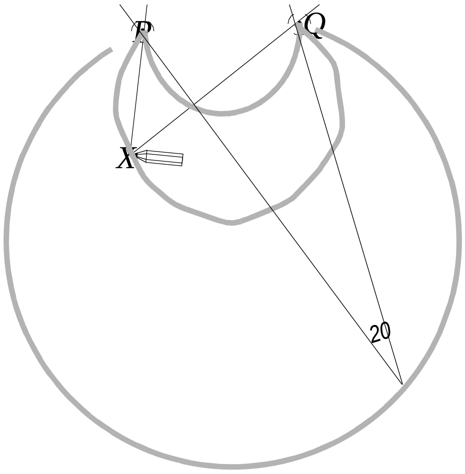
1: $-A + -S_1 = 180$ *(koordenvierhoek APSR)*
2: $-B + -S_2 = 180$ *(koordenvierhoek BPSQ)*
3: $-S_3 = 360 \;\; - -S_1 - -S_2$
$= \quad 360 \;\; - (180 \;\; - -A) - (180 \;\; - -B)$
$= \quad -A + -B$
4: $-C + -A + -B = 180$ *(som hoeken in driehoek.)*
5: $-C + -S_3 = 180$ *(uit 3 en 4 .)*
6: S_3 ligt op de cirkel door C, R en S. *(kenmerk koordenvierhoek omgekeerd.)*

9: Alle driehoeken zijn gelijkbenig

12 Net als eerder: hier werd HZZ gebruikt!

Voorbeelduitwerkingen hoofdstuk 3: De cirkel onder de loep

10: Tussen twee punaises



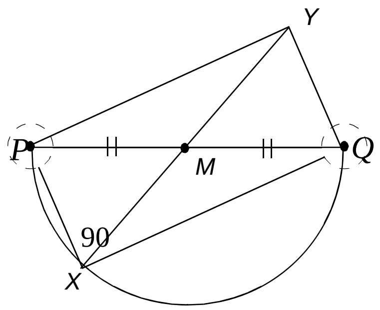
1

a.

b.

c. Vermoeden: het zijn cirkelbogen die van *P* naar *Q* lopen. Als de hoek recht is, dan is het een halve cirkel.

2



a.

b. Nummer 8c, 10c, 10b, 17.

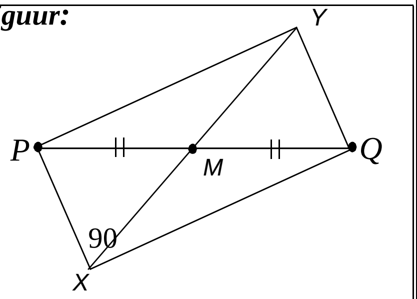
c.

Gegeven:

Punten P en Q; M is het midden van PQ; –PXQ = 90

Te bewijzen: *X ligt op de cirkel met middellijn PQ.*

Figuur:



Bewijs:

Bewijsstap	**motivering**
Teken Y zodat |PY|= |QX| en |QY| = |PX|, maar zó, dat X en Y aan verschillende kanten van PQ liggen.	
PXQY is parallellogram	*De diagonalen delen elkaar middendoor. (8c)*
PXQY is een rechthoek.	*Het is een parallellogram met een rechte hoek. (Gegeven hoek X en10 b)*
Dus |XY| = |PQ|	*Rechthoek.*
Dus |XM| = |MQ|	*Halveren.*
Dus X ligt op de cirkel met middellijn PQ.	*Defintie van cirkel en middellijn.*

3

a. Dit is gelijkwaardig met Thales, omdat er maar één omgeschreven cirkel is. Er wordt uitgegaan van de rechte hoek, de cirkel is enerzijds de Thalescirkel, anderzijds de omgeschreven cirkel.

b. Dit is het omgekeerde van de stelling.

c. Dit is precies hetzelfde als Thales.

11: De stelling van de constante hoek

4 Er geldt: $-B_1 + -W = 180$, omdat B_1CWA een koordenvierhoek is .
Net zo: $-B_2 + -W = 180$, omdat B_2CWA een koordenvierhoek is.
Dus $-B_1 = -B_2$.

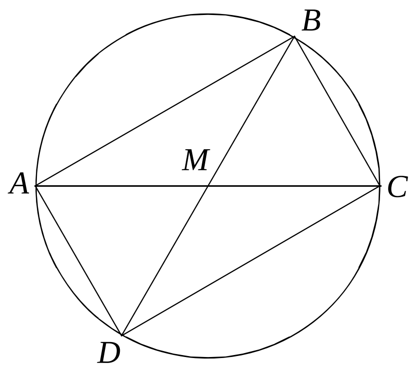
5 Hier kun je *W* willekeurig kiezen, bij de stelling van Thales was echt nodig dat *X*, *M* en *Y* op één lijn lagen, die een diagonaal van de rechthoek was.

6 **a.** *Verklaren* wel. Want je ziet dat de punten op de cirkelboog goede posities voor de geodriehoek geven. En je ziet dat de punt van de geodriehoek niet van de cirkelboog af mag, want dan gaan de zijden van die driehoek los van *P* en/of *Q*.
b. Maar echt *bewezen* is het niet, want dan moeten we dat laatste nog echt aantonen.

12: De omkeringen

7

a. *Bewijsschets*:
Driehoek *ABC* aanvullen tot een parallellogram met een extra punt D op de cirkel. Nu is *DB* even lang als *AC* en deze diagonalen snijden elkaar middendoor. Volgens nr. 34 is *ABCD* dan een rechthoek. Klaar.



Volledig bewijs :

Gegeven:
B op de cirkel met middellijn *AC*.

Te bewijzen:
$-ABC = 90$.

Bewijs:

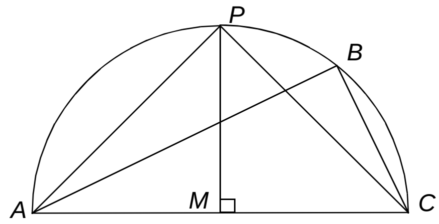
Bewijsstap	***Motivatie***
Teken DC // AB en AD // BC.	
ABCD is een parallellogram.	*Definitie parallellogram.*
AM = MC	*Gegeven; M is middelpunt van cirkel.*
Dus M is snijpunt van de diagonalen AC en BD.	
Dus ook MD = MB	*Kenmerk parallellogram, 8c van overzicht.*
MB = MA	*Gegeven B op cirkel met middellijn AC.*
Dus AC = BD.	*Verdubbeling.*
Dus ABCD is een rechthoek.	*Wegens 10c van het overzicht.*
Dus $-ABC = 90$.	

b. *Schets*:
Kies *P* op het midden van de boog *AC*. Dan zijn de driehoeken *AMP* en *PMB* van het type 45-90-45 .
$\angle APC$ is dus 45 + 45 = 90 . Volgens de stelling van de constante hoek is $\angle P = \angle B$. Klaar.
Volledig bewijs :

Gegeven*:*
B op de cirkel met middellijn AC.

Te bewijzen:
$\angle ABC = 90$.

Bewijs*:*



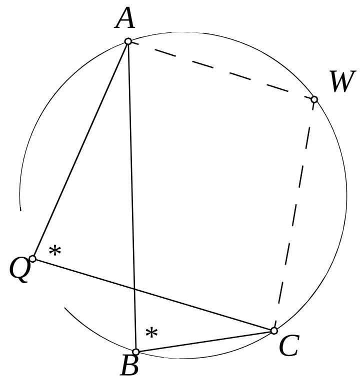
Bewijsstap	***Motivatie***
Kies P op midden van de boog AC.	
Dan is |AM| = |MP|.	*Definitie cirkel.*
Dus $\angle MPA = 45$.	*Rechthoekigheid en gelijkbenigheid van driehoek AMP en 7b.*
Evenzo $\angle MPC = 45$.	
Dus $\angle APC = 90$.	*Optellen.*
Maar ook: *$\angle APC = \angle ABC$.*	*Volgt uit* bewezen *stelling constante hoek.*
Dus $\angle ABC = 90$.	*Klaar.*

8

Gegeven:
A, B en C op een cirkel.
Q aan dezelfde kant als B van lijn AC.
$\angle AQC = \angle ABC$.

Te bewijzen:
Q ligt op de cirkelboog ABC.

Bewijs:



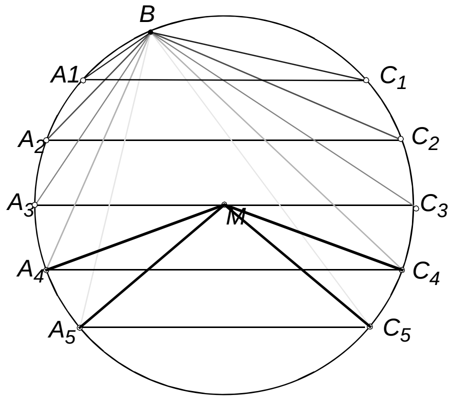
bewijsstappen:	***motivatie***
Kies *W* op de andere boog *AC*.	
Dan is *ABCW* een koordenvierhoek.	*Definitie koordenvierhoek.*
$\angle ABC + \angle W = 180$.	*Kenmerk koordenvierhoek, 23b.*
$\angle AQC = \angle ABC$	*Gegeven.*
Dus $\angle AQC + \angle W = 180$.	*Kenmerk koordenvierhoek, 23a.*
Dus *AQCW* is een koordenvierhoek.	*Nummer 40.*
Dus *Q* op de cirkel door *A*, *C* en *W*.	*Definitie koordenvierhoek.*
Dat is ook de cirkel door *A*, *B* en *C*.	
Q ligt aan zelfde kant als *B*,	
dus op boog *ABC*.	*Klaar.*

9

a. Met stelling 4, de omkering van de stelling van de constante hoek. Want die zegt dat het punt op de boog moet liggen die door de eerste keuze van het punt *X* bepaald is.

b. Dat is Thales zelf, niet de omkering.

13: de grootte van de hoek



10

a. Als de hoek groter wordt, dan wordt de boog groter en andersom.

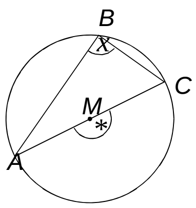
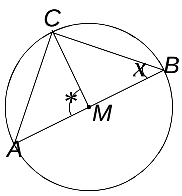
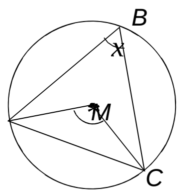
b. Onder een kopieerapparaat blijven hoeken onveranderd.

11 a. Er zijn heel veel omtrekshoeken, want *B* kan overal liggen. Er zijn maar twee groottes van die hoeken, één voor *B* op de ene boog en één voor *B* op de andere boog.

b. Twee.

12

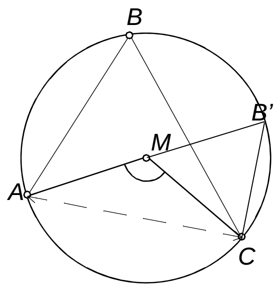
a.

geval:	*1*	*2*	*3*
fig.:			
–*ABC:*	90	45	60
–*AMC:*	180	90	120

–*ABC* is hier steeds de helft van –*AMC*.

b. Nee.

13

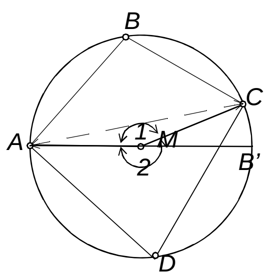


a. –*ABC* = –*AB'C* wegens de stelling van de constante hoek.

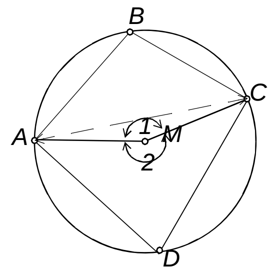
b. Driehoek *B'MC* is gelijkbenig. Dus is –*MBC* = –*BCM*. Die hoeken zijn samen gelijk aan de buitenhoek –*AMC*. Omdat
–*BMC* + –*MB'C* + –*B'CM* = 180 , geldt ook
–*AMC* = –*MB'C* + –*B'CM* = 2 –*MB'C*
Dus –*AMC* is het dubbele van –*AB'B* .

c. –*ABC* = –*AB'C* . Dus ook –*ABC* is de helft van –*AMC*.

14 .



a. *M* ligt buiten driehoek *ACB*.
De buitenhoek is nu M_1 en dat is niet de goede van de twee hoeken bij *M*.



b. *D* kan in het midden van de boog worden gekozen. Dan ligt *M* zeker binnen *ADC*. Met *D* gaat het dus wel goed.

c. –M_1 = 2 •–*ADC*.
Omdat –*ADC* en –*ABC* samen 180 zijn en –M_1 en –M_2 samen 360 , geldt ook –M_2 = 2 •–*ABC*.

d. Ja. Tenzij je nog apart wilt bekijken dat *AMC* een rechte lijn is. Dan geldt Thales!

15

Gegeven:

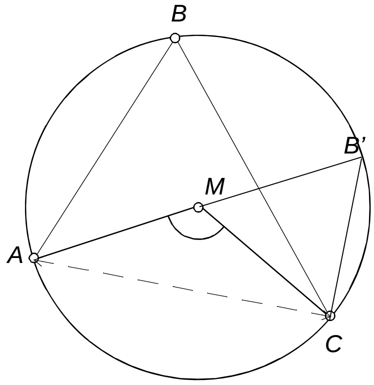
A, *B* en *C* op een cirkel met middelpunt *M*.

Te bewijzen:

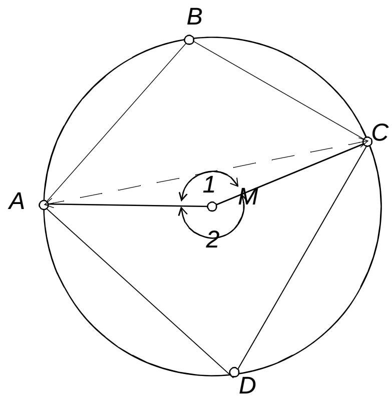
Omtrekshoek –*ABC* is de helft van de bijhorende middelpuntshoek –*AMC*.

Bewijs:

Onderscheid de gevallen dat *M* wel of niet in driehoek *ABC* ligt.



figuur 1.



figuur 2.

Eerst het geval van M wél binnen driehoek ABC afhandelen. Figuur 1.

bewijsstappen:	***motivatie***
AM snijdt de cirkel nog eens in *B*'.	
Dan is –*AB'C* = –*ABC*.	*Stelling 2.*
MB' = MC.	*(cirkel)*
Dus –*MB'C* = –*MCB*'.	*Gelijkbenige driehoek B'CM.*
–*BMC* + –*MB'C* + –*B'CM* = 180	*Som hoeken driehoek.*
–*AMC* = –*MB'C* + –*B'CM = 2* –*MB'C*	*Gebruik van bewezen gelijke hoeken.*
= 2–*MBC*	
Dit geval is dus nu bewezen.	

Geval twee, M buiten ABC; gebruik nu figuur 2.

Kies *D* als midden van die boog *AC* waar *B* niet op ligt. Dan ligt *M* binnen *ACD*.	*(ACD is dan scherphoekig)*
–M_1 = 2 –*ADC*	*Volgens bewezen geval één.*
–M_2 = 360 – M_1	*Volle hoek is 360*
= 360 – 2 •–*ADC* =	*Invullen.*
= 360 – 2 •(180 – –*ABC)*	*Koordenvierhoek ABCD.*
= *2 •–ABC.*	*Herleiden.*
Klaar.	

14: Deellijn en raaklijn

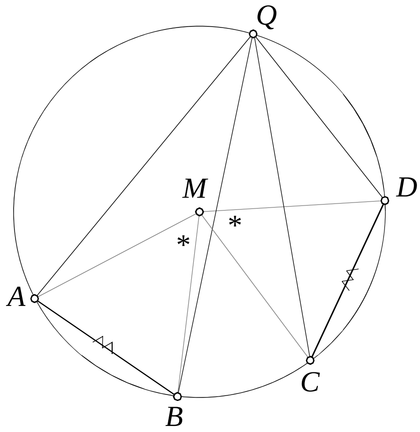
16

a. $\angle AMB$ en $\angle CMD$ zijn gelijk.

b. $\angle AQB$ en $\angle CQD$ zijn de helft van $\angle AMB$ en $\angle CMD$, en die hoeken zijn gelijk.

c. Kort en krachtig: *gelijke koorden-gelijke hoeken.*
Maar exacter is:
Als
– *A, B , C, D* en *Q* in deze volgorde op een cirkel liggen
– de koorden *AB* en *CD* even lang zijn,
dan zijn $\angle AQC$ en $\angle BQD$ zijn gelijk .

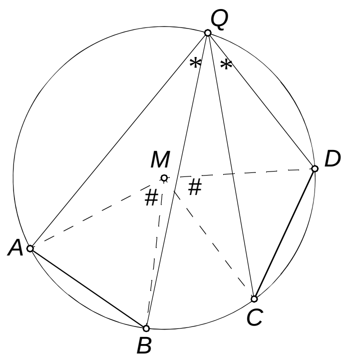
Het kort-en-krachtig is niet geheel juist; dat komt omdat de nare situatie dat de punten in de volgorde *A-B-C-Q-D* liggen, uitgesloten moest worden. Om te onthouden denk je wel gewoon aan: *gelijke koorden-gelijke hoeken.*



d. Als *A, B, C* en *D, Q* in deze volgorde op een cirkel liggen en $\angle AQC = \angle BQD$, dan zijn de koorden *AB* en *CD* even lang.

Gegeven:
A, B,C, D en *Q* in deze volgorde op een cirkel met middelpunt *M*.
$\angle AQB = \angle CQD$

Te bewijzen:
$|AB| = |CD|$

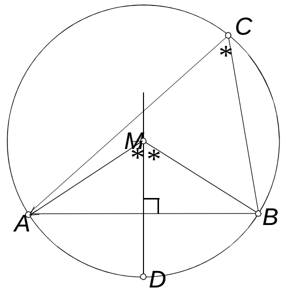


Bewijs:

bewijsstappen:	***motivatie***
$\angle AQB = \angle CQD$	*Gegeven.*
Dus $\angle AMB = \angle CMD$	*Als de omtrekshoeken gelijk zijn, zijn de middelpuntshoeken het ook, volgens stelling 5.*
Omdat ook nog $\vert AM\vert = \vert MC\vert$ en $\vert BM\vert = \vert DM\vert$ geldt $\vert AB\vert = \vert CD\vert$.	*Overeenkomstige elementen in driehoeken, volgens ZHZ.*
Klaar.	

e. $\angle AQC$ en $\angle BQD$.

17 $\angle ACB$ is de helft van $\angle AMB$. Omdat $\angle AMD = \angle DMB$ geldt dan ook $\angle DMB = \angle ACB$. Zie de sterretjes in de figuur.



18 Op de omgeschreven cirkel op het midden van boog *AB*.

19

a. Volgens de stelling van de constante hoek.

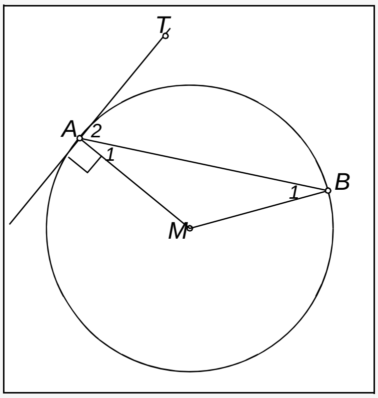
b. Tussen de raaklijn en de koorde aan de kant van de boog *AB*.

20

Gegeven:

Een cirkel met middelpunt M;
A en B op de cirkel;
T ligt op de raaklijn in A;
T en M aan weerszijden van AB.

Figuur:



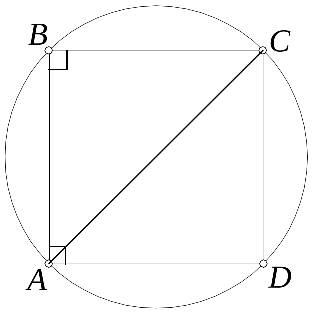
Te bewijzen:

–*TAB* = $\frac{1}{2}$–*AMB*

Bewijs:

Bewijsstappen	***motivatie***
A_1 + –B_1 + –*AMB* = 180	*Hoekensom in driehoek ABM.*
–A_1 = –B_1	*ABM is gelijkbenig.*
Dus –A_1 = 90 - $\frac{1}{2}$–*AMB*	*Omwerken*,
	...
–A_2 = 90 - –A_1	...
= 90 - (90 - $\frac{1}{2}$–*AMB*)	...
= $\frac{1}{2}$–*AMB*.	...
Klaar.	

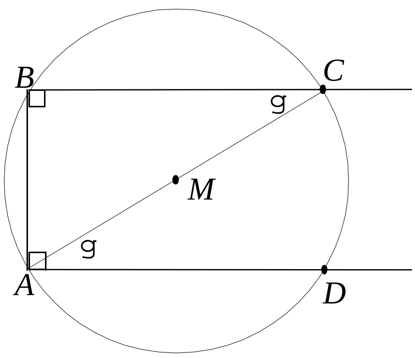
15: Iso-hoek-lijnen



21

a. –*ABX* = –*ABC* = 45

b. Stap één :teken een lijn loodrecht op *AB* door *B*.
Stap twee: Pas *BA* op die loodlijn af met de passer.



22

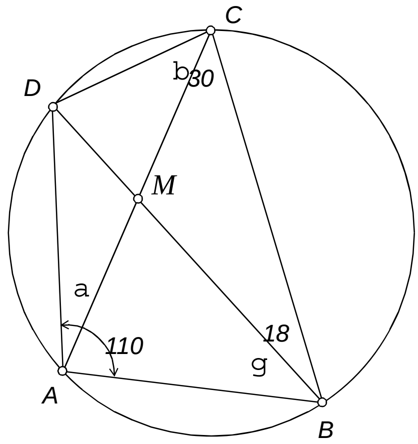
a. *ABCD* is een rechthoek.

b. –*CAD* = –*BCA*. *Z*-hoeken bij de evenwijdige lijnen *BC* en AD.

c.

16: Samenvatting en gevarieerde opgaven

23 De Griekse lettertjes in de figuur geven een mogelijke volgorde aan.



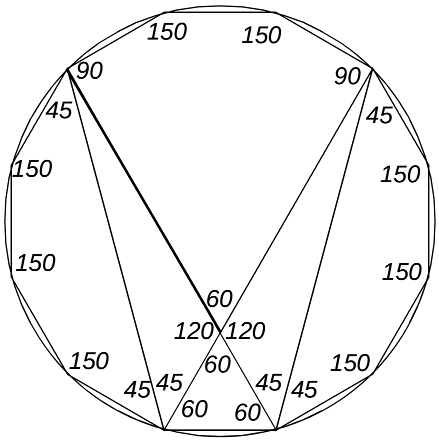
a. a = –*DAC* = –*DBC* = 18 . (Stelling 2)
b + 30 = 180 – 110 ; b = 40 . (Koordenvierhoek)
g= b = 40 .

b. –*CDB*× = 180 - 18 - 30 - b = 92
c. –*DCA* = b = 40
d. –*ABC* = g + 18 = 52
e. –*ABD* = g = *40*
f. –*DAC* = –*DBC* = 18 .
g. –*AMB* = 30 + 18 .

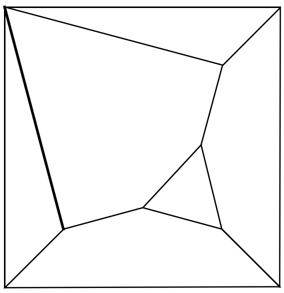
24 –*CQD* = –*AQB* = –*APB* .

25 a. Even groot.
b. De bijhorende middelpuntshoeken zijn 30 . Beide hoeken zijn dus 15 .
c. Ja, want de middelpuntshoek is twee keer zo groot.

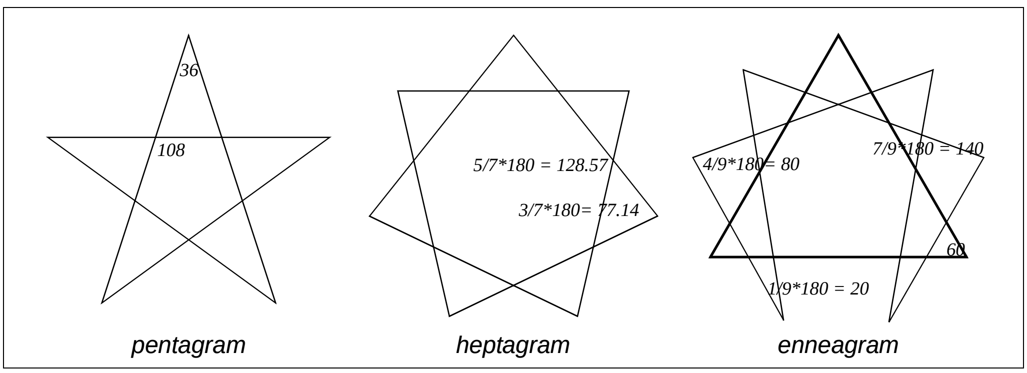
26 .



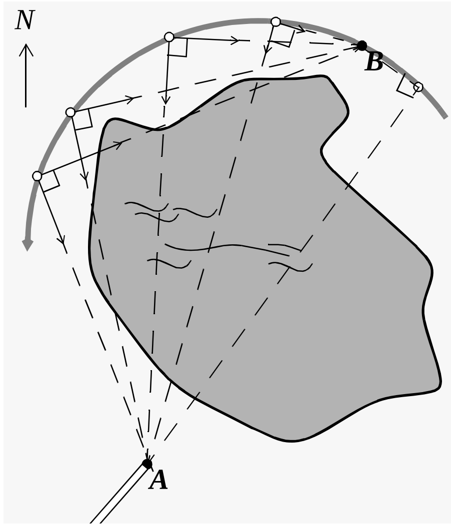
a. Zie figuur. Allemaal omtrekshoeken (op één na) op de *klok* berekend; ze zijn veelvouden van 15 .
Het driehoekje is gelijkzijdig.
b. De zijden van het driehoekje zijn gelijk aan de zijde van de twaalfhoek zelf. Verder liggen de dik getekende stukken in het vierkant ook tegen elkaar.



27 .



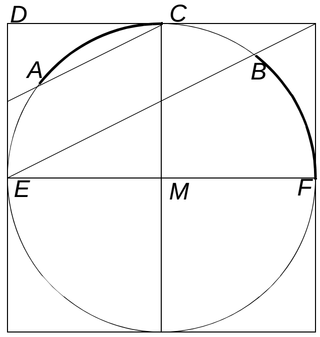
28 Bij *B* bijvoorbeeld.
Verder kan hij eromheen lopen en zoveel mogelijk punten zoeken vanwaaruit hij *AB* onder 90   ziet. Dat geeft een cirkel volgens Thales.
Het kan ook met andere hoeken, maar dan moeten er meer jalons geplaatst (of verplaatst) worden, of er moet aan de twee kanten van *AB* met verschillende hoeken gewerkt worden, die samen 180   zijn.



29

a = 90	b = 15	g= 60	d = 52.5 helft van de helft van 180+30	e = 15 gelijk aan b
h = 15 helft van 30	k = 7.5 helft van h	l = 33.75 helft van helft van 120 + h	m = 52.5 gelijk aan d	n =93.75 = l + k + m

30 –*DCA* = –*BEF*, vanwege *AC* // *EB* en *DC* // *EF*.
Maar ook –*DCA* = $\frac{1}{2}$–*AMC* en –*BEF* = $\frac{1}{2}$–*BMF*.
Dus zijn ook de bogen *AC* en *BF* gelijk.
–*AMB* = –*AMC* + –*CMB* = –*BMF* + –*CMB* = 90



31 Figuur op de volgende bladzijde. Let op de pijltjes voor punten buiten de bladzijde

a. –*QAC* en –*QCA* volgen uit de raaklijn en koordestelling.
Dan volgt –*AQC* uit de hoekensomstelling voor de driehoek. De andere hoeken gaan net zo.
–***RQP*** = 180 – 2 •–*B*= 180 – 2 •65 = **50**
–***QPR*** = 180 – 2 •–*A*= 180 – 2 •35 = **110**
–***PRQ*** = 180 – 2 •–*C*= 180 – 2 •80 = **20** .

De deellijnuit *A* deelt boog *BC* middendoor (net als de middelloodlijn op *BC).*
–*CDB* = 65 + 80 = 145 , volgens constante hoeken, –***EDF*** is daar de helft van, dus **72.5** .
Net zo:
–*BFA* = 35 + 65 = 100 ,–***DFE*** = **50** .
–*AEC* = 80 + 35 = 115 ,–***DEF*** = **57.5** .

b. –*BAF* = $\frac{1}{2}$–*BAR* **=** 40 .Evenzo –*QAE* = 32.5 ,dus –***EAF*** = 40 + 35 + 32.5 = 107.5
Analoog –***FBD*** **= 122.5** en –***DCE*** **= 130**.

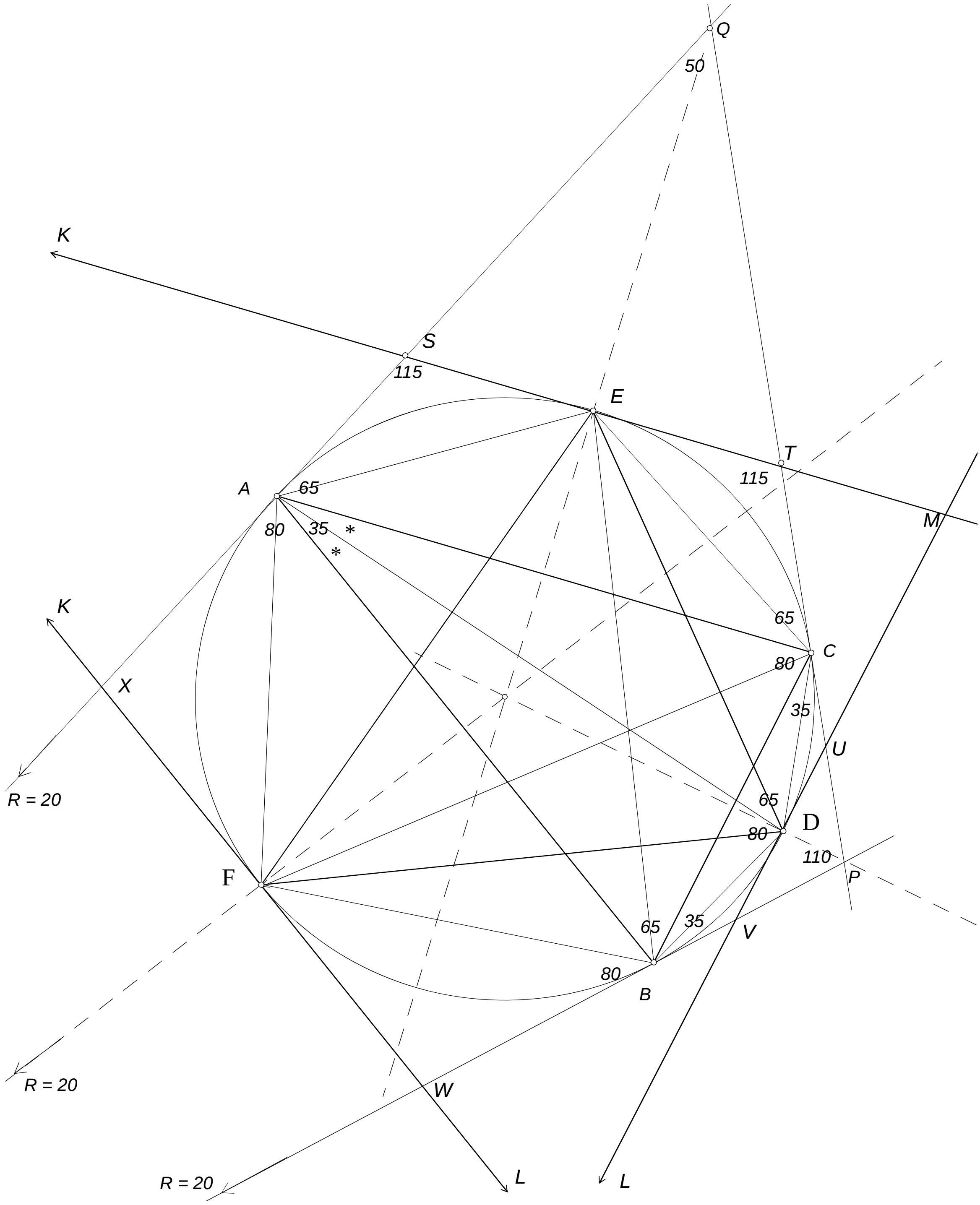
Samengevat: driehoek ***DEF*****: 72.5 ,57.5 en 50** . (Test: het moet samen 180 zijn).
zeshoek ***AFBDCE*****: 107.5 , 100 ,122.5 , 145 , 130 , 115** .
(Test: de zeshoek bestaat uit 4 driehoeken, samen moet het dus 4 •180 zijn. Dat klopt).

c. Het proces van *a* op driehoek *DEF* toepassen.
–***LMK*** = 180 – 2 •–*F*= 180 – 2 •50 = **80**

– ***MKL*** = 180 – 2 * – *D* = 180 – 2 •72.5   = **35**
– ***KLM*** = 180 – 2 * – *E* = 180 – 2 •57.5   = **65** .

d. Het zijn de hoeken van de oorspronkelijke driehoek. Je kunt dat ook direct zien door te bedenken dat de zijden van *KLM* evenwijdig zijn aan die van *ABC*.

e. – *QSE* = – *QAC* = 65 . Dus – ***ASE*** **= 115** . De andere hoeken (*T*, *U*, *V*, *W* en *X*) zijn: **115 , 145 , 145 , 100 , en 100 .**

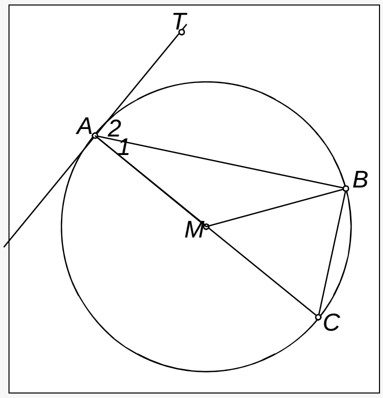


32

***Gegeven*:**

Een cirkel met middelpunt M;
A en B op de cirkel;
T ligt op de raaklijn in A;
T en M aan weerszijden van AB.

Figuur:



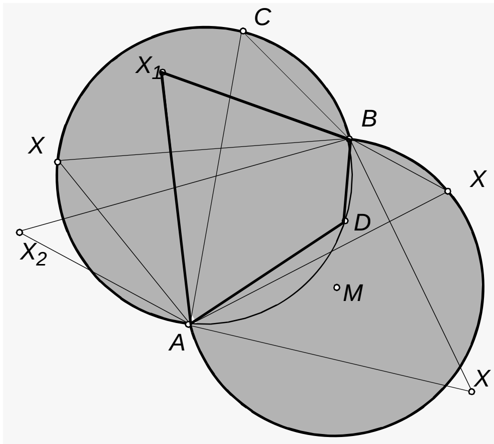
Te bewijzen:

$-TAB = \frac{1}{2} - AMB$

Bewijs:

Bewijsstappen	***motivatie***
Kies C zo dat AC een middellijn is.	
Dan is $-ABC = 90$.	*Omkering stelling van Thales.*
Dus $-A_1 + -C = 90$.	*Volgt uit hoekensom van driehoek.*
Omdat $-A_1 + -A_2 = -TAM = 90$,	*Omdat AT raakt aan de cirkel.*
is ook $-A_2 = -C$.	*Omwerken in vergelijking.*
$-C = \frac{1}{2} - AMB$, *dus*	*Volgens stelling van de omtrekshoek.*
$-TAB = \frac{1}{2} - AMB$	

33 Als *X op* de zwarte bogen ligt geldt $-AXB = -ACB$, volgens de stelling van de constante hoek.
Als *X buiten* of *binnen* de zwarte contour ligt is $-AXB$ *kleiner* of *groter* dan $-ACB$.



Overzicht:

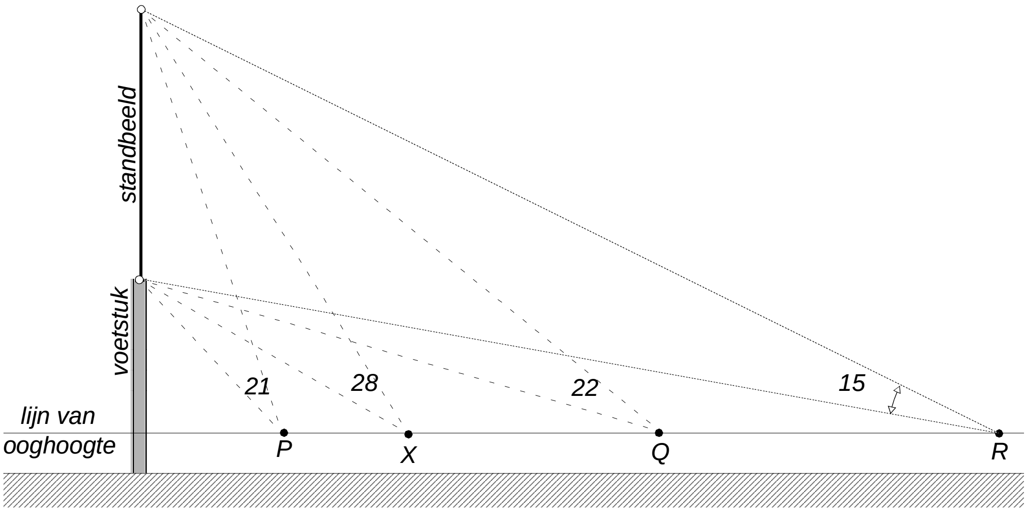
Gegeven twee gelijke cirkels door A en B. C ligt op een van de cirkels, buiten de andere. Er geldt	
X in het donkergrijze binnengebied	$-AXB > -ACB$
X op de zwarte rand	$-AXB = -ACB$
*X i*n het lichtgrijze buitengebied	$-AXB < -ACB$

Voorbeelduitwerkingen hoofdstuk 4: Standbeelden en cirkelnetten

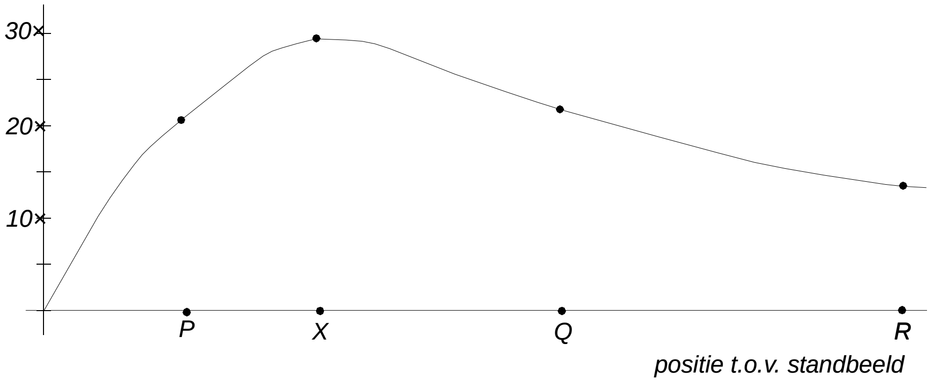
17: Zien onder de grootste hoek

1

a. Meten

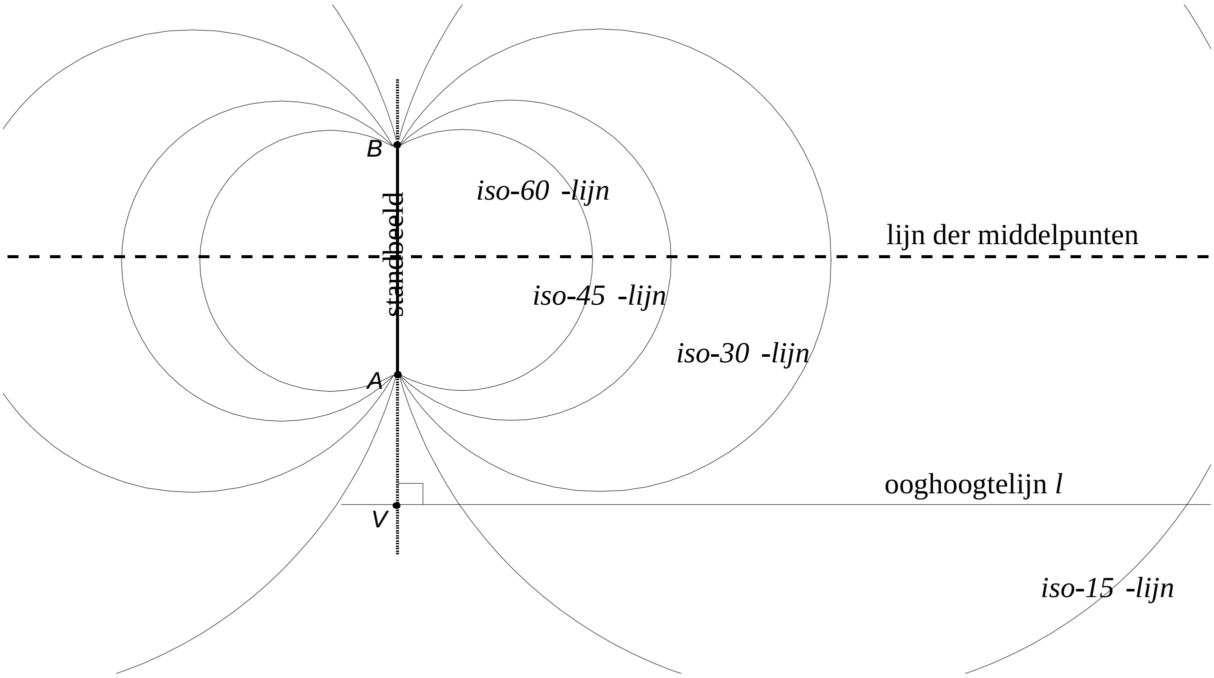


b. Grafiek



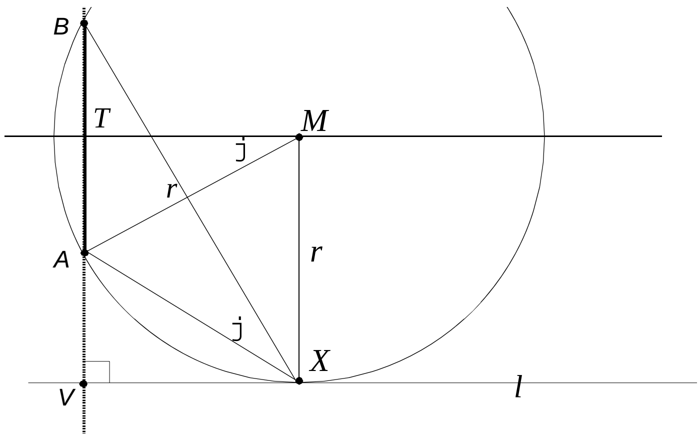
c.

2



a.
b.
c. Alle middelpunten liggen op de middelloodlijn van *AB*.

3



a. *'De cirkel is kleiner/groter als de hoek groter/kleiner is.'*
b. De kleinst mogelijke cirkel die nog aan de lijn *l* raakt.
c.

4

a.
b. $r = (|VB| + |VA|)/2$.
c. *T* is het midden van AB.
Gebruik driehoek *ATM*.
$|TM| = |TX|$
$|TA| = (|VB| – |VA|)/2$
Pythagoras: $r^2 = |TA|^2 + |TM|^2$

Dus: $\left(\frac{|VA| + |VB|}{2}\right)^2 = \left(\frac{|VB| - |VA|}{2}\right)^2 + |VX|^2$

Bij uitwerken vallen de kwadraten van $|VB|$ en $|VA|$ links en rechts tegen elkaar weg.
Het gaat voorspoedig naar:

$$|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|.$$

d. Zie de figuur. De stelling van de halve middelpuntshoek wordt gebruikt om aan te tonen dat de twee hoeken met j inderdaad gelijk zijn. Rekenen bij *M*:

$$\sin j = \frac{|TA|}{r} = \frac{(|VB| - |VA|)/2}{(|VA| + |VB|)/2} = \frac{|VB| - |VA|}{|VA| + |VB|}$$

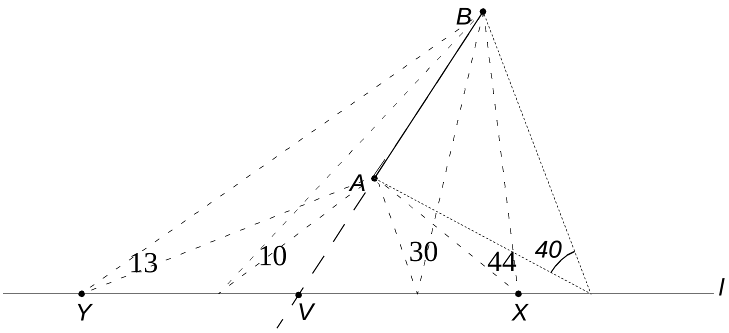
5 Invullen:

$$\sin j = \frac{92{,}90 - 46{,}50}{92{,}90 + 46{,}50} = 0{,}33285$$

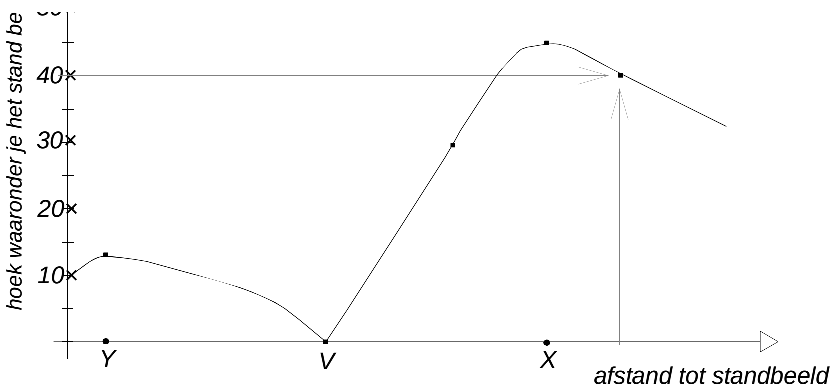
$$j = 19{,}44$$

$|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|$ = (92.90+46.50)(92.90-46.50)
De juiste afstand is: 80.42 meter.

6 A



a. .



b. Aan de rechterkant.

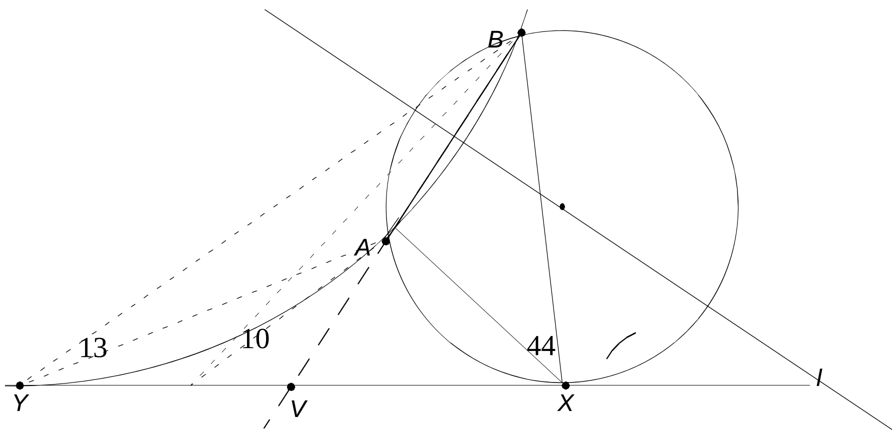
7

a.

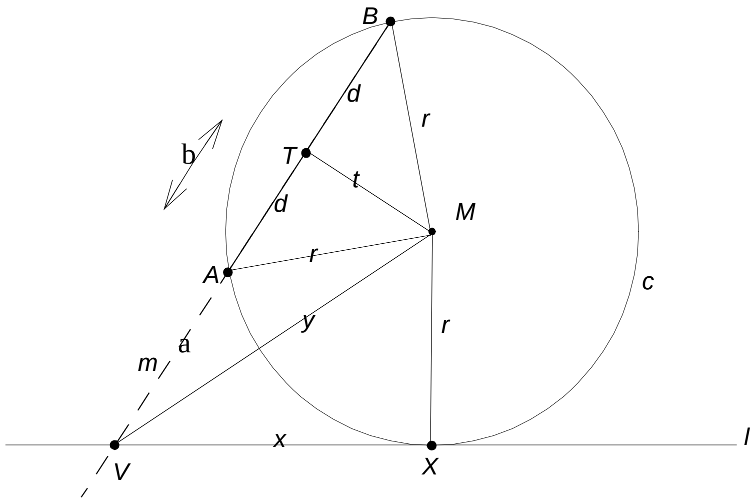
b.

c. Ze zijn praktisch even groot.
In de tekening 36.5 mm.

d. *$|36.5|^2 = |23| \bullet |58|$?*
Klopt heel behoorlijk:
1332.25 en 1334!



8 .



a.

b. In de tekening zijn nog wat afkortingsletters toegevoegd. *b* staat voor $|VB|$. Driemaal Pythagoras:

I: $y^2 = r^2 + x^2$

II: $r^2 = d^2 + t^2$

III: $(a + d)^2 + t^2 = y^2$

Vul y^2 vanuit I in III in en gebruik dan II. Je wilt *y*, *t* en *r* kwijt. Gevolg is:

IV: $(a + d)^2 + t^2 = r^2 + x^2 = d^2 + t^2 + x^2$

Ofwel:

$$(a + d)^2 - d^2 = x^2$$

Dat laatste ontbind je - evntueel na uitwerken - tot:

$$a \bullet (a + 2d) = x^2$$

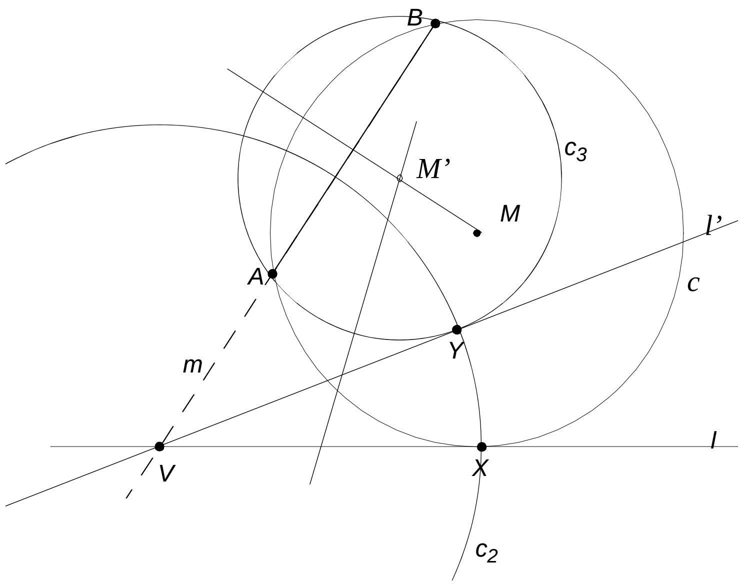
Anders genoteerd: $|VA| \bullet |VB| = |VX|^2$.

9

a. Teken de cirkel c_2 met middelpunt *V* die door *X* gaat. *Y* is het snijpunt met *l'*.

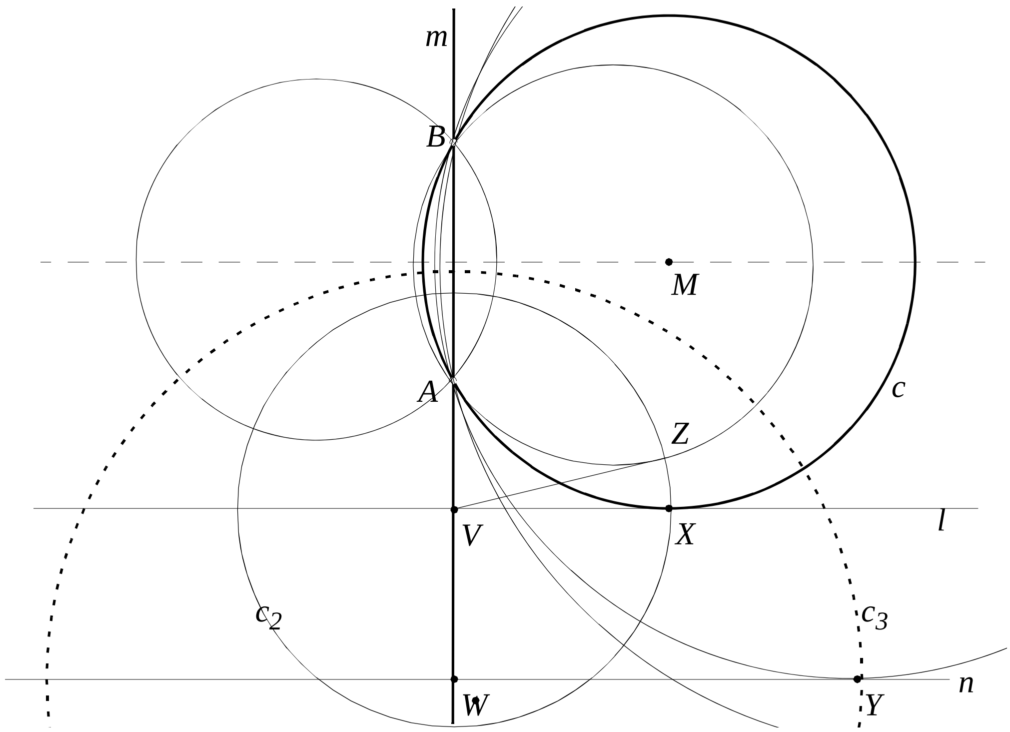
b. De middelloodlijn van *AY* snijden met die van *AB*. Dit geeft *M'* en de cirkel c_3.

c. De cirkel van opgave **a**. Omdat alle raakkoorden vanuit *V* gelijk zijn.



10 $|VA| \bullet |VB| = |VX|^2 = |VC| \bullet |VD|$

11



a.

b. c_2. Dat is zo'n cirkel als in **10 c** optradt. Hij bevat alle raakpunten. De raakkoorden aan de vier cirkels (*VX*, *VZ* enzovoort) gaan allemaal door *V* en staan dus loodrecht op die cirkel om *V*.

12

a.

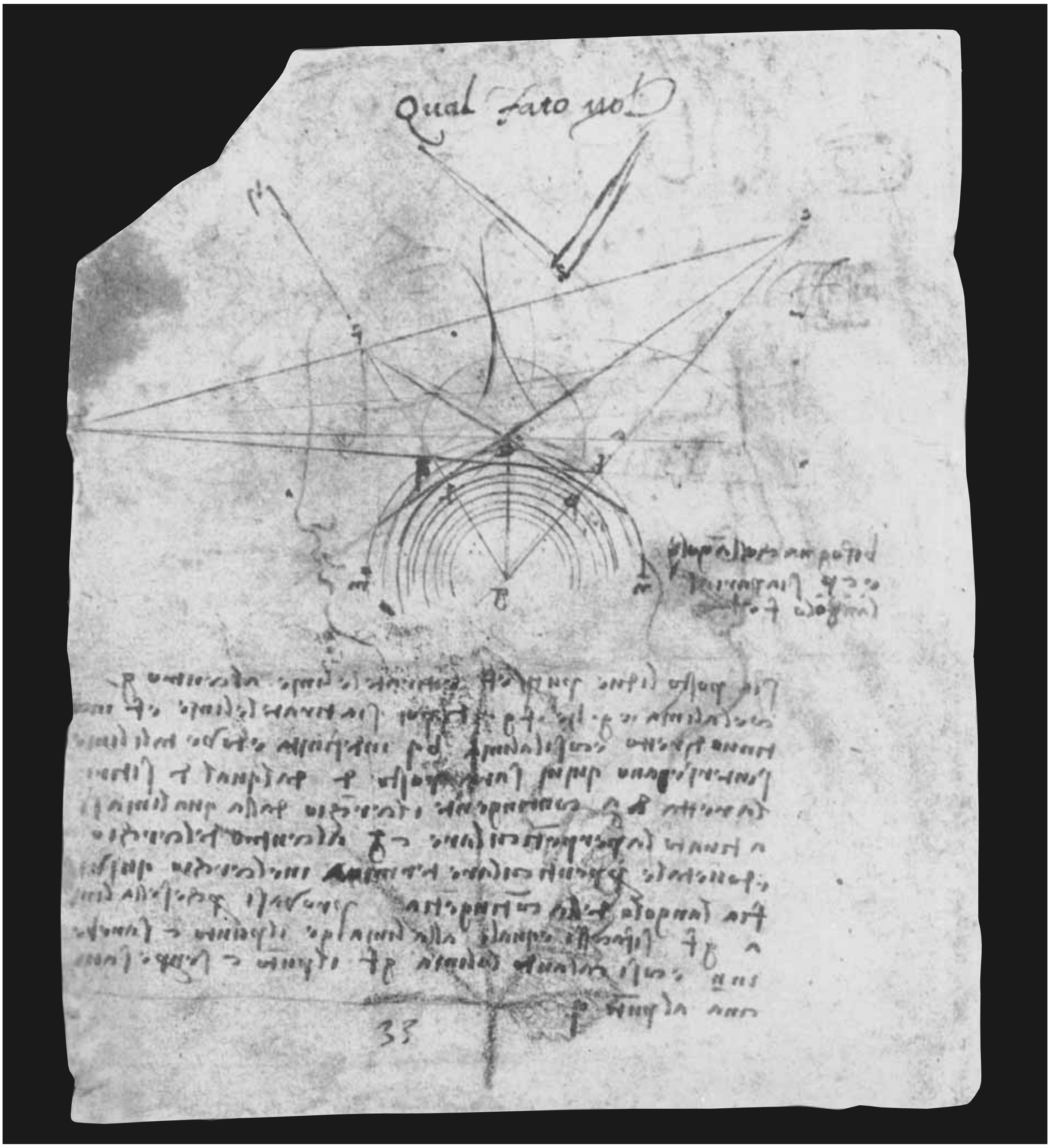
b. Snijpunten van c_3 met die cirkels..

c. Die zijn ook allemaal 90 .

13 Serie I bestaat uit *iso-hoek-cirkels*.
Serie II zijn de cirkels zoals die in opgave 10c optraden.
De cirkels van serie I snijden elkaar allemaal in de twee zwarte punten.
Een cirkel van serie I en een van serie II snijden elkaar in twee punten en altijd onder 90 graden.
De cirkels van serie II snijden elkaar onderling niet. Want als er een snijpunt was, zou door dat snijpunt precies een cirkel van serie I gaan en dan kunnen niet beide cirkels van serie II daar loodrecht op staan.

Denken in cirkels en lijnen

Voortgezette Meetkunde, deel II B



Nieuwe wiskunde voor de tweede fase
Profiel N&T
Freudenthal instituut

Bij de voorplaat van dit boekje:

De tekening op de voorpagina komt uit de aantekeningen van Leonardo da Vinci (1452 - 1519).
Alle elementen van de titel van dit boekje komen erin voor: cirkels, lijnen, denken.
Leonardo was schilder, beeldhouwer, architect, wiskundige, ingenieur; een zo grote veelzijdigheid was in die tijd niet uitzonderlijk, maar Leonardo blonk uit in al deze onderwerpen. Hij gebruikte zijn meetkundige inzichten onder andere om beter te kunnen schilderen en machines te kunnen bouwen.

Inhoud

Denken in cirkels en lijnen, Voortgezette Meetkunde deel II B

Project:	Wiskunde voor de tweede fase
Profiel:	N&T
Domein:	Voortgezette Meetkunde
Klas:	VWO 5 of 6
Staat:	Herziene versie, juni 1998
Ontwerp:	Aad Goddijn, Wolfgang Reuter

Het gehele domein Voortgezette Meetkunde omvat:

Deel I:	Afstanden, Grenzen en Gebieden
Deel II, A en B:	Denken in Cirkels en Lijnen
Deel III:	Conflictlijnen en Spiegels.

© **Freudenthal instituut, juni 1998**

Hoofdstuk 5:

Oefenen in bewijzen

In dit hoofdstuk oefen je met wat in *Denken in Cirkels en Lijnen, deel A* aan bod is geweest.

In een van de oefenopgaven speelt een beroemde scene uit een film van Buster Keaton een rol. Vandaar dat Buster Keaton de voorpagina van dit hoofdstuk siert.

Wat vooraf ging in de eerste helft

Dit boekje is de *tweede* helft van *Denken in Cirkels en Lijnen.* Op het vorige deel stond *deel A*.
Dit is, uiteraard, *deel B*.

bewijzen

In *deel A* heb je geleerd:
- wat bewijzen bij meetkunde zijn
- hoe je bewijzen kunt opschrijven
- waar je in bewijzen naar mag verwijzen.

Wat dat laatste betreft: er was een *Overzicht bekende meetkunde* opgenomen.
In dit boekje is dat overzicht achterin nog eens opgenomen. Zie bladzijde 203.
Je hebt enkele speciale vormen van bewijzen gezien:
- bewijzen uit het ongerijmde
- bewijzen in (wat toen zo genoemd werd) 1-1-bis vorm.

voor en tegen

Je hebt verder gezien:
- dat veel voorbeelden niets bewijzen
- dat een tegenvoorbeeld genoeg is om een bewering te weerleggen.

nieuwe stellingen

Verder heb je een aantal nieuwe stellingen geleerd over:
- bijzondere lijnen in de driehoek
- cirkels, hoeken en bogen
- koordenvierhoeken
- raaklijnen aan de cirkel.

Achterin dit boekje, bladzijde 206, zijn de stellingen van deel A weer opgenomen.

standbeeld, cirkelnet

In het slothoofdstuk werd een speciaal optimaliseringsvraagstuk opgelost:
- waar moet je staan om een standbeeld onder maximale hoek te zien?

Daarbij kwam ook nog een bijzonder patroon van cirkels te voorschijn.

Herhaling in dit hoofdstuk, hoofdstuk 5

In dít hoofdstuk staan enkele opdrachten die niet al te moeilijk zijn na deel A. Het handigste is deel A in de buurt te hebben. Na deze oefeningen ben je warm gedraaid voor de volgende drie onderdelen, waar veel initiatief van jezelf wordt verwacht. Je kunt daarbij wel steeds teruggrijpen naar deel A. Dat is echt de bedoeling. Zo'n lijst met gegeven beweringen als het *Overzicht bekende meetkunde* hoef je immers niet uit je hoofd te kennen. Je moet ermee kunnen werken.

Hoofdstuk 6: meer over bewijzen

Het gaat dan vooral om: hoe vind je nu zelfstandig een aanpak voor een bewijs. Dat is immers het lastigste. In deel A zijn we daar al mee begonnen, door met deze drieslag te werken:
– tekenen en verkennen
– redeneren en zoeken
– opschrijven en afwerken
In hoofdstuk 6 gaan we vooral methodisch leren *zoeken* naar bewijzen.

Hoofdstuk 7 en 8: tekenen en redeneren met de computer

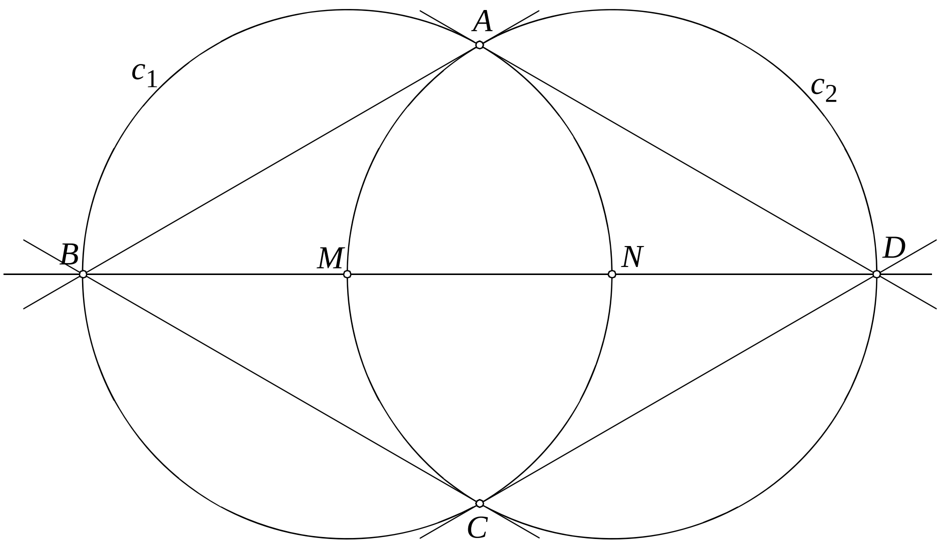
Aan de hand van een speciaal computerprogramma voor dit soort meetkunde leer je (fraaie) nieuwe problemen kennen. Figuren die op je tekening met moeite in elkaar werden gezet, maak je nu met groot gemak en je kunt ze nog laten bewegen ook. Zo ontdek je zelfs nieuwe verbanden. Maar: je zult wel – achteraf – moeten bewijzen wat je op het scherm meent te zien, dat spreekt vanzelf.

Hoofdstuk 9: onderzoeksopdrachten

Het slot van dit boekje bestaat uit enkele opdrachten waarbij betrekkelijk weinig aanwijzingen staan. Je kiest er in overleg een uit en vaart dan je eigen koers.

Twee cirkels: bewijzen opschrijven

1 Teken met passer en liniaal nauwkeurig onderstaande figuur.



M en N zijn de middelpunten van de cirkels c_1 en c_2. De rest is duidelijk uit de figuur. Bewijs de volgende twee beweringen en schrijf je bewijs met volledige motiveringen (nummers van het overzicht, of bewezen stellingen) uit.

a. $ABCD$ is een ruit.

b. De lijn AB raakt in A aan de cirkel c_2.

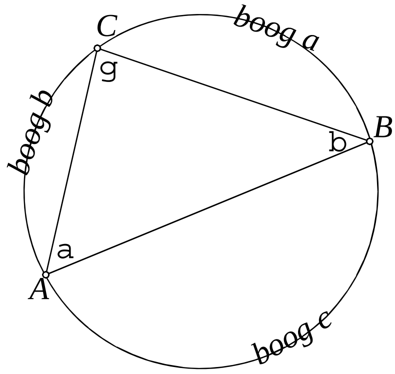
Uiteraard zijn er nog drie rakende lijnen: BC aan c_2, AD en CD aan c_1.

Gegeven boogverhoudingen: hoeken en bogen

2 Bij een driehoek en zijn omgeschreven cirkel horen drie zijden en drie bogen. Zie de figuur.

a. Waarom bestaat er geen driehoek waarvan de zijden zich verhouden als 1 : 2 : 3?

b. Onderzoek nu het geval dat de *bogen* zich verhouden als 1 : 2 : 3. Hoe groot zijn dan de hoeken van deze driehoek?



3 Kun je bij elke bogenverhouding $a : b : c$ een driehoek vinden? Wat zijn de hoeken?

4 Ook bij vijfhoeken waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen, zijn zulke vragen mogelijk.

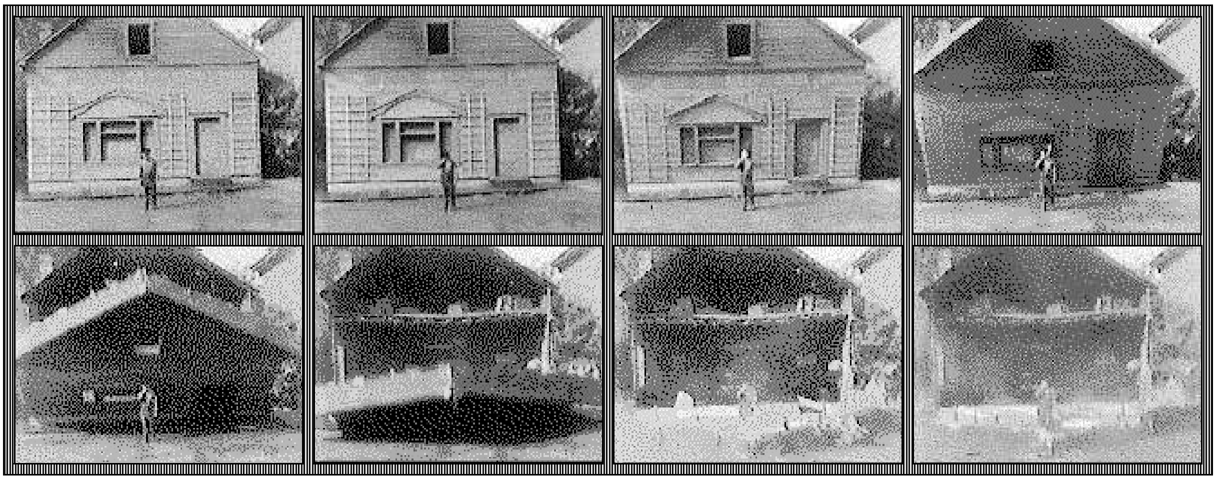
a. Teken een vijfhoek met vijf hoekpunten op een cirkel met bijhorende bogenverhouding 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Wat zijn de hoeken van de vijfhoek zelf, als de bogen in de volgorde 1-2-3-4-5 op de cirkel liggen?

b. Teken een voorbeeld waarin de volgorde der bogen anders is en waarin de vijfhoek *twee* gelijke hoeken heeft. Bereken ook de hoeken van de vijfhoek.

c. Teken ook een voorbeeld waarin de volgorde der bogen weer anders is en waarin de vijfhoek *twee paar* gelijke hoeken heeft. Bereken ook de hoeken hiervan.

Buster Keaton: tekenen, rekenen en terugbladeren

In een van zijn films staat Buster Keaton voor een huis, waarvan de gevel omvalt. Hij heeft geluk, zie de fotoserie.



Buster Keaton speelde zo'n scène zelf, hij gebruikte nooit een stand-in.

5 We nemen de voorbereiding van de scène even onder de loep.

a. Met behulp van de eerste foto kun je een redelijke schatting maken van de belangrijke maten: hoogte van onder- en bovenkant van het bovenraam. Doe dat.

b. Maak een zijaanzicht van de situatie, waarin je ook de bewegingen kunt aangeven. Geef 'veilige' plekken aan om te gaan staan.

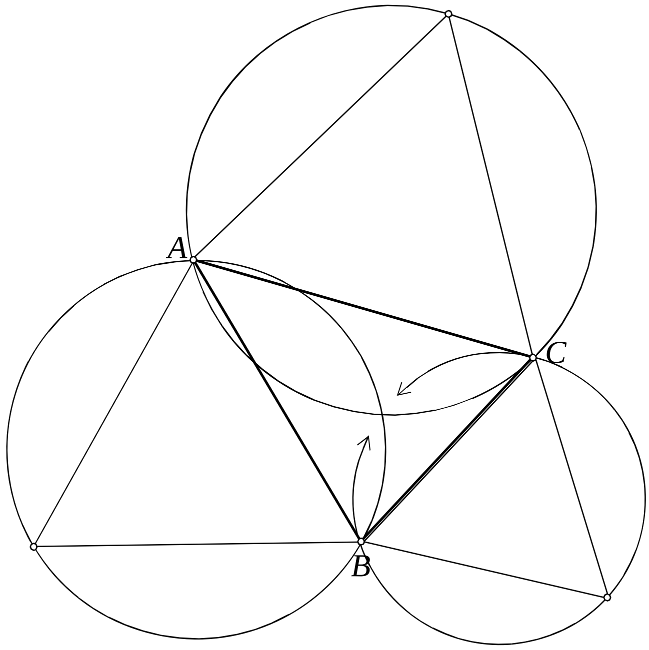
c. Niet alleen de plek is belangrijk. De acteur mag ook niet te lang zijn, in het zijaanzicht kun je dat zien.
Er is een theoretisch maximale lengte. Bereken die.

d. Voor de hand ligt, dat je zo gaat staan, dat je uiteindelijk midden in het omgevallen raam staat. Welke maximale lengte hoort daarbij?

e. (Ga bij dit onderdeel uit van een acteur zonder noemenswaardige lengte, een punt als het ware).
In hoofdstuk 4 heb je gezien hoe je de plek kan bepalen waarvandaan de onder- en bovenkant van het raam onder zo groot mogelijke hoek gezien wordt. Is het nodig om tijdens het vallen te verplaatsen om de hoek zo groot mogelijk te houden? Licht je antwoord toe met wat in hoofdstuk 4 is vastgesteld.

Omliggende driehoeken: bewijs in bekende vorm

6 In onderstaande figuur zijn drie gelijkzijdige driehoeken tegen de zijden van driehoek *ABC* geplakt. De omgeschreven cirkels van de gelijkzijdige driehoeken lijken door één punt te gaan. Dit dient bewezen te worden.
Tips: Kijk terug naar bladzijde 30 en 31 van deel A.



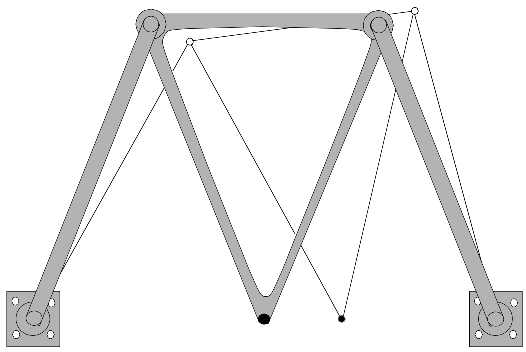
Dat wil zeggen: vind een *karakterisering* voor punten op de kleine bogen. Noem het *snijpunt van twee van die bogen S*; toon aan dat *S* op de derde boog ligt.
a. Wat is je karakterisering?
b. Welke stellingen gebruik je?
c. Noteer het bewijs in de vorm van bladzijde 30 van deel A.

Uit het ongerijmde: *How to Draw a Straight Line?*

De volgende opgave stamt uit het tijdperk van de industriële revolutie.
Bij het bouwen van een stoommachine was het van belang dat via een mechaniek van scharnierende stangen een bewegend punt gemaakt kon worden, dat zonder zelf langs een rechte staaf te glijden, toch alleen rechtlijnig kon bewegen. Dat is moeilijker dan je op het eerste gezicht zou verwachten.
Denk maar eens na: een cirkelbeweging heb je al te pakken als je een ruwe tak met één spijker ergens vastzet. De tak kan dan nog draaien om de spijker en een punt ervan beschrijft een cirkel, zonder dat er een ‘echte’ cirkel is gebruikt.
Een lijn teken je in het algemeen met een liniaal. Maar hoe maak je die liniaal recht? Met een andere liniaal? Maar hoe werd díe dan ooit recht gemaakt?
Na deze inleiding zul je de titel van een beroemd essay van A.B. Kempe uit 1877 beter weten te waarderen:

How to Draw a Straight Line?

het stangenmechaniek van Robert Manchester



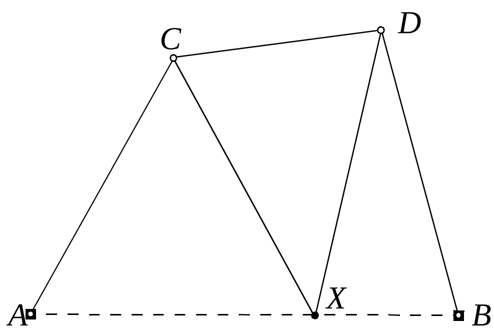
Een van de pogingen in de 18e eeuw is het stangenmechanisme van Robert Manchester.
Er zijn twee vaste punten onderaan. Deze liggen op afstand $2a$ van elkaar. Aan die vaste punten zitten draaibare staven van lengte b; aan hun einden zit, ook weer draaibaar, een driehoek met twee zijden b en een zijde a. (b is groter dan a). Het is duidelijk dat het geheel nog flexibel is.
Kijk nu naar het zwarte punt van de driehoek. Dat kan zich midden tussen de twee vaste punten bevinden, maar ook naar de vaste punten toe bewegen. Een tweede mogelijke stand is met dunne lijntjes aangegeven. Het ligt dus wel voor de hand te veronderstellen dat bij bewegen van het mechaniek de baan van het zwarte punt een rechte lijn is.

7 Maak het mechanisme van karton na. Neem als maten: $a = 8$ en $b = 14$ cm.
Je hebt een groot stuk karton als ondergrond nodig, twee stroken en een driehoek. Prik met een punaise gaatjes op de juiste plekken. De twee *vaste* draaipunten van het mechaniek maak je met punaises die je van onder naar boven door de grondplaat steekt. De *bewegende* draaipunten zijn ook punaises; die schuiven met hun platte kant boven over de grondplaat.
Wat is de nog mogelijke beweging van de scherpe punt van de driehoek? Zuiver rechtlijnig, bijna rechtlijnig?

bewijs uit het ongerijmde

Na het voorgaande verhaal heb je wel door: de beweging van het zwarte punt is *niet* zuiver rechtlijnig, al is die haast niet daarvan te onderscheiden. Nu gaan we dit bewijzen, en wel *uit het ongerijmde*. Het bewijs maakt ook nog gebruik van een subtiele truc, die je gratis krijgt. Het gaat erom dat je de techniek van het werken met het ongerijmde nog eens oefent; zulke trucs als in vraag **8b** bedenkt niet iedereen en dat hoeft ook niet. Je kunt er wel van genieten dat het bewijs dan ineens ‘loopt’.

8 ***Veronderstel nu eens dat*** het scherpe punt zich inderdaad over een lijn beweegt. Dat kan dan alleen de lijn zijn door de twee vaste punten. Immers in die punten kun je met het bewuste punt precies komen. In deze tekening staat zo’n veronderstelde stand getekend. De aanname is dus: ***X ligt op AB***.

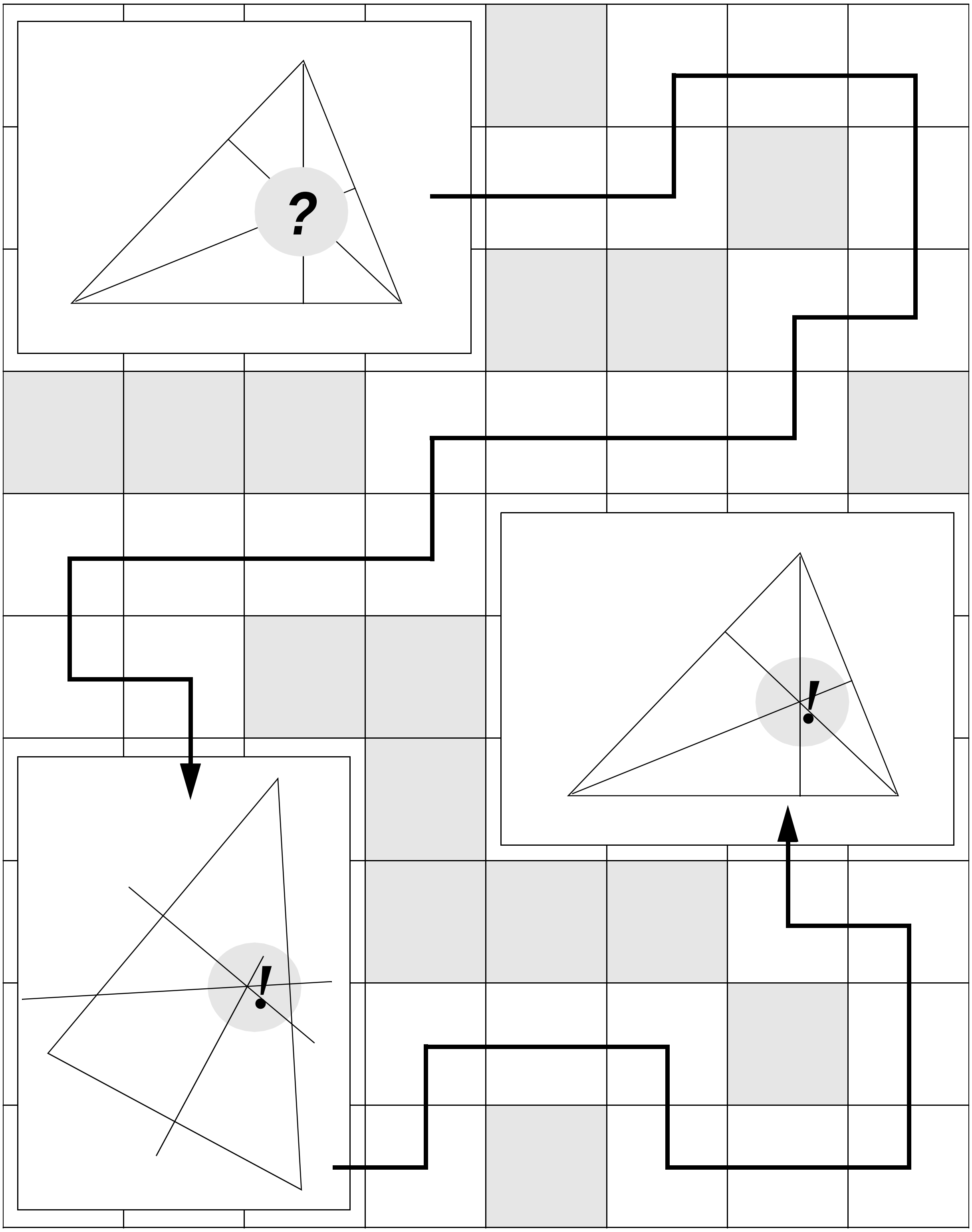


a. Zet alle maten er in de tekening bij.

b. Teken nu de *hoogtelijnen* uit C en D in de driehoeken AXC en XBD. Deze zijn evenwijdig. Bereken hoever die hoogtelijnen uit elkaar liggen en geef die afstand ook aan in de figuur.

c. Laat zien dat er nu iets misgaat. Maak daarna het bewijs uit het ongerijmde, dat *X niet op AB* ligt, verder af.

Hoofdstuk 6: Bewijzen vinden



19: Inleiding

terugblik

In vorige hoofdstukken werden de bewijzen van de stellingen je in kleine brokjes voorgeschoteld. Je hoefde nog niet erg veel je eigen weg te kiezen.
Je hebt wel geleerd:

– Wat bewijzen is.
– Dat een bewijs soms schetsmatig opgeschreven kan worden, maar dat je de zaken ook tot in heel kleine details op kunt schrijven.
– Dat er altijd de driedelige vorm *Gegeven - Te bewijzen - Bewijs* aanwezig is.
– Dat het vinden van een bewijs begint met zoeken naar een *idee*, dat je daarna *details* invult en ten slotte alles *ordelijk genoteerd* vastlegt. De laatste twee stappen hiervan heb je uitvoerig gedaan.
– Je hebt vooral in de oefenopgaven geleerd in diverse situaties te herkennen hoe je een bekende stelling kunt toepassen.

werkwijze bij dit hoofdstuk

Het is duidelijk wat nu gaat gebeuren: oefenen in het vinden van een bewijs. Dat doen we niet zoals bij eerdere hoofdstukken, want dan heb je te weinig kans om zelf te zoeken. We pakken het anders aan.
Straks worden verschillende zoekmethoden uitgelegd en soms met een voorbeeld toegelicht. Daarna krijg je een probleem voorgezet waarmee je aan de slag kunt.
De taken die je uitvoert, zijn dus wat omvangrijker.

aanwijzingen

Wat je moet proberen is: bewijzen zoveel mogelijk zelf te vinden, gebruikmakend van de aangegeven zoekmethode. Als je vastloopt, kun je de *aanwijzingen* inzien, die beginnen op bladzijde 168. Maar lees die aanwijzingen niet meteen in hun geheel. Probeer steeds weer – met liefst één aanwijzing – zelf verder te komen.

voorbeelduitwerkingen

Er zijn ook *voorbeelduitwerkingen*, die beginnen op bladzijde 178. De bedoeling is dat je die alleen achteraf inziet, als je zelf al een bewijs hebt gevonden.
Loop je echt helemaal vast en heb je ook geen steun aan de aanwijzingen, dan kun je ook naar die uitwerkingen kijken.

bewijsplan is hoofdzaak

Het gaat steeds om het vinden van een goed bewijsplan. Je uitwerking geeft een duidelijk bewijsverhaal. Het hoeft niet per se in de twee-kolommen-vorm van vorige hoofdstukken genoteerd te worden.

namen

De zoekmethoden geven we in dit hoofdstuk namen:

feest der herkenning
schakels
associaties
vertaling
opsplitsen
plagiaat

Dat zijn ook de titels van de volgende paragrafen.
De opbouw van dit hoofdstuk is dus niet vanuit de wiskunde bedacht, maar vanuit de zoekmanieren.

20: Feest der herkenning

toelichting: *Yesterday*

Stel je voor: je loopt over een plein in Budapest en daar zit een jongen achter een rijtje voor een deel gevulde flessen water. Hij ragt erop met twee lepels. Het duurt even, maar dan herken je het: *Yesterday*, van The Beatles. Dit is het feest der herkenning.

Bij meetkunde heb je vaak een figuur nodig om te herkennen dat het om oude wijn in nieuwe zakken gaat.

1 Hieronder staan vier beweringen. Maak bij elke van deze vier een tekening en geef aan welke (eerder bewezen) stelling direct het beweerde rechtvaardigt.

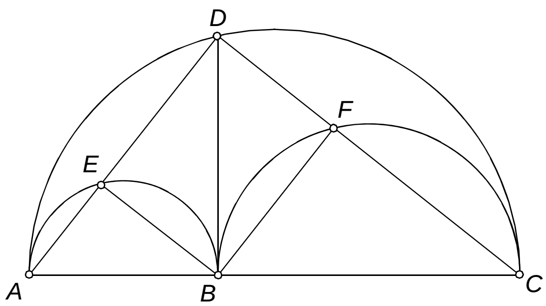
- **a.** HOEKEN IN DE KOORDENVIERHOEK:
  Als vierhoek *ABCD* een koordenvierhoek is, dan geldt $\angle ACB = \angle ADB$.
- **b.** DRIEHOEKEN MET EEN GEMEENSCHAPPELIJKE ZIJDE EN EEN GELIJKE HOEK:
  Als twee driehoeken de zijde *AB* gemeenschappelijk hebben, *C* en *D* aan dezelfde kant van deze zijde liggen en $\angle ACB = \angle ADB$, dan is vierhoek *ABCD* een koordenvierhoek.
- **c.** VIERHOEKEN MET TWEE OVERSTAANDE RECHTE HOEKEN:
  Als in een vierhoek *ABCD* geldt: $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, dan is *ABCD* een koordenvierhoek.
- **d.** RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN MET DEZELFDE SCHUINE ZIJDE:
  Als in een vierhoek *ABCD* geldt: de driehoeken *ABD* en *ACD* zijn rechthoekig en *AD* is de schuine zijde van beide, dan is *ABCD* een koordenvierhoek.

Omdat dit nu bewezen beweringen zijn, mag je er verderop naar verwijzen.

verborgen melodie

Een beetje moeilijker wordt het als je stuit op een zangkwartet (men is echt muzikaal in Budapest). Een van de stemmen zingt een bekende melodie, de rest heeft een eigen melodie. Haal je de hoofdstem eruit?

2 In deze figuur zie je drie halve cirkels. De middellijnen van de kleine cirkels vormen samen die van de grote. *BD* is de gemeenschappelijke raaklijn van de kleine halve cirkels.
Je moet bewijzen:
DEBF is een rechthoek.
Handel als volgt:



- **a.** Zoek naar een hoofdthema. Het zit diverse keren in de figuur!
- **b.** Noteer nu zelf: het bewijs in heldere, maar niet al te gedetailleerde vorm.

(Deze figuur bevat nóg een stukje verborgen schoonheid, dat we later in het daglicht zullen zetten.)

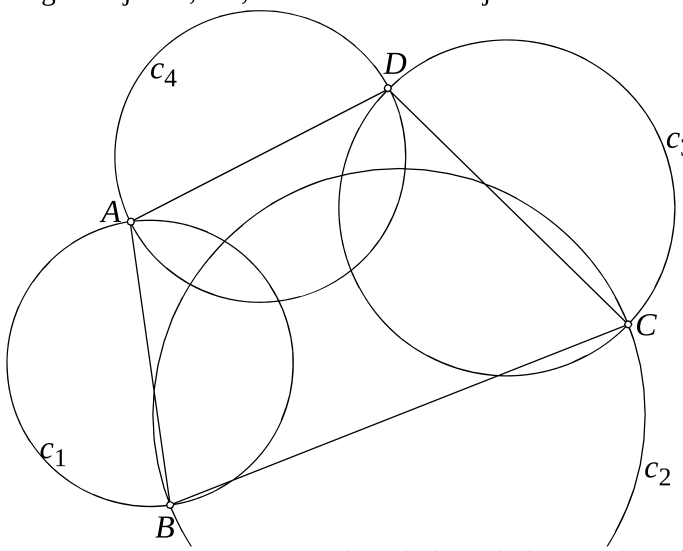
moeilijkheden en hints

Het herkennen van de figuur kan worden belemmerd:

– Doordat soms de te herkennen figuur nog niet geheel getekend is; bijvoorbeeld omdat de hoekpunten er wel zijn, maar de zijden niet.
  Je moet dan de figuur aanvullen.
– Soms kan de figuur die herkend moet worden, in *vorm* behoorlijk afwijken van wat er bij de stelling staat, waarbij ook nog alle letters verschillend zijn.
  Je moet dan een koppeling aanbrengen tussen de namen van punten in de bekende figuur en de nieuwe figuur.

Oefening in het trotseren van deze problemen volgt nu.
Bij de nu volgende opgave is het ‘thema’ nu wel bekend.

3 In deze figuur zijn AB, BC, CD en DA middellijnen van de cirkels c_1, c_2, c_3 en c_4.



a. Er zijn nog zes snijpunten van de cirkels onderling in deze figuur. Vier daarvan hebben een bijzondere ligging. Zoek zelf welke dat zijn door de figuur aan te vullen met geschikte andere lijnen.
b. *Bewijs* nu wat je bij **a** hebt gevonden. Misschien moet je nog meer toevoegen aan de tekening om het ‘thema’ helder te laten uitkomen.
c. Wat moet gelden om de vier cirkels door één punt te laten gaan?

Ook bij de volgende opgaven kom je verder als je iets herkent uit hoofdstuk 1 van deel A, eventueel nadat je weer de figuur hebt aangevuld. Deze keer is er geen tekening. In je eigen figuur zul je iets moeten ‘herkennen’!

4 De middens van de zijden van een vierhoek vormen een speciaal soort vierhoek.
a. Maak een tekening. Welk thema uit hoofdstuk 1 herken je?
b. Welke soort vierhoek is dat?
c. Bewijs je bewering!

herkennen in het kort

Je herkent in iets nieuws een bekende situatie. Het herkennen gaat makkelijker als je
– een figuur bij de gegevens tekent
– een figuur aanvult tot een bekende figuur
– de nieuwe figuur met oude bekenden vergelijkt.

belangrijke bekenden

In het voorgaande heb je geoefend in het herkennen van:
- Thales-cirkels en rechte hoeken
- middenparallellen
- cirkels en rechte hoeken

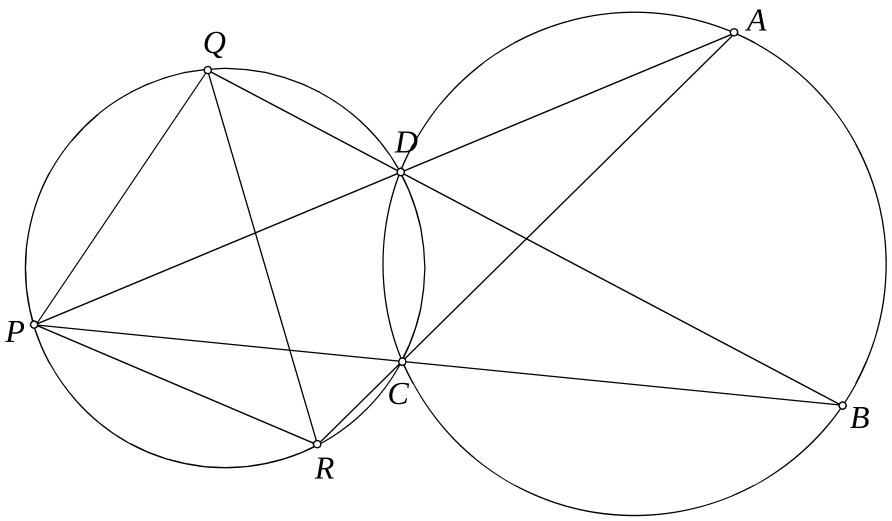
Andere belangrijke bekenden zijn:
- koordenvierhoeken, vooral situaties waarin je een vierhoek herkent als koordenvierhoek, doordat overstaande hoeken ervan samen 180 zijn
- allerlei constante hoeksituaties bij cirkels
- gelijke driehoeken
- enzovoorts.

Ook van belang is:

als je iets herkent, geef het dan aan in de figuur en kijk of je eenvoudige conclusies kunt trekken, ook al leveren die niet onmiddellijk op wat je moet bewijzen. Met de bekende tekentaal geef je aan wat je vindt.

Bij het volgende probleem kun je dit oefenen.

5 In onderstaande figuur zie je:
- cirkel c_1 met vier punten A, B, C en D
- het snijpunt P van AD en BC
- cirkel c_2 door C, D en P
- de snijpunten Q en R van de lijnen BD en AC met c_2.



Bewijs nu: *driehoek PQR is gelijkbenig*.

Dus:

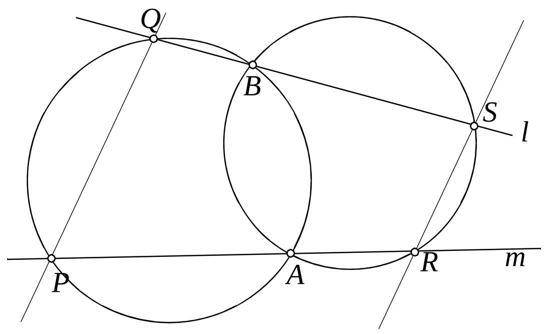
herken een belangrijke bekende figuur en brei daarop door!

21: Schakels

schakels zoeken

Vaak komt de situatie voort dat je een gelijkheid als $\angle X = \angle Y$ moet bewijzen en er is niet *direct* te zien waarom die hoeken gelijk zijn.
Als er nog een andere hoek is, zeg $\angle Z$, waarvan je kunt bewijzen dat zowel $\angle X = \angle Z$ als $\angle Y = \angle Z$, dan ben je natuurlijk ook klaar.
Of je vindt dat zowel $\angle X = 180^\circ - \angle Z$ als $\angle Y = 180^\circ - \angle Z$. Ook dan rinkelt de kassa.
$\angle Z$ vormt een *schakel* om van de ene hoek naar de andere te komen. Je bewijst de gelijkheid van $\angle X$ en $\angle Y$ *via* hoek $\angle Z$.
Een *schakel* in een bewijs kan van alles zijn: niet per se één hoek of één punt. Soms heb je ook meerdere tussenschakels nodig, of twee schakels tegelijk.

6 Hier zijn twee cirkels gegeven en twee lijnen l en m door de snijpunten A en B van de cirkels.
Te bewijzen: $PQ \parallel RS$.



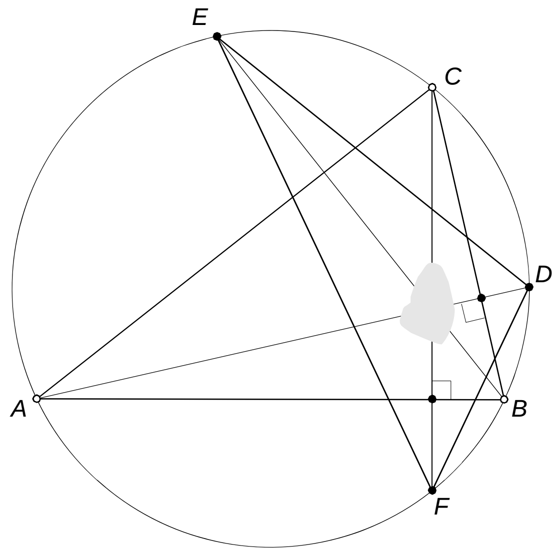
Aanpak: ga uit van het idee dat je evenwijdigheid moet bewijzen via het aanwijzen van gelijke hoeken (zie bladzijde 6 nr. 2a en 2b) en zoek naar een schakel. Daarbij spelen de cirkel en de punten A en/of B uiteraard een rol.

(even tussendoor)

7 In de figuur bij opgaver **5** op de vorige bladzijde zijn QR en AB evenwijdig. Bewijs dit.

De volgende opgave leidt op een nieuwe manier naar een al bekende stelling. Die stelling moet je dus in het bewijs even niet gebruiken!

8 Gegeven een scherphoekige driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel. De drie hoogtelijnen snijden deze cirkel nog in D, E en F.
Te bewijzen: de hoogtelijnen van driehoek ABC zijn de deellijnen van driehoek DEF.



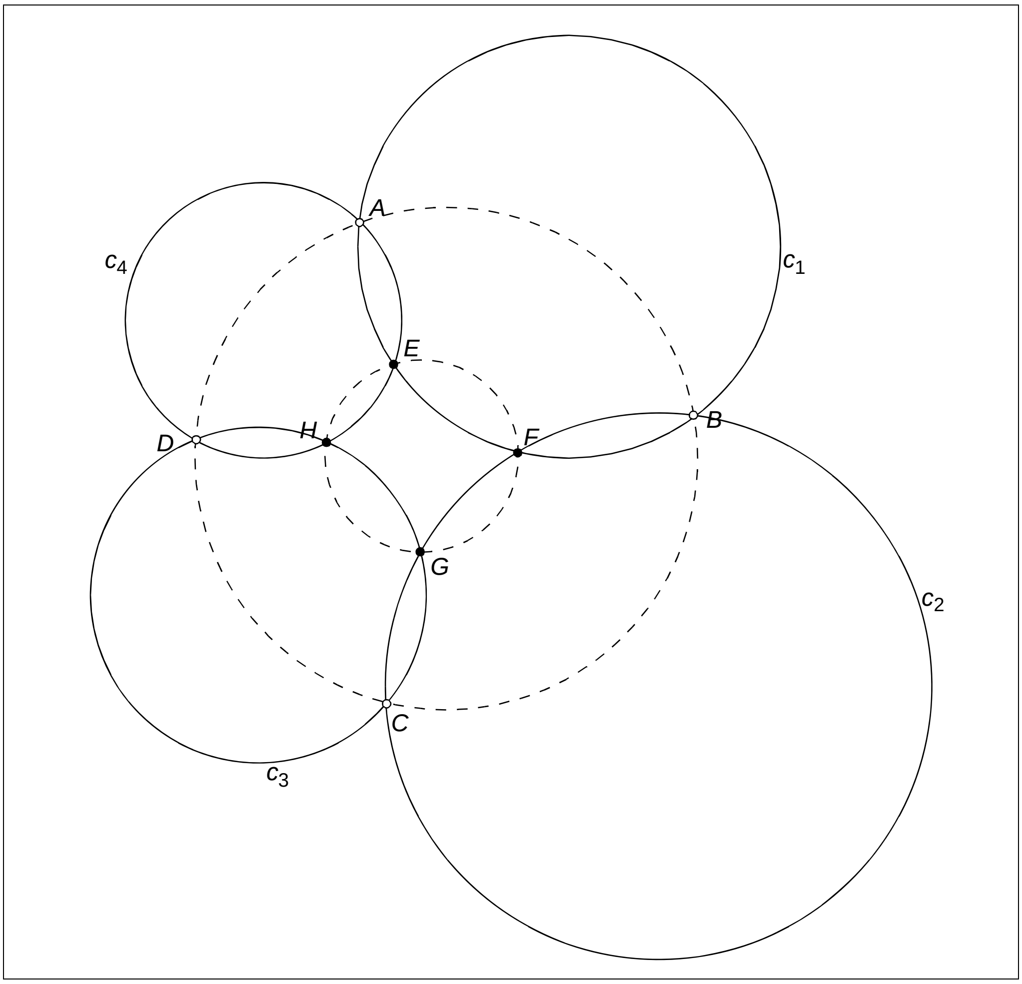
Aanpak:
Lijn EB zou deellijn van $\angle DEF$ moeten zijn.
Probeer de *beide* hoeken, die dan aan elkaar gelijk moeten zijn, nog elders in de figuur te vinden op grond van bekende stellingen.
Kunnen die twee nieuwe hoeken via een andere hoek geschakeld worden?

9 Hoe volgt hier nu de stelling van de hoogtelijnen uit? Is het bewijs wel algemeen?

Nu bekijken we twee situaties waarin je meerdere *schakels* zult moeten vinden.

Eerst een voorbeeld waarbij de schakels veel op elkaar zullen lijken, omdat de figuur uit bijna identieke elementen is opgebouwd. Je hebt wel een forse batterij schakels nodig, maar ze zijn allemaal gelijksoortig; als je overzichtelijk te werk gaat, valt het daardoor wel mee.

10 De cirkels c_1, c_2, c_3, en c_4 snijden elkaar op de aangegeven manier in *A, B, C, D, E, F, G* en *H*.



Bewijs: *Als A, B, C* en *D* op één cirkel liggen, *dan* liggen *E, F, G* en *H* ook op één cirkel.

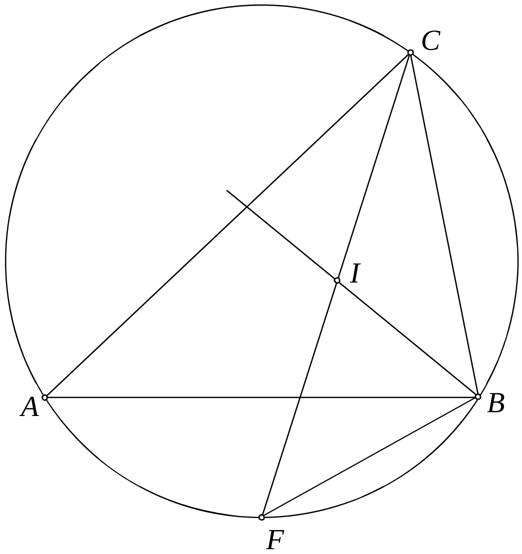
Aanwijzing: *EFGD* zou een koordenvierhoek moeten zijn. Breng hoeken ervan via schakels in verbinding met hoeken van vierhoek *ABCD*.

extra

In het volgende voorbeeld is zo'n regelmatige structuur niet te zien. Daardoor is dit een lastige opgave.
Maar ook hier schakel je een hoek via twee schakels naar een andere. Schakels van verschillende types gaan nu waarschijnlijk optreden.

11 In deze figuur zie je:
- driehoek ABC met de omgeschreven cirkel ervan
- deellijnen uit C en B
- snijpunt I van die deellijnen
- snijpunt F van de deellijn uit C met de omgeschreven cirkel.

Te bewijzen: $|FI| = |FB|$.



Aanpak:
Het ligt voor de hand de gelijke lengtes te *vertalen* in gelijkheid van hoeken.
Vervolgens is het handig in de figuur zoveel mogelijk paren van gelijke hoeken aan te geven in beeldtaal. Uiteraard alleen gelijkheden die je zeker weet!
Je moet natuurlijk gebruikmaken van de deellijnen en je kunt ook gelijke hoeken vinden door de stelling van de constante hoek toe te passen.
Kijk of je zo tussenstappen (schakels) vindt tussen $\angle IBF$ en $\angle FIB$.

schakels in het kort

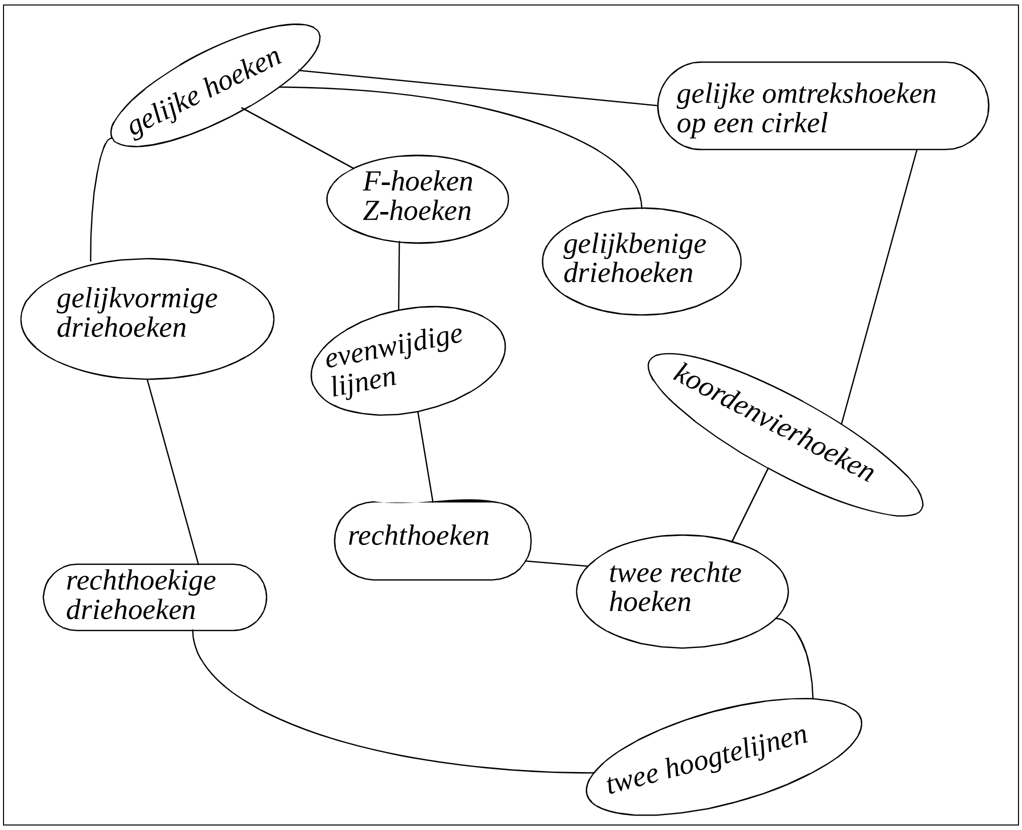
Vaak moet bewezen worden dat twee dingen, zeg A en B, aan elkaar gelijk zijn terwijl er geen stelling is die direct op de situatie toepasbaar is. Soms kun je dan wel een tussenstap vinden, een C waarvan je weet dat A en C gelijk zijn en dat C en B gelijk zijn.
C is dan een schakel.
De schakel kan een andere hoek, een lijnstuk, meerdere hoeken samen zijn.

Bij het zoeken van schakels van de ene hoek naar een andere heb je gezien
- dat de ene hoek soms een hoek is van een koordenvierhoek; de overstaande hoek van de koordenvierhoek kan een schakel zijn.
- dat een schakelhoek op eenzelfde boog als de eerste kan staan
- dat een schakelhoek de buurhoek van een gelijkbenige driehoek kan zijn
- enzovoort.

Je kunt dat ook algemener zeggen:
- je vindt schakels vaak als je in de figuur allerlei bekende gelijkheden met gelijke tekentjes aangeeft. Op zeker moment heb je een schakel of serie schakels van A naar B gevonden.

22: Associaties

Wat te doen als je niets herkent en j e ook geen aanwijsbare ontbrekende schakel kunt vinden?
Je kunt altijd nog dingen zoeken waarvan je oppervlakkig de indruk hebt, dat ze verband houden met je probleem. Associëren dus. Je schrijft van alles op waarvan je denkt dat het verband houdt met wat je zoekt, ook al weet je nog niet precies hoe je dat kunt gebruiken. Eigenlijk doe je dat steeds al een beetje; zoals bijvoorbeeld bij het zoeken naar gelijke hoeken in opgave **8**.
Bij de termen ‘gelijke hoeken’ en ‘twee hoogtelijnen’ kun je een heel netwerk van verbanden voor je zien. Bijvoorbeeld dit:



Je ziet ook dat er in het netwerk associaties zijn van *gelijke hoeken* naar *F- en Z-hoeken*, maar dat ook verder door is geassocieerd naar e*venwijdige lijnen*.

De verbindingen zeggen alleen : ‘... doet denken aan ...’ , of ‘... houdt verband met ....’.

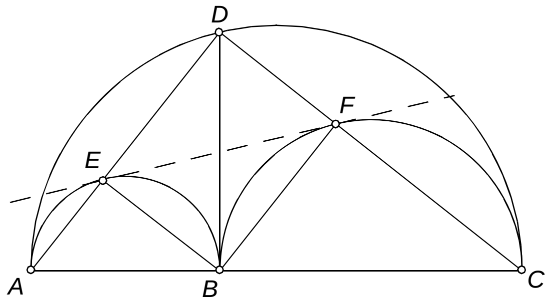
12 Toch kun je in zo’n netwerk de route van een bewijs enigszins herkennen of vinden. Kijk eens terug naar opgave **6** en **8**, bladzijde 111.
Geef met sterretjes in de figuur hierboven aan welke associaties een rol spelen in het bewijs van opgave **6**, bladzijde 111, en geef met een ander tekentje aan welke een rol spelen bij opgave **8** van dezelfde bladzijde.

Zo zie je: *associëren* helpt ook bij zoeken naar *schakels*.

Nu volgt eerst een eenvoudig voorbeeld waar je zelf een associatie moet zoeken. De aanwijzing hierbij kun je wel bedenken: maak een tekening en zoek associaties bij het enige bijzondere dat genoemd wordt.

13 De middens van de zijden van een driehoek *ABC* noemen we *D*, *E* en *F*.
Bewijs dat driehoek *DEF* dezelfde hoeken heeft als driehoek *ABC*.

De figuur met de drie halve cirkels hiernaast heb je al eerder gezien: bij opgave **2** op bladzijde 108. Je weet al dat *EBFD* een rechthoek is, dat is immers al bewezen.

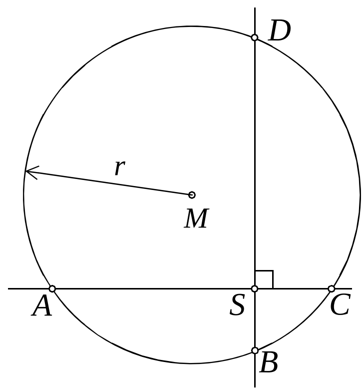


14 Bewijs dat *EF* aan de halve cirkels met middellijnen *AB* en *BC* raakt.

Omdat je bij deze figuur veel meer associaties kunt hebben, kunnen er ook heel verschillende bewijzen gevonden worden!

extra

Nu een geval waarbij vrijer geassocieerd moet worden. Het is weer een wat lastiger probleem.
In deze figuur zie je een cirkel en twee lijnen die elkaar loodrecht snijden in punt *S* dat binnen de cirkel ligt. De twee lijnen snijden cirkel in *A*, *B*, *C*, *D*.
M en *r* zijn middelpunt en straal van de cirkel.
Als *S* verschuift, veranderen de lijnstukken *AS*, *BS*, enzovoort. Sommige worden groter, andere kleiner, maar er bestaat een opmerkelijk verband.
Voor we aan het eigenlijk probleem beginnen, verkennen we wat bijzondere situaties.



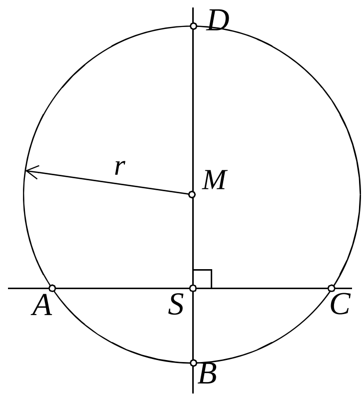
15 Laat zien dat *niet* geldt:

$$|AS| + |BS| + |CS| + |DS| = \text{constant}$$

16 Omdat er loodrechtheid in het spel is, kun je de associatie ‘Pythagoras’ hebben. Het is helemaal niet zo gek om eens te kijken naar: $|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 + |DS|^2$

a. Als deze uitdrukking een constante waarde zou hebben, wat zou die waarde dan moeten zijn?

b. Toon aan dat dit verband inderdaad geldt in de situatie hiernaast, waarbij je dus als extra gegeven hebt dat *DB* een middellijn van de cirkel is.

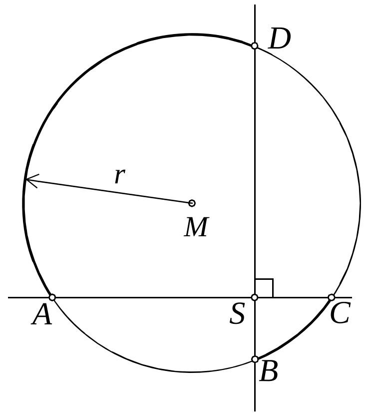


Nu ga je het algemene probleem aanpakken. Door de vooroefeningen van zoëven heb je voldoende associaties bij de situatie gelegd. Hier volgt nog eens het hele vraagstuk; lees het eerst geheel door en duik er dan in. Vergeet niet wat je bij het vorige probleem al hebt gedaan!

17 In deze figuur zie je een cirkel en twee lijnen die elkaar loodrecht snijden in punt S dat binnen de cirkel ligt. De twee lijnen snijden de cirkel in A, B, C, D.
M en r zijn middelpunt en straal van de cirkel.

a. De twee lijnen verdelen de cirkel in vier bogen. Bewijs dat twee overstaande bogen samen juist zo groot zijn als een halve cirkel.

b. Bewijs: $|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 + |DS|^2 = 4\ r^2$



associaties in het kort

Soms kun je niets direct herkennen en ook geen directe schakels vinden. Dan is het probleem vermoedelijk wat lastiger. Door *associaties* te zoeken met wat gegeven is en wat te bewijzen is, vind je – misschien – een mogelijke verbindings- en bewijsroute.
Daarna moet je de bewijsstappen nog wel verduidelijken. Daar speelt herkennen en vinden van schakels nog steeds een rol.

23: Vertalen

Bij opgave **11** stond de aanwijzing:
de gelijkheid van $|FI|$ *en* $|FB|$ *kun je vertalen*
in de gelijkheid van de hoeken $\angle FIB$ *en* $\angle FBI$.

Kortom: in plaats van de gelijkheid van de lijnstukken kun je ook de gelijkheid van de hoeken bewijzen, dat maakt niets uit. Maar omdat je in dat vraagstuk meer aanwijzingen had voor gelijke hoeken (deellijnen en hoeken op cirkelbogen) was dat bereikbaarder.

18 Je hebt al eerder een *vertaling* gezien.
Bijvoorbeeld van:
de lijnen ***a***, ***b*** *en* ***c*** *gaan door één punt*
in:
de lijn ***c*** *gaat door het snijpunt van de lijnen* ***a*** *en* ***b***.
Bij welke bewijzen werd dat idee bijvoorbeeld gebruikt?

19 In plaats van met lijnen kan het ook met cirkels. Voorbeelden in het voorafgaande?

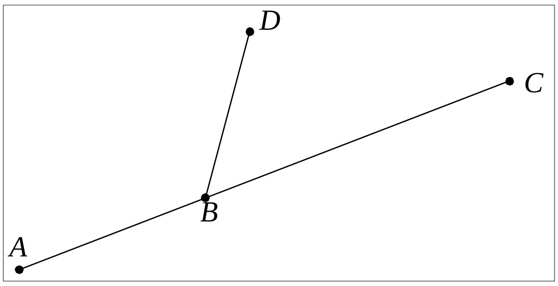
In deze paragraaf volgt nog een voorbeeld van een vertaling. En wel van:
drie punten liggen op één lijn.

20 Je kent al een vertaling hiervan in afstandstaal. Wat zou dat zijn?
Met andere woorden: als punten A, B en C op één lijn liggen, wat weet je dan zeker van hun onderlinge afstanden?

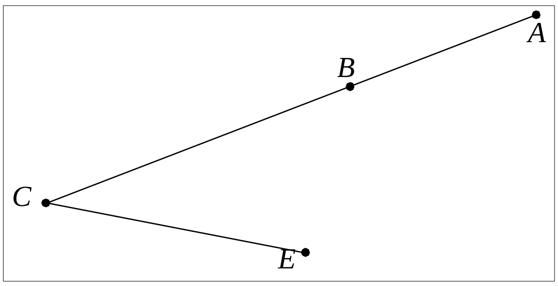
Omdat we vaak met hoeken werken, wil je *op-één-lijn* ook in *hoekverbanden* kunnen vertalen.

21 Het gaat natuurlijk nooit om zomaar drie punten, er is altijd wat meer aan de hand.. Hier zie je drie lijnstukken vanuit punt B: BA, BC en BD.

a. Geef een verband tussen enkele hoeken, dat moet gelden als A, B en C op één lijn liggen.

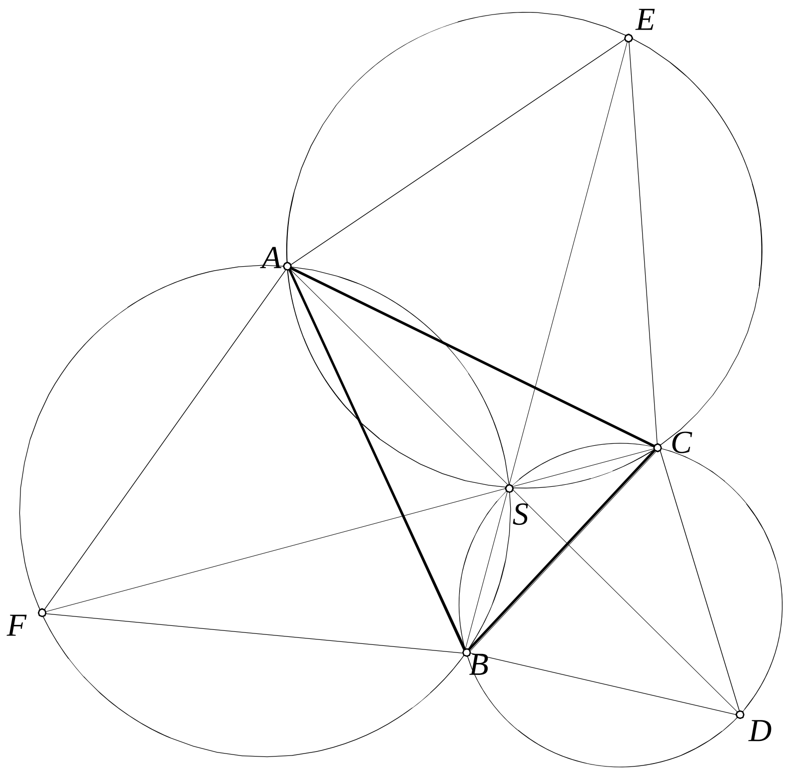


b. Doe dat ook bij de figuur hiernaast.



Na deze vooroefeningen volgt een serieus en interessant voorbeeld.

22 Bij opgave 6, bladzijde 103 heb je onderstaande figuur gezien: drie gelijkzijdige driehoeken tegen de zijden van driehoek *ABC* met hun drie omgeschreven cirkels. Die gingen door één punt, in deze figuur punt *S*. Dat is dus al bewezen.
Maar er is meer aan de hand met *S*!
De 'derde' punten van de gelijkzijdige driehoeken noemen we *D*, *E* en *F*.
a. Bewijs: *A*, *S* en *D* liggen op één lijn.



b. Net zoiets kun je bewijzen over andere puntendrietallen. Hoe kun je het geheel nu samenvatten in een bewering van de vorm '*drie lijnen door één punt*'?

kort over vertalen

Soms is het handig een bewering te vertalen: je vervangt de bewering door iets wat er gelijkwaardig mee is, maar dat in andere taal, bijvoorbeeld hoekentaal in plaats van lengtes, is gesteld.
Vertalen kan uiteraard op heel veel manieren. In deze paragraaf heb je enkele karakteristieke typen gezien.

24: Opsplitsen

slecht plan

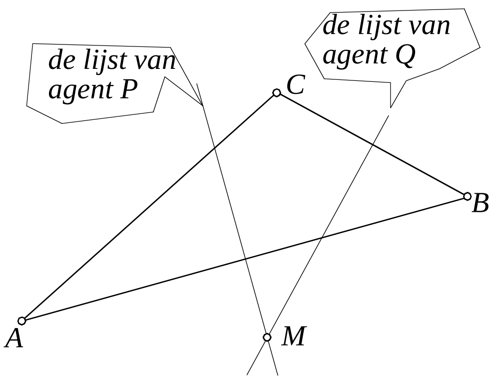
Stel je voor: de politie weet dat zich in een bepaalde straat een zakkenroller ophoudt die langer is dan 1.87m en rood haar heeft. Het onderzoek wordt opgesplitst over twee agenten en wel als volgt.
Agent *P* verzamelt op de ene hoek van de straat alle mensen die langer zijn dan 1.87 m en agent *Q* verzamelt op de ander hoek alle roodharigen.
De zakkenroller is degene die op twee hoeken tegelijk staat.

.. werkt toch goed bij meetkunde

Een slecht plan, dat is in dit geval duidelijk.
Toch: in de meetkunde is het vaak het juiste plan en we hebben het al vaak toegepast.

voorbeeld

Denk terug aan het vinden van het middelpunt *M* van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.



Gezocht werd een punt *M* waarvoor gold:
$d(M, A) = d(M, B) = d(M, C)$.
We stuurden als het ware twee agenten op pad:
Agent *P* zocht alle punten met:
$d(M, A) = d(M, B)$
en agent *Q* zocht alle punten met:
$d(M, B) = d(M, C)$.

Anders gezegd: de voorwaarde $d(M, A) = d(M, B) = d(M, C)$
is *opgesplitst* in twee voorwaarden, namelijk $d(M, A) = d(M, B)$ en $d(M, B)= d(M, C)$.

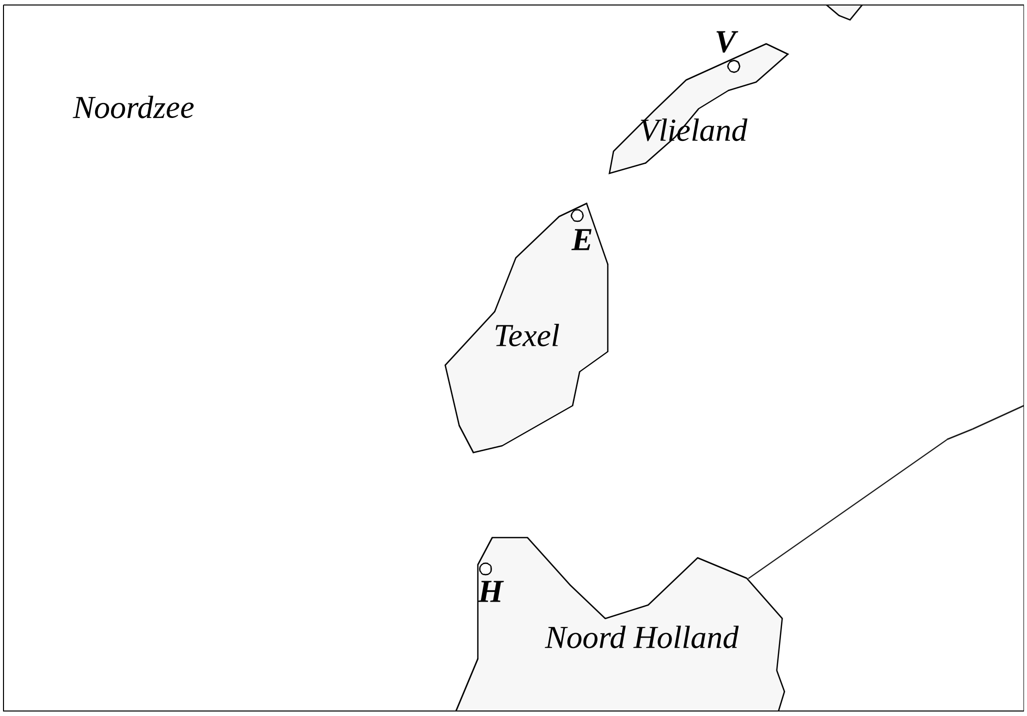
Bij elk van de twee werden alle mogelijkheden gezocht. Dat leverde twee lijnen. Het snijpunt van de lijnen voldeed aan beide voorwaarden en is dus het gezochte punt.

Hier volgen enkele voorbeelden, waarbij het eerste voorbeeld niet erg moeilijk is, maar wel de kern van de methode goed illustreert.

23 Teken heel nauwkeurig een driehoek met zijden van 12, 9 en 17 cm. Je mag een liniaal en een passer gebruiken.
- **a.** Teken daartoe eerst de zijde *AB* ter lengte van 12 cm. Punt *C* voldoet nu aan twee voorwaarden. Welke?
- **b.** Teken – in de terminologie van zoëven – nu de lijsten van beide agenten.
- **c.** Je vindt nu twee mogelijkheden. Zijn die driehoeken verschillend?

24 Gezocht een driehoek *ABC* met een driehoek waarvan je weet: $|AB| = 10$,
$\angle CAB = 45$ en $|BC| = 8$.
- **a.** Teken *AB* en vindt *C* weer met behulp van de opsplitsingsmethode.
- **b.** Ook nu zijn er meerdere mogelijkheden voor *C*. Toch is de situatie anders dan bij de vorige opgave. Licht dat toe en geef aan wat dat met het ontbreken van een geval in nummer 6 van het overzicht op bladzijde 204 te maken heeft.

25 Pas de opsplitsmethode toe op het volgende *navigatie*-probleem.
Een schip met averij bevindt zich op de Noordzee. Het kompas werkt niet meer.
Om de positie te bepalen, wordt gekeken naar de vuurtorens van Huisduinen (*H*, bij Den Helder), het Eierlandse Gat (*E* op de noordpunt van Texel), en van Vlieland (*V* aan de noordoostkant van Vlieland).
De positie van het schip noemen we *S*. Vanaf het schip kunnen de hoeken $\angle HSV$ en $\angle HSE$ gemakkelijk gemeten worden. Deze zijn op zeker moment 90° en 45°.
Laat zien hoe nu de positie *S* van het schip op de kaart bepaald kan worden.



opsplitsen in het kort

Soms moet één punt met twee eigenschappen gevonden worden. Dan is het vaak makkelijk
– de figuur van alle punten met de ene eigenschap te vinden
– en ook de figuur van alle punten met de andere eigenschap.
Een punt op de doorsnijding van de twee figuren heeft dan beide eigenschappen.
Bij wijze van spreken: het punt komt op de lijstjes van beide agenten voor.

Voorbeeld: het vinden van een punt dat twee gegeven afstanden tot andere punten heeft.

Ander voorbeeld: De bekende methode van het middelpunt van de omgeschreven cirkel vinden (de zg. 1-1-bis manier) werkt ook met twee voorwaarden apart nemen: liggen op de mll(A, B) en liggen op mll(B, C).

Je ziet dat de opsplitsmethode geschikt is om een bepaald punt te vinden, maar ook geschikt is voor bepaalde bewijzen. Daarbij is het in veel gevallen eigenlijk de 1-1-bis manier, als de voorwaarden waarin gesplitst wordt van dezelfde soort zijn.

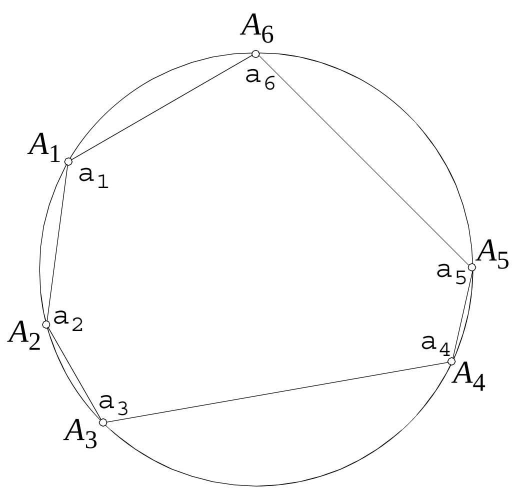
25: Plagiaat

Als je een boek schrijft en je neemt daarin forse stukken van een andere schrijver over, eventueel licht gewijzigd, maar zonder bronvermelding, dan pleeg je plagiaat.
Ook als je iets licht gewijzigd overneemt om het minder te laten opvallen: plagiaat blijft het. Ook als je ideeën overneemt zonder vermelding, pleeg je plagiaat.

In deze paragraaf beoefen je wiskundig plagiaat bij bewijzen. Dat is een eerbare zaak, maak je geen zorgen.

Het werkt zo:
Je hebt een probleem voor je en het doet je erg denken aan iets wat je eerder gezien hebt. Je kijkt of het bijhorende bewijs in de nieuwe situatie ook bruikbaar is, eventueel licht gewijzigd.
Hier volgen enkele problemen waar je de methode van het plagiaat kunt toepassen.

26 De stelling van de *koorden**zes**hoek*:



Als de hoekpunten van zeshoek $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ op een cirkel liggen en a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 en a_6 zijn de hoeken, dan geldt:

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$$

a. Bewijs dit door plagiaat te plegen met het bewijs van de koordenvierhoekstelling zoals dat staat in *Afstanden, Grenzen en Gebieden*, bladzijde 48.

b. Bewijs dit door de zeshoek in twee koordenvierhoeken te verdelen en de stelling van de koordenvierhoek te gebruiken.

c. Een van deze twee bewijzen is volledig, bij het ander zou nog een gevalsonderscheiding gemaakt moeten worden. Hoe zit dat?

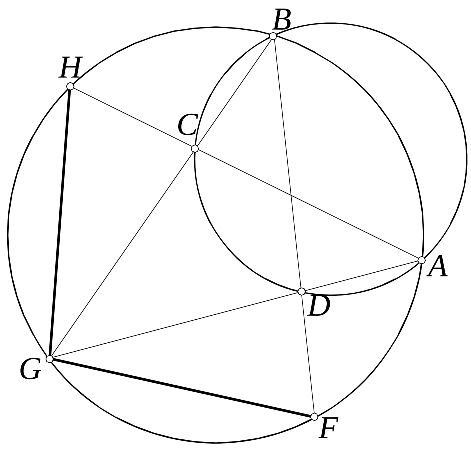
d. Formuleer een *stelling van de koorden-duizend-hoek*. Je hoeft niet erg origineel te zijn, pleeg plagiaat.

e. Bestaat er ook zo'n stelling voor *duizend en één* koorden?

De volgende twee problemen zijn variaties op opgaven uit dit hoofdstuk.

27 Gegeven: twee snijdende cirkels met punten erop zoals in de figuur.

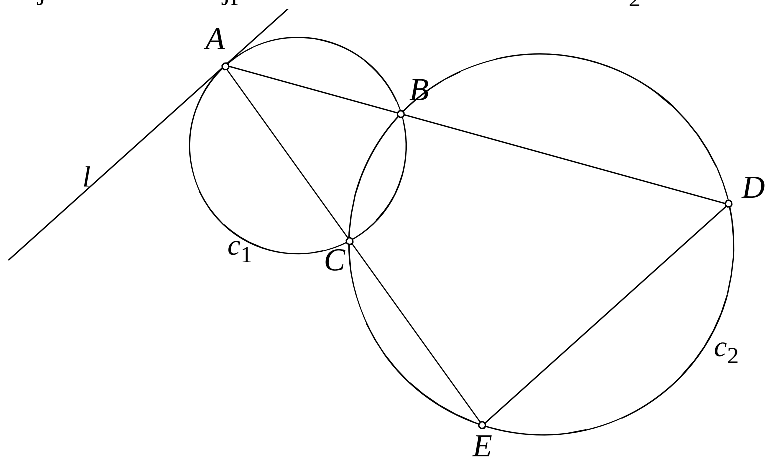
Toon aan: $|FG| = |GH|$.



De ligging van de punten was wat anders bij de originele opgave, maar echt groot zijn de verschillen niet.

Bij de volgende opgave is de figuur iets eenvoudiger dan die van het origineel. De evenwijdigheid en de twee cirkels hebben de opgaven wel gemeen.

28 In de figuur hieronder is l de raaklijn in A aan cirkel c_1.
B en C zijn de snijpunten van cirkels c_1 en c_2.
D en E zijn de andere snijpunten van AB en AC met cirkel c_2.



Bewijs dat l evenwijdig is met DE.

26: Terugblik op dit hoofdstuk

bewijzen vinden

In dit hoofdstuk heb je verschillende methoden gezien om een bewijs te vinden.

zes zoekmanieren

Bij betrekkelijk eenvoudige gevallen kun je het ***feest der herkenning*** beleven. Je herkent een situatie die al bewezen is. Een vertaling is voldoende.

Soms moet je naar geschikte ***schakels*** zoeken. Die gebruik je als je moet bewijzen dat twee dingen aan elkaar gelijk zijn, en er is geen stelling die dat verband direct oplevert. Soms heb je meerdere schakels nodig.

Als je bijvoorbeeld zo'n schakel niet kunt vinden kun je eerst ***associëren***. Je zoekt dan naar allerlei verbanden, ook al weet je niet direct of je ze kunt gebruiken. Vervolgens probeer je in het netwerk van verbanden een route voor een bewijs te vinden.

Vertalen was ook een hulpmiddel. De te bewijzen bewering zette je om in een andere, die meer houvast blijkt te bieden.

De methode van ***opsplitsen van voorwaarden*** is te gebruiken als een punt meerdere eigenschappen heeft, of als je moet bewijzen dat drie figuren (lijnen of cirkels) door één punt gaan.

De methode ***plagiaat*** was niets nieuws. Het belangrijkste is dat je er aan went dat je vaak elementen uit andere bewijzen nuttig kunt hergebruiken.

succes nooit verzekerd

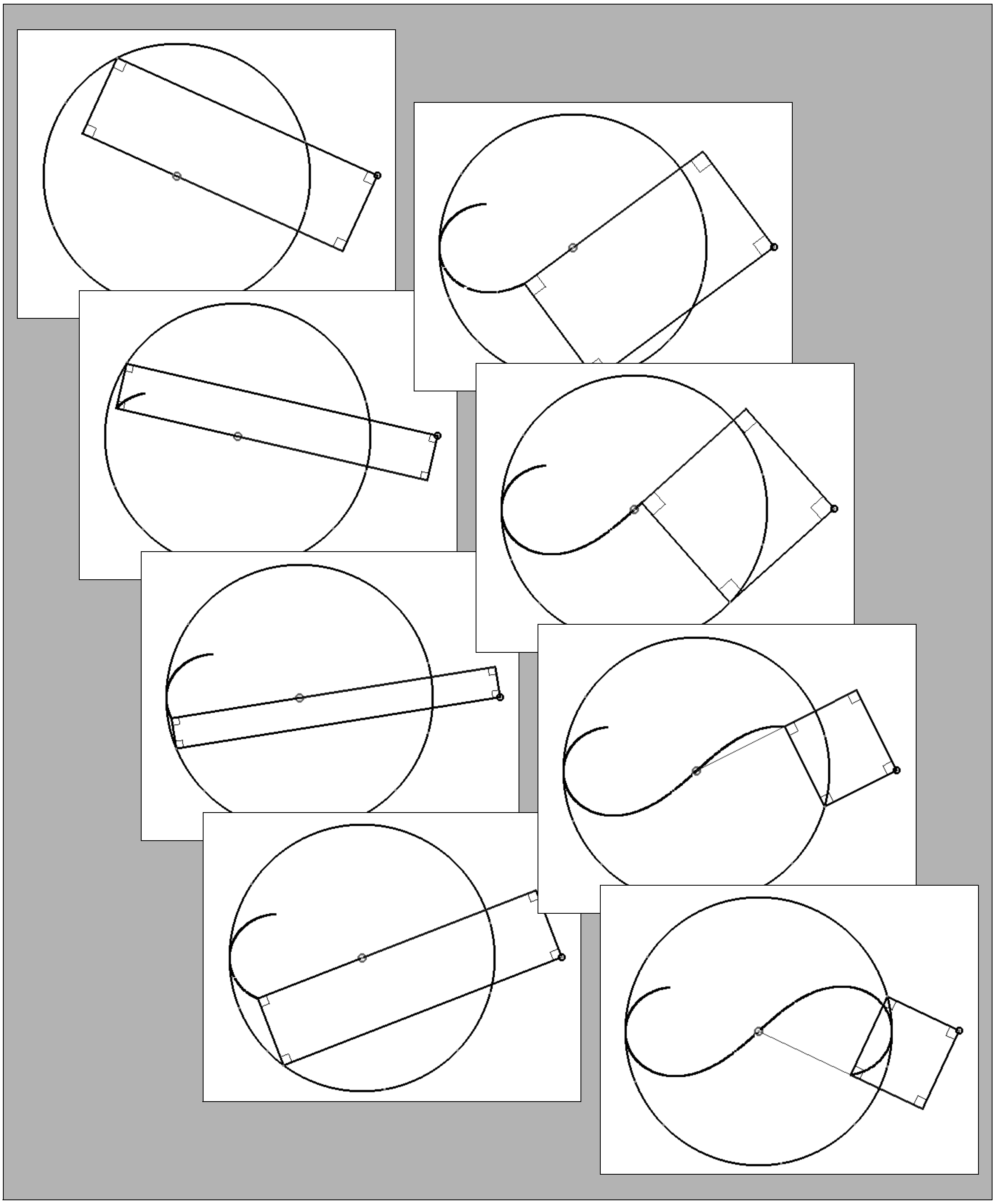
Het is niet zo dat je een bewijs direct vindt, als je één van de methodes probeert toe te passen.
Het is niet zo dat je een bewijs niet op meerdere manieren kunt vinden.
De methoden sluiten elkaar niet uit, ze vullen elkaar aan.

vooruitblik

In het volgende hoofdstuk ga je met behulp van een computerprogramma allerlei figuren verkennen. Dat leidt tot allerlei vermoedens, dat zijn onbewezen beweringen waarvan je sterk de indruk hebt dat ze waar zijn, zonder dat je ze hebt bewezen.

In het hoofdstuk daarna kun je de technieken van dit hoofdstuk toepassen om bewijzen te vinden bij deze vermoedens.

Hoofdstuk 7:
Vermoedens op een scherm



De belangrijkste zaken over tekenen met CABRI

AANKLIKKEN

Breng de wijzer op het bedoelde object.
Tik kort op de linkermuisknop.

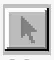
SLEPEN

Breng de wijzer op het bedoelde object.
Druk de linkermuisknop in, ver**schuif** de muis met ingedrukte knop en laat **los**.

MENUKEUZE EN OPTIEKEUZE

Wijs een button aan, sleep de muiswijzer naar beneden, laat los op de te kiezen optie.
De actieve optie blijft in wit zichtbaar in de balk.

AANWIJSTOESTAND

Door klikken op  kom je in **aanwijstoestand**. Ook tikken op `ESC` werkt.
In aanwijstoestand kun je allerlei dingen in de tekening verschuiven.

TEKENEN EN CONSTRUEREN

Onder de TEKEN en CONSTRUEER-buttons staan alle **teken- en constructie-opties**.
Kies de optie, klik vervolgens punten of objecten aan. Dit verschilt per optie.
CABRI helpt je als je oude punten of lijnen wilt gebruiken om er zaken aan vast te koppelen.
Let steeds op de kleine tekstjes naast de wijzer: de **vlag van de muis**.
Snijpunten van lijnen en cirkels zijn ook bruikbaar.

OPTIES VERLATEN

Verlaat opties door naar **AANWIJSTOESTAND** te gaan. Dat is bijvoorbeeld nodig bij de opties EXTRA2>HIDE/SHOW en COLOUR.

OBJECTEN WISSEN EN SCHERM SCHOONMAKEN

Selecteer een object door het aan te klikken in AANWIJSTOESTAND; (met `SHIFT` +aanklikken kun je meer dingen tegelijk selecteren).
Tik op de toets `Delete` of `Back Space`.
Met EDIT>SELECT ALL kun je alles tegelijk selecteren en vervolgens weggooien.

HERSTELLEN

Je laatste handeling kun je (meestal) herstellen met menu-keuze EDIT>UNDO.

UITDOSSEN VAN TEKENINGEN

Onder EXTRA1, 2 zitten mogelijkheden voor benoemen, kleuren, lijndikte, verbergen van objecten, enzovoort.

HULP

Gebruik HELP en hoop dat je voldoende informatie krijgt. CABRI geeft in Help-toestand informatie over de gekozen opties. Ook de toets `F1` zet de HELP aan en uit.

Bij de voorpagina van dit hoofdstuk

De ‘film’ op de voorplaat van dit hoofdstuk is gemaakt met het computerprogramma CABRI dat je bij dit hoofdstuk gaat gebruiken. Je ziet momentopnamen van een bewegende en vervormende rechthoek. Eén hoekpunt laat een spoor na: de baan van dat punt.
Met CABRI maak je vrij gemakkelijk zulke bewegende beelden en kun je de banen van bewegende punten laten zien.
In diverse situaties lijken de banen onverwacht eenvoudige figuren, zoals cirkels of lijnen. In zulke gevallen moet je dan proberen te bewijzen dat zo’n baan dat werkelijk is. Gewoon aannemen dat dit zo is kan niet; van eerdere voorbeelden weet je namelijk dat de schijn bedriegt: zie bladzijde 103 voor een verradelijk voorbeeld.

27: Inleiding: kennismaking met CABRI

Dit hoofdstuk is een practicum met het computerprogramma CABRI. CABRI is de afkorting van ‘CAhier de BRouillon Interactif pour l’apprentissage de la géomètrie’ ofwel ‘interactief tekenvel voor het leren van meetkunde’. Met CABRI teken je meetkundige figuren op het scherm. Zo’n figuur kun je voortdurend vervormen en ook laten bewegen. Je werkt met een Engelstalige versie. Dat moet kunnen. Achterin dit boekje vind je een vertaling van alle opdrachtwoorden die kunnen verschijnen.
Het practicum bestaat uit drie delen:

– enkele vooroefeningen om de bediening te leren kennen (deze paragraaf)
– het maken van tekeningen bij (bijna) bekende zaken (zie de volgende paragraaf)
– het onderzoeken van nieuwe problemen, waarbij veel op het scherm zal bewegen (zie bladzijde 131)

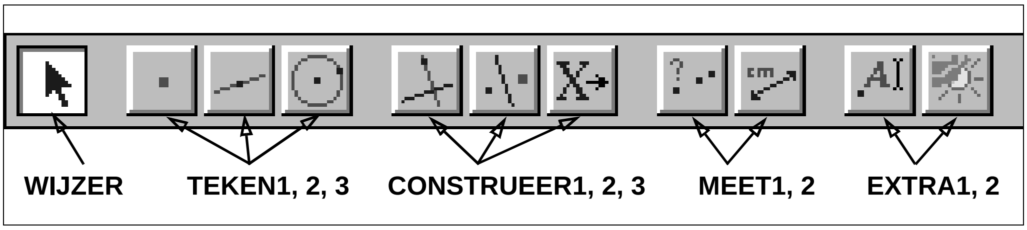
hoofdzaken bediening, vooroefeningen

Je leert de bediening zo dadelijk kennen door een bekende figuur te maken. Als oefening tekenen we een driehoek met twee middelloodlijnen en de omgeschreven cirkel van de driehoek.
Jij weet dat het middelpunt van die cirkel het snijpunt van de twee middelloodlijnen is en dat de derde middelloodlijn ook door dat punt gaat.

Op de linkerbladzijde vind je een overzicht van de belangrijkste zaken voor tekenen. Daar grijp je steeds indien nodig op terug.

menubalk, buttons

Na het starten verschijnt een leeg scherm met daarboven een menubalk met buttons.
We geven de buttons namen. Ze staan in deze figuur aangegeven.



muis

1 Je bedient het programma geheel met de muis.
Je moet daarom even weten dat er twee verschillende acties met de muis mogelijk zijn: AANKLIKKEN en SLEPEN.
Lees de beschrijvingen hiervan op de linkerbladzijde.

opties

Zet je de muis op een button en *sleep* je de wijzer naar beneden, dan krijg je een lijstje te zien. Je ziet de zogenaamde *opties*. Je *kiest* een optie door loslaten op die optie.
Opties geven we zó aan:

TEKEN2>TRIANGLE

2 **a.** Kies deze optie TEKEN2>TRIANGLE.
b. Klik nu drie door jou te kiezen punten op het tekenscherm aan.
Klaar is je driehoek!

de VLAG van de muis

Nu gaan we de middelloodlijnen tekenen. Er is weer iets dat je even moet weten:
Naast de muiswijzer is vaak een klein tekstje te zien. Aan deze *vlag van de muis* kun je zien, wat je aangewezen object op dat moment is. Kijk er steeds naar, dat helpt.

3 Middelloodlijnen, ofwel *perpendicular bisectors*.
a. Kies de optie CONSTRUEER>PERPENDICULAR BISECTOR.
Klik nu een *zijde* van de driehoek aan. Let op de vlag van de muis!
CABRI doet de rest.
b. Teken nog een middelloodlijn.
c. Tot slot de omgeschreven cirkel.
Kies de optie TEKEN3>CIRCLE.
Je moet nu:
– het middelpunt aanklikken; de *vlag van de muis* informeert je of je inderdaad naar het snijpunt (*intersection*) wijst.
– een punt aangeven waar de cirkel door moet; geholpen door weer *de vlag van de muis* klik je een punt van de driehoek aan.

4 Nu gaan we de gemaakte figuur onderzoeken.
a. Ga daarvoor eerst naar AANWIJSTOESTAND (zie bladzijde 126).
We onderzoeken wat je wel of niet kunt *verslepen*.
b. Door de hoekpunten te verslepen, vervorm je de driehoek. Probeer dit en stel vast: middelloodlijnen en cirkel passen zich aan de nieuwe driehoek aan.
c. Probeer ook te verslepen: (het lukt niet maar probeer het tóch!)
– de middelloodlijnen
– het middelpunt van de cirkel
– de cirkel.
d. Kijk wat er gebeurt als je de driehoek probeert te verslepen.

afhankelijk, onafhankelijk

De verklaring van dit alles is van belang voor handig verder werken.

De punten van de driehoek kon je in volle vrijheid aanwijzen.
Het zijn zogenaamde ONAFHANKELIJKE OBJECTEN.
De middelloodlijnen en de cirkel maakte je in relatie met de eerste punten.
Het zijn AFHANKELIJKE OBJECTEN.
Afhankelijke objecten bewegen of vervormen in het algemeen als je de objecten, waar ze van afhangen, versleept.

Onafhankelijke objecten kun je vrij verslepen. Je kunt ze alléén met de TEKEN-buttons maken.
Afhankelijke objecten maak je met de constructie-buttons maar ook vaak met de teken-buttons. Kijk maar terug naar de middelloodlijnen (een constructie-button) en de omgeschreven cirkel (een teken-button).

5 Een korte slotoefening (maak het scherm niet schoon, dat hoeft niet).
a. Teken een nieuwe *onafhankelijke* cirkel.
b. Teken met de TEKEN1>POINT optie een punt òp deze cirkel. Let daarbij op de vlag van de muis.
c. Probeer hoe je dit punt kunt verslepen.

lopend punt

Zo'n punt als dit is een afhankelijk punt, dat over de cirkel kan lopen, maar daar wel op blijft. Noem het maar *een over de cirkel lopend punt*.

6 Laat de driehoek met aanhang staan, maar verwijder de losse cirkel. Op bladzijde 126 staat hoe dat gedaan kan worden.
Het lopend punt verdwijnt nu vanzelf ook, want het is afhankelijk van de cirkel!

28: Construeren met CABRI: oude bekenden

schuiven of construeren: een belangrijk onderscheid

7 Op je scherm staat nog de driehoek met omgeschreven cirkel.

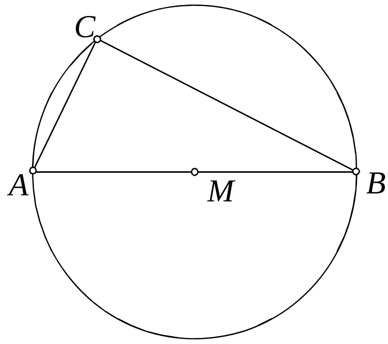
a. Door verslepen van een hoekpunt kun je zorgen dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel op de zijde tegenover dat hoekpunt komt te liggen. Probeer dat.

b. Wáár op die zijde ligt dan dat middelpunt?

De situatie die je nu bereikt hebt, is een afbeelding bij de stelling van Thales. Maar zodra je een hoekpunt beweegt, is dat niet meer waar!
Nu gaan we op een andere manier de Thales-figuur maken en wel zó, dat bij verslepen van A of B steeds de structuur in tact blijft. Dan hebben we de figuur niet al schuivend naar de juiste vorm *gesleept*, maar *geconstrueerd*.

8 Maak het scherm nu geheel schoon voor de volgende opgave. Zie weer bladzijde 126.

9 A en B zijn de onafhankelijke punten waar je mee begint. Je mag ze eerst neerzetten met TEKEN1>POINT, maar het kan korter als volgt:



a. Teken een lijnstuk AB
(Met CONSTRUEER2>SEGMENT).

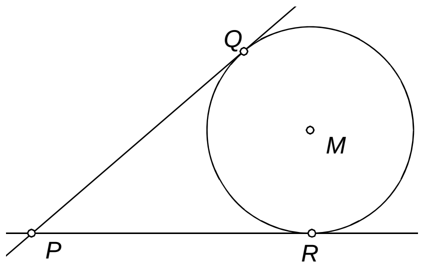
b. Construeer het midden van AB met de optie CONSTRUEER1>MIDPOINT. Je kunt het segment aanklikken óf de twee punten A en B.

c. Wijs met de optie TEKEN1>POINT ON OBJECT een punt C op de cirkel aan.
Teken nog de lijnstukken AC en BC en klaar is Kees.

d. Probeer of je constructie aan alle eisen van hierboven voldoet.

raaklijnen aan de cirkel construeren

De figuur hiernaast zou je kunnen maken door eerst de cirkel te tekenen, en dan de raaklijnen er schuivend en slepend tegenaan te leggen. Niet fraai, we willen de raaklijnen *construeren*.
Daarbij passen we de Thales-cirkel toe.



10 Maak het scherm leeg en teken een cirkel met middelpunt M en een punt P daarbuiten. Dit zijn de onafhankelijke objecten. Nu gaan we de raaklijnen vanuit dat punt aan de cirkel construeren. je kunt het raakpunt Q construeren via de *opsplitsingsmethode*.
Van het raakpunt Q weet je namelijk twee dingen:

– *één*: Q ligt op de cirkel met middelpunt M.
– *twéé*: $-PQM$ is loodrecht.

a. De figuur bij de eerste voorwaarde is er al. Dat is de cirkel met middelpunt M.
Construeer nu de figuur bij de tweede voorwaarde: de figuur bestaande uit *alle mogelijke punten* W, waarvoor $-PWM$ recht is.

b. Markeer nu Q en R met TEKEN1>POINT en teken tot slot de beide raaklijnen.

c. Test door slepen van M en P en vergroten van de cirkel dat de constructie werkt.
Wat gebeurt er als P binnen de cirkel wordt gelegd?

extra: **uitdossen**

verfraaien van een tekening

Als je dat wilt – soms is het de moeite waard in verband met de overzichtelijkheid – kun je de tekening nog verder uitdossen. De volgende opgave geeft wat mogelijkheden.

11 Oefen jezelf met de opties onder EXTRA1, 2 om de tekening te verfraaien:

- **a.** Gebruik de optie EXTRA1>LABEL om de punten te benoemen. Na aanklikken van het te benoemen punt moet je even het toetsenbord gebruiken.
- **b.** Eventueel kun je nog kleuren gebruiken. Kleur de figuur door via EXTRA2>COLOUR een palet op te roepen. Wijs een kleur aan en schilder, d.w.z klik het te kleuren object aan.
- **c.** De Thales-cirkel had in de constructie maar een hulprol. Gooi de cirkel echter niet weg, maak hem alleen onzichtbaar met de optie EXTRA2>HIDE/SHOW. Er is nu vast nog meer dat je wilt verbergen.

Het sluiten van uitdos-opties lukt weer door op WIJSAAN te klikken of door op **ESC** te tikken.

ingeschreven cirkel

12 Nu ga je de *ingeschreven* cirkel van een driehoek construeren. Begin met een schoon scherm. (zie bladzijde 126).
Mocht je op problemen stuiten, denk dan aan HELP.

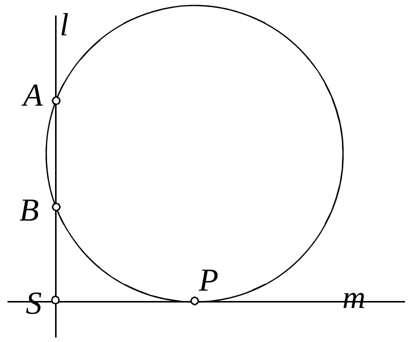
- **a.** Teken een driehoek *ABC*, de deellijnen van −*A* en −*B* en hun snijpunt *I*.
  - Het Engelse woord voor deellijn is ANGLE BISECTOR. Kijk bij CONSTRUCTIES1.
  - Wijs de te delen hoek aan met de *drie punten methode*. Voor de deellijn van −*B* wijs je dus *A*, *B* en *C* aan.

drie punten methode

- **b.** Om de ingeschreven cirkel te kunnen construeren, heb je het precieze punt nodig waar de cirkel aan een van de drie zijden raakt. Zo'n punt vind je door de loodlijn door *I* op *AB* te construeren. (Zoek PERPENDICULAR LINE bij CONSTRUCTIES1). Construeer die loodlijn en de ingeschreven cirkel.
- **c.** Test je constructie weer door verslepen van de hoekpunten van de driehoek.

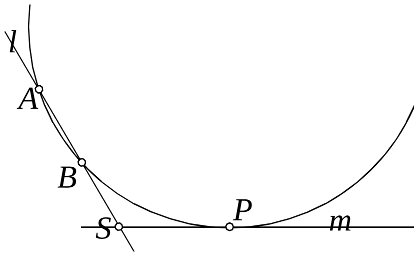
slotconstructie: de standbeeldfiguren uit hoofdstuk 4.

13 Construeer deze figuur die je kent uit hoofdstuk 4.
De lijnen *l* en *m* staan loodrecht op elkaar. *A* en *B* zijn punten op *l*. Vanuit *P* op *l* zie je standbeeld *AB* onder maximale hoek.
De opgave: construeer *P* op *m* en construeer ook de cirkel door *A* en *B* die aan *m* raakt.
Begin met de lijn *l* en zet *m* daar loodrecht op.
Test de constructie door *A* en *B* over *l* te laten bewegen.



extra

14 In hoofdstuk 4 is ook de situatie aan bod geweest, waarin *l* en *m* niet loodrecht op elkaar staan. De afstand van *P* tot het snijpunt *S* van *l* en *m* was echter dezelfde als bij *m* loodrecht op *l* en door *m*.
Construeer nu ook cirkel door *A* en *B* die aan *m* raakt.



29: Vermoedens, beweging, sporen

vermoedens bedenken en onderzoeken

Je weet nu genoeg af van CABRI om met de computer op ontdekkingsreis te gaan naar bijzondere verbanden in meetkundige figuren.

vermoeden

Het resultaat van zo'n onderzoek is in beginsel niet meer dan een (sterk) vermoeden. Zo'n vermoeden moet je straks nog bewijzen. Pas dan promoveert het vermoeden tot stelling. Zorg er dus voor dat je voldoende informatie opschrijft.

Hier volgen enkele strategische tips die niet veel afwijken van de tips uit hoofdstuk 2.

strategische tips

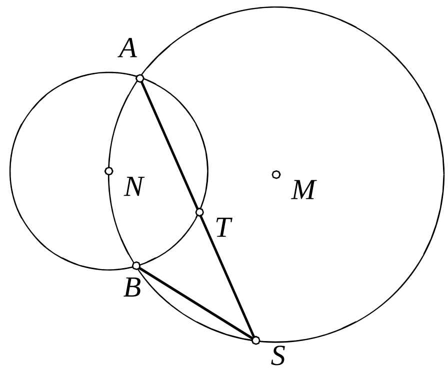
Speel eerst wat met de begintekening. Schrijf op wat je opvalt.

Bekijk dan bijzondere gevallen: bijvoorbeeld symmetrische situaties, situaties met een bijzondere hoek of extreme situaties. Maak daarvan een schets in je schrift.

Vul eventueel op het scherm je begintekening aan: laat de grootte van hoeken of de lengte van lijnstukken meten; misschien kun je handig met kleuren werken, misschien helpt het tekenen van een extra lijn(stuk) of cirkel je verder.

probleem 1: een bijzondere driehoek

15 Teken twee punten *M* en *N*. Teken de cirkel om *M* door *N*. Kies op deze cirkel een punt *A* en teken de cirkel om *N* door A.
De twee cirkels snijden elkaar in een tweede punt *B*.
Kies op de cirkel om *M* een punt *S* en teken de lijnen *SA* en *SB*.
De lijn *SA* snijdt de cirkel om *N* nog in een punt *T*.
Je tekening moet nu dezelfde elementen bevatten als de figuur hiernaast.
Driehoek *STB* heeft een bijzondere eigenschap. Welke?
Formuleer hieromtrent een vermoeden.



probleem 2: de deellijnen-vierhoek

16 Teken een willekeurige vierhoek *ABCD*. Teken ook de vier binnendeellijnen.
De deellijnen sluiten een vierhoek *PQRS* in. Benoem deze punten op het scherm.
Op het eerste gezicht heeft deze deellijnen-vierhoek geen bijzondere eigenschappen.
We gaan dus eerst een paar bijzondere gevallen onderzoeken.

a. Schuif de punten *A, B, C* en *D* zó dat vierhoek *ABCD* (vrijwel) een parallellogram wordt. Formuleer bij deze situatie een vermoeden over de vorm van *PQRS*.

b. Onderzoek ook welke vorm vierhoek *PQRS* heeft als *ABCD* de vorm heeft van een rechthoek, een ruit, een trapezium.

Dynamiek met CABRI

BEWEGEN

Als je een punt of object versleept, kan dat alleen als:

- het een lopend punt op een ander object is,
- als het een onafhankelijk punt is.

Wat afhankelijk is, beweegt mee.
Uitvoering: Werk vanuit Aanwijstoestand. Versleep het te bewegen object.

AUTOMATISCH BEWEGEN:

Werkt het best op punten die over lijnen, segmenten en cirkels lopen.
Gebruik de optie:

EXTRA1>ANIMATE

Versleep het te bewegen punt en laat het los.
Het werkt als een flipperkast. Hoe verder je de veer uitrekt, hoe sneller de beweging is.
Het werkt alleen op onafhankelijke objecten.

BEWEGING STOPPEN

Elke toetsaanslag stopt het automatisch bewegen.
Ga terug naar de toestand vóór het bewegen met
REFRESH DRAWING. Je blijft dan wel in de Animate-optie hangen.

SPOORVORMING AAN- EN UITZETTEN

Kies de optie:

EXTRA1>TRACE ON/OFF

Klik het object aan dat een spoor moet nalaten.
Idem als je dat object juist niet meer wilt laten sporen.
Meer objecten tegelijk laten sporen kan ook.

SPOREN WISSEN

Gebruik de optie:

EDIT>REFRESH DRAWING

Breng de wijzer op het bedoelde object.
Druk de linkermuisknop in, ver**schuif** de muis met ingedrukte knop, en laat **los**.

BAAN VAN BEWEGEND PUNT INEENS TEKENEN

Kies de optie:

CONSTRUEER1>LOCUS

Klik daarna:

eerst het te bewegen punt (of de te bewegen lijn) aan
en daarna het aandrijvende punt.

Let op:

De baan zelf is weer een nieuw afhankelijk object, dat bewegen en vervormen kan!

INSTELLEN VOORKEUREN BIJ LOCUS

Via:

OPTIONS>PREFERENCES

Belangrijke keuzes:

- aantal punten voor de locus
- Omhullende (Enveloppe) of de lijnen zelf bij Locus-Of-Lines.

c. Ook in het algemene geval heeft vierhoek *PQRS* een bijzondere eigenschap. Misschien kun je zelf al een vermoeden formuleren.
Anders komt hier een hint: let op de hoeken van vierhoek *PQRS*.

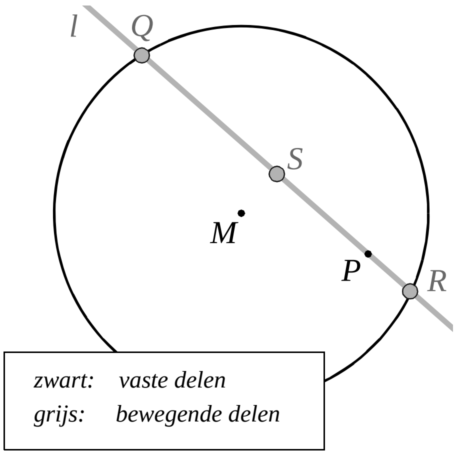
beweging met nagelaten sporen

Bij de volgende problemen krijg je iets bijzonders te zien als je de figuur al dan niet geautomatiseerd laat bewegen. CABRI heeft speciale hulpmiddelen om bewegingen in beeld te brengen.
Gebruik zo nodig de aanwijzingen in het blok *Dynamiek met Cabri* op bladzijde 132.

probleem 3: midden van draaiende koorde

Hier volgt direct een eenvoudig probleem dat je met CABRI kunt tekenenen. Na het probleem volgen tips om de situatie te onderzoeken.

17 In deze figuur zie je een cirkel met middelpunt *M* en een punt *P*.
Q is een lopend punt op de cirkel. Door *Q* en *P* is een lijn getekend, die de cirkel nog in *R* snijdt.
Het midden van *QR* is het punt *S*, dat ook op de lijn ligt.



Onderzoek hoe *S* beweegt als *Q* de cirkel doorloopt.

Stel een vermoeden op over de baan van *S*.

Tips

a. Maak de constructie en laat eerst *Q* met de hand over de cirkel bewegen.
b. Vervolgens laten we het bewegen door de computer uitvoeren. Dat gaat met de optie:
EXTRA1>ANIMATE
Probeer nu *Q* te verslepen. Je merkt daarna vanzelf wat je moet doen. Het werkt net als een flipperkast. (*Elke toetsaanslag* ***stopt*** *de animatie.*)
c. Kies de optie: EXTRA1>TRACE ON/OFF
en klik punt S aan. Zo hang je als het ware een lekkende pot verf aan punt *S*.
Ga maar naar AANWIJSTOESTAND en beweeg nogmaals *Q*, al dan niet geautomatiseerd met ANIMATE.

WAARSCHUWING: Zolang je niets doet, blijft de verf doorlopen. Vandaar:

UITZETTEN SPOOR: Gebruik weer EXTRA1>TRACE ON/OFF op punt *S*.

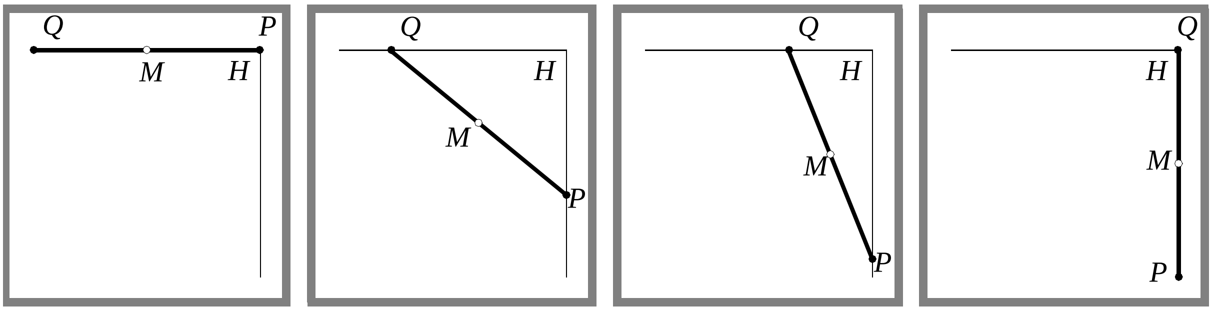
VERWIJDEREN SPOOR: Gebruik EDIT>REFRESH DRAWING

d. Je hebt nu al een goede indruk van de baan van *S*, maar het is ook mogelijk de baan van *S* geheel automatisch te tekenen.
Gebruik hiervoor de optie:
CONSTRUEER1>LOCUS
klik dan eerst op *S* (het *tekenende* punt) en dan op *Q* (het *aandrijvende* punt).

probleem 4: midden tussen twee wandelaars

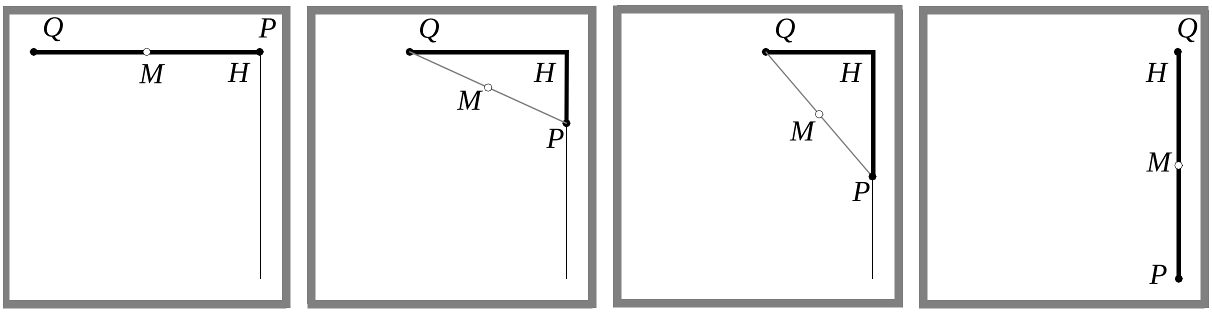
Hieronder zie je steeds enkele beelden bij een eenvoudige beweging. Het gaat om twee mensen, weergegeven door de punten P en Q, die achter elkaar een hoek H omlopen. P loopt steeds voorop en Q volgt. Ze zijn verbonden door een lijn waarvan we het midden M gaan volgen.
De film begint als P op de hoek is en eindigt als Q op de hoek is aangekomen.

eerste geval: de echte afstand van P en Q onderling blijft constant



Hier heeft het donkere stuk lijn, de directe verbinding, dus een vaste lengte en kunnen P en Q niet even snel bewegen.

tweede geval: de afstand van P en Q langs de weg blijft constant.



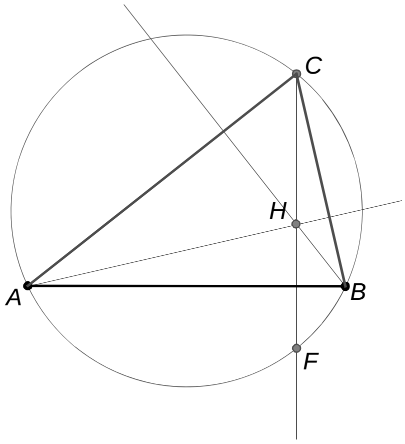
Hier heeft heeft donkere stuk lijn dat de hoek om loopt dus vaste lengte en dan moet de directe verbindingslijn waar M op ligt elastisch zijn.

18 Simuleer de beide situaties in CABRI en onderzoek ook voor beide gevallen de baan van M.
Noteer je vermoedens over beide banen.

Aanwijzingen:
- Teken eerst het stuk weg waar P over loopt met TEKEN2> SEGMENT en kies een lopend punt op dat segment.
- Teken nu de lijn waar Q op loopt met CONSTRUEER1>PERPENDICULAR LINE. Bepaal dan Q, afhankelijk van P. In de twee gevallen moet dat verschillend gedaan worden.
- Een handige optie is hierbij CONSTRUEER1>COMPASS.
  Daarmee kun je een cirkel met gegeven straal om een middelpunt tekenen.
  Twee mogelijkheden:
  a. de straal is de lengte van een al getekend segment
  b. de straal wordt aangegeven door de afstand tussen twee al bestaande punten.

probleem 5: de baan van het hoogtepunt

Dit probleem sluit nauw aan bij opgave **8** van hoofdstuk 6, bladzijde 111.



19 Teken een cirkel met een driehoek *ABC* erop. In deze volgorde, want we willen straks punt *C* over de cirkel laten bewegen.

a. Teken de hoogtelijnen van driehoek *ABC*.

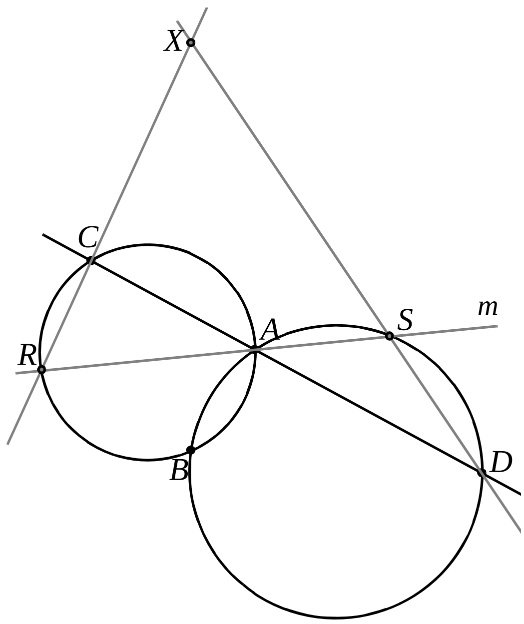
b. Markeer het hoogtepunt via de optie TEKEN1>POINT ON 2 OBJECTS.
De computer wil weten wat er gesneden moet worden. Klik twee hoogtelijnen naar keuze aan.

c. Als je punt *C* over de cirkel beweegt, beweegt *H* natuurlijk ook. Wat is je indruk van de *baan* die *H* beschrijft?

d. Onderzoek wat de baan van *H* is met behulp van de dynamische middelen van CABRI.
Onderzoek ook wat er aan de baan verandert als je:
– de cirkel groter maakt
– de punten *A* en *B* over de cirkel verschuift.

e. Probeer ook een vermoeden te krijgen over de relatie tussen de ligging van *AB* en *FH* onderling. Formuleer dat vermoeden ook.

probleem 6: baan van een speciaal snijpunt



20 In deze figuur zie je:
– twee cirkels c_1 en c_2
– hun snijpunten *A* en *B*
– een lijn door *A*, die de cirkels respectievelijk nog in *C* en *D* snijdt.

Dat zijn de vaste delen van de tekening, die weer zwart gekleurd zijn.

Over c_1 beweegt zich een punt *R*. Verder hangen nu van *R* af:
– de lijn *m* door *R* en *A*
– het snijpunt *S* van *m* met c_2
– de lijnen *CR* en *DS*
– het snijpunt *X* van *CR* en *DS*

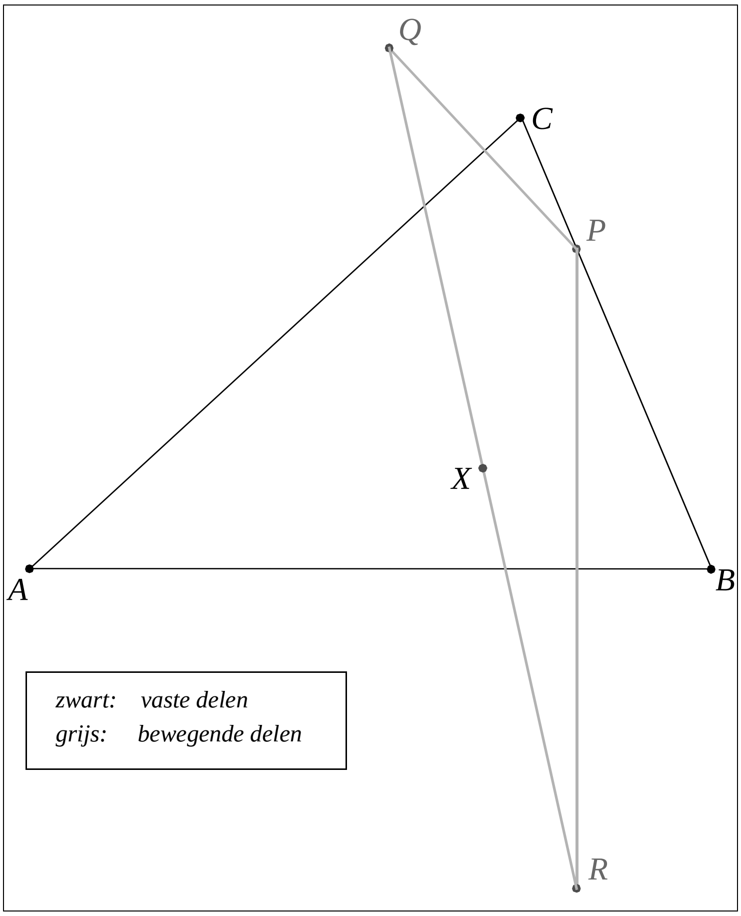
Dat zijn dus allemaal bewegende onderdelen, die grijs getekend zijn.

Onderzoek de baan van X als R de cirkel c_1 *doorloopt.*

probleem 7: het midden van twee spiegelingen

21 Teken een driehoek *ABC*. Op zijde *BC* ligt het punt *P*. Teken de spiegelbeelden van *P* in *AB* en *AC* en noem ze *Q* en *R*.

Het midden van *QR* heet *X*.



Als *P* beweegt, beweegt *X* ook.

Wat is de baan van X als P de zijde BC doorloopt?

Formuleer hier een vermoeden over.

CABRI-tips

- Er is een optie CONTRUEER2>REFLECTION. Klik het te spiegelen punt aan en de lijn waar je in wilt spiegelen.
- Er is een optie CONSTRUEER1>MIDPOINT. Klik de twee punten aan waar je het midden van wilt nemen.

onderzoeks-tips

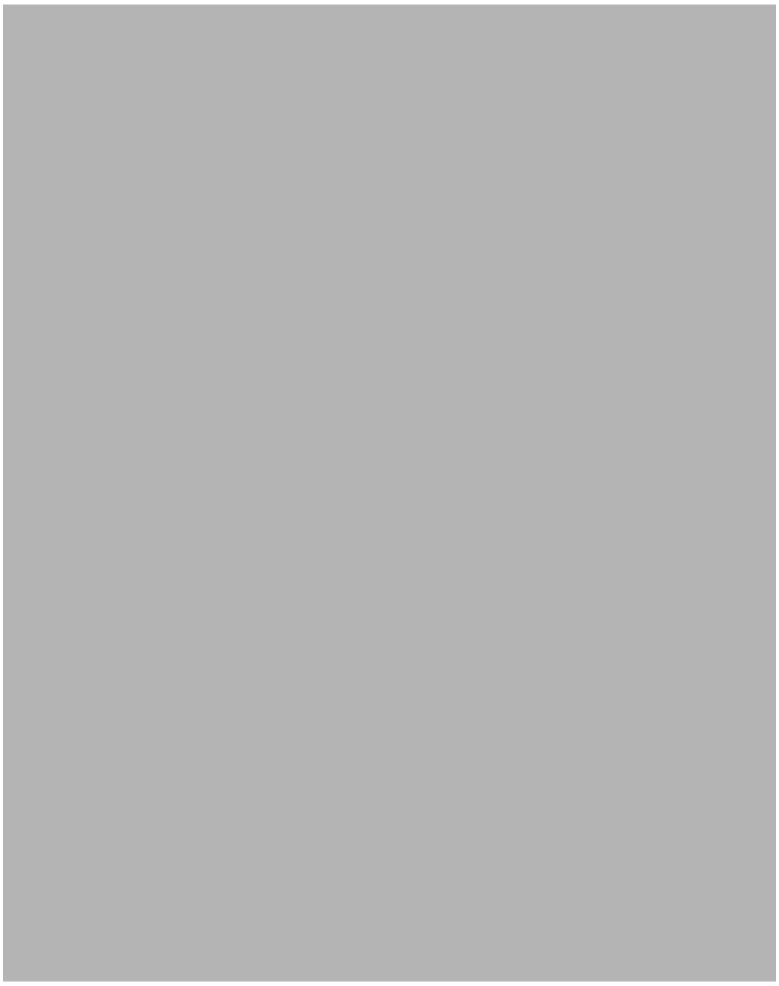
- *P* kan lopen van *B* tot *C*. Wat zijn de bijhorende uiterste punten voor *X*?
- Als *P* van *C* afloopt, beweegt *X* in een andere richting. Meet de hoeken $\angle PAC$ en $\angle XAB$ op met de optie MEET2>ANGLE; de hoek geef je weer met de driepuntsmethode aan. Meet eventueel nog andere hoeken bij *A*, bijvoorbeeld ook $\angle QAX$.
- Onderzoek bijzondere gevallen. Je kunt dat doen door de driehoek te vervormen. Bijvoorbeeld tot gelijkbenig en gelijkzijdig.

bewijzen

Je moet in het volgende hoofdstuk je vermoedens zeker kunnen bewijzen voor het bijzondere geval dat *ABC* een gelijkzijdige driehoek is, maar als je meer kunt, is dat mooi meegenomen!

(... Meer onderzoeksopdrachten met CABRI staan in hoofdstuk 2, bladzijde 147 ...)

Hoofdstuk 1:



Vermoedens bewijzen

In dit hoofdstuk gaat het om bewijzen van de vermoedens die gerezen zijn bij het CABRI-practicum.

Bij aantijgingen en vermoedens kan het niet blijven.
Je zult met krachtige wiskundige argumenten moeten komen. Kortom: bewijzen.

Op de voorpagina van dit hoofdstuk: Kenneth Starr, aanklager in onder andere de Whitewater-affaire. Starr zocht later bewijzen voor aan president Clinton toegeschreven '*sexual harassment*'. Dat lukte niet. Uiteindelijke probeerde hij te bewijzen dat Clinton en een stagiare op het Witte Huis, Monica Lewinsky, tijdens de gerechtelijke ondervraging meineed hadden gepleegd. Clintons positie als president zou daarmee onhoudbaar worden.
Tot nu toe (juni 1998) lijkt er weinig bewezen te zijn en is Clinton nog steeds president.

30: inleiding en werkwijze

In het practicum met CABRI heb je diverse dingen op het computerscherm zien gebeuren. Bij de problemen van paragraaf 29*: Vermoedens, beweging, sporen* heb je vermoedens opgesteld over wat er aan de hand is. Nu de laatste stap: onderzoeken of en waarom de vermoedens juist zijn. Met andere woorden, je moet gaan *bewijzen* wat je hebt ontdekt.
Een bewijs geeft aan hoe jouw ontdekking samenhangt met wat je al weet.
Sterker nog: hoe jouw ontdekking een logisch gevolg is van wat eerder bewezen is.

werkwijze

De problemen uit het vorige hoofdstuk worden nog even herhaald. Er staat een vermoeden bij, dat waarschijnlijk wel overeenkomt met wat je zelf bedacht hebt.
Dat vermoeden zul je moeten bewijzen.
Als je méér dan het vermoeden op zich hebt opgemerkt tijdens het practicum, doordat je bijvoorbeeld extra lijnen hebt getekend, dan is dat vast in je voordeel bij het vinden van een bewijs; houd je aantekeningen dus bij de hand.
Wat in hoofdstuk 5 over *Aanwijzingen* en *Voorbeelduitwerkingen* is gezegd, geldt ook voor dit hoofdstuk.
Gebruik de *Aanwijzingen* (ze beginnen op bladzijde 215) spaarzaam. Ze geven je wat meer hints, zodat je hopelijk verder komt als je bent vastgelopen.
De *Voorbeelduitwerkingen* (vanaf bladzijde 193) zijn bedoeld voor controle achteraf of als je lange tijd helemaal vast zit.

bewijzen opschrijven

Je kunt motiveringen in de bewijzen opschrijven door steeds te verwijzen naar nummers van eerdere beweringen. Maar je kunt die beweringen er gewoon kort bij schrijven.
Er zou dan bijvoorbeeld ergens kunnen staan:

$|AC| = |BD|$ omdat AC en BD diagonalen zijn in een rechthoek,

in plaats van:

dit volgt uit nr. 10c van het overzicht op bladzijde 6 .

Zo krijg je een wat makkelijker leesbare tekst. In de voorbeelduitwerkingen zijn beide manieren gebruikt.

strategieën

In hoofdstuk 3 heb je een aantal bewijsstrategieën leren kennen. In de volgende opgaven, de aanwijzingen en de uitwerkingen, wordt er regelmatig naar verwezen. Hier zijn ze nog een keer; je kunt natuurlijk ook naar de samenvattingen van hoofdstuk 5 kijken.

feest der herkenning	***vertaling***
schakels	***opsplitsen***
associaties	***plagiaat***

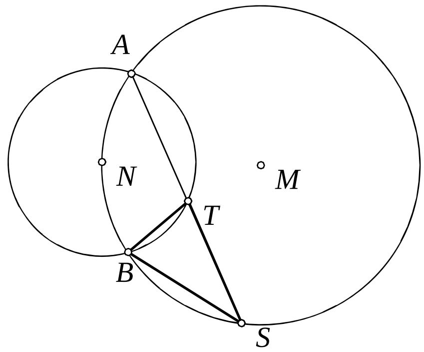
andere middelen

Denk ook aan de andere middelen die je hebt leren kennen:
- Het gebruik van figuren en *beeldtaal* daarbij.
  Denk aan markeren van gelijke lijnstukken, hoeken, parallelle lijnen, enzovoort.
- *Kijk terug naar wat je wee*t.
  Per slot van rekening is elk bewijs gebaseerd op wat al bewezen is!
- Heb ik alle gegevens wel gebruikt?
  Dat is ook een belangrijke vraag die je jezelf moet stellen als je vastloopt;
- *Gevalsonderscheiding.*
  Gaat je bewijs alleen op in bepaalde gevallen, dan moet je voor andere situaties een aangepast bewijs geven.

31: Vermoedens bewijzen

probleem 1: een bijzondere driehoek

Teken twee punten M en N. Teken de cirkel om M door N.
Kies op deze cirkel een punt A en teken de cirkel om N door A.
De twee cirkels snijden elkaar in een tweede punt B.
Kies op de cirkel om M een punt S en teken de lijnen SA en SB.
De lijn SA snijdt de cirkel om N nog in een punt T.
Driehoek BST heeft een bijzondere eigenschap. Welke? Formuleer hieromtrent een vermoeden.



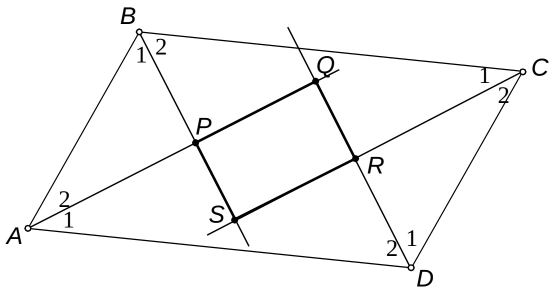
vermoeden: Driehoek BST is gelijkbenig.

1 **a.** Zoek een bewijs voor dit vermoeden, bijvoorbeeld via een of meer van de genoemde strategieën.
b. Noteer het bewijs in de vorm *Gegeven -Te bewijzen - Bewijs*.
c. *SB* snijdt de cirkel nog in *R*. Geef nóg een gelijkbenige driehoek in de figuur aan.

probleem 2: de deellijnen-vierhoek

Teken een willekeurige vierhoek ABCD. Teken ook de vier binnendeellijnen.
De deellijnen sluiten een vierhoek PQRS in.

vermoeden: ***Als ABCD een parallellogram is, dan sluiten de binnendeellijnen een rechthoek PQRS in.***

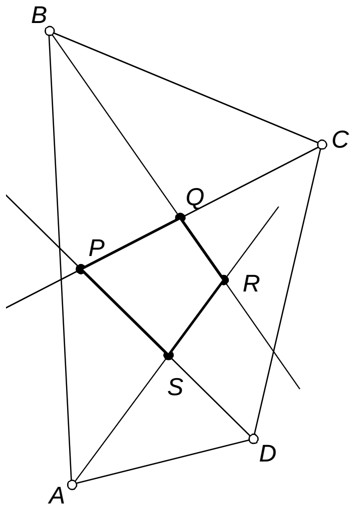


Dit eerste vermoeden zal je misschien bekend voorkomen, het is namelijk al aan bod geweest in hoofdstuk 1. Toch is het geen slecht idee het bewijs nog even kort op te schrijven. Het brengt je vast op ideeën die je bij de volgende twee opgaven kunt gebruiken.

2 Als je dit vermoeden wilt bewijzen, mag je dus eigenschappen van parallellogrammen gebruiken. Anderzijds kun je natuurlijk ook eigenschappen van deellijnen gebruiken.
a. Bewijs nu dit vermoeden en zorg dat je bij de diverse stappen goed aangeeft welke eigenschappen je gebruikt.
b. Precisering van het voorgaande: als *P* het snijpunt van de deellijnen uit *A* en *B* is, welke evenwijdigheid is dan gebruikt om aan te tonen dat hoek *P* recht is?

3 Onderzoek nu drie andere bijzondere gevallen; geef in alle drie de gevallen een korte bewijsschets. Maak indien mogelijk gebruik van eerder bewezen onderdelen.
a. Als *ABCD* een rechthoek is, dan is *PQRS* een vierkant.
b. Als *ABCD* een ruit is, dan ontaardt *PQRS* in één punt.
c. Als *ABCD* een trapezium is, dan is *PQRS* een vierhoek met twee overstaande rechte hoeken.

Het algemene vermoeden, dus in het geval waarin je niets over *ABCD* weet, zal al het voorgaande moeten omvatten. Waarschijnlijk ligt het nog het dichtst bij het geval van het trapezium. Daarbij werd *PQRS* een vierhoek met twee overstaande rechte hoeken. Je weet dat *PQRS* dan een koordenvierhoek is.
Als we de trapeziumvormige vierhoek *ABCD* veranderen, verdrinkt ook nog die rechthoekigheid. Het laatste wat nog boven water zou kunnen blijven, is dan: *PQRS* is een koordenvierhoek. Vandaar:



vermoeden: ***Als ABCD een vierhoek is, dan sluiten de binnendeellijnen van de hoeken A, B, C en D een koordenvierhoek in.***

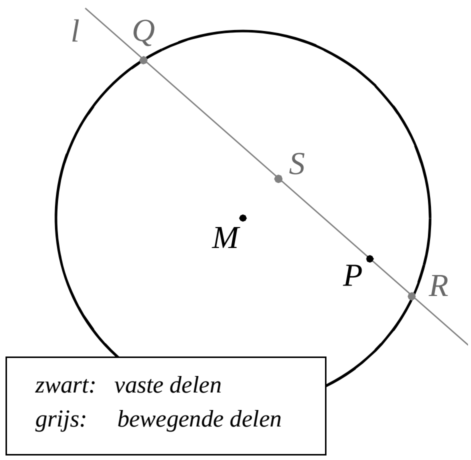
4 Bewijs dit vermoeden.

probleem 3: midden van draaiende koorde

In deze figuur zie je een cirkel met middelpunt M en een punt P.
Q is een lopend punt op de cirkel. Door Q en P is een lijn getekend, die de cirkel nog in R snijdt.
Het midden van QR is het punt S, dat ook op de lijn ligt.

Onderzoek hoe S beweegt als Q de cirkel doorloopt.

Stel een vermoeden op over de baan van S.



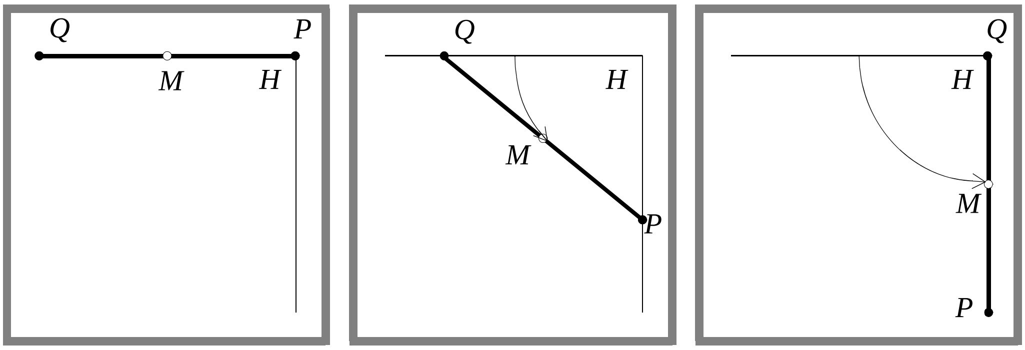
vermoeden: S doorloopt de cirkel die PM als middellijn heeft.

5 Bewijs dit vermoeden.
Let erop dat je nu eigenlijk twee dingen moet bewijzen:
a. Zo'n punt *S* ligt op de cirkel met middellijn *MP*.
b. Elk punt *T* van de cirkel met middellijn *MP* is het midden van de koorde (van de grote cirkel) die door *P* en *T* gaat.

probleem 4: midden tussen twee wandelaars

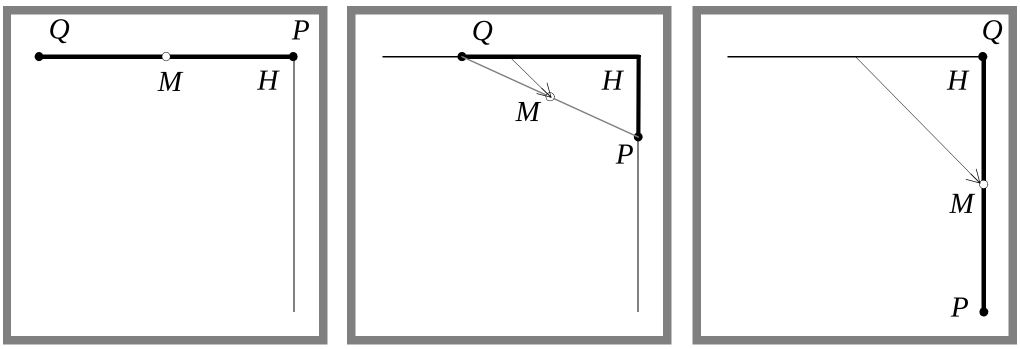
Hieronder zie je steeds enkele beelden bij een eenvoudige beweging. Het gaat om twee mensen, weergegeven door de punten *P* en *Q*, die achter elkaar een hoek *H* omlopen. *P* loopt steeds voorop en *Q* volgt. Ze zijn verbonden door een lijn waarvan we het midden *M* gaan volgen.
De film begint als *P* op de hoek is en eindigt als *Q* op de hoek is aangekomen.

eerste geval: de echte afstand van P en Q ondeling blijft constant



vermoeden: ***M doorloopt een kwartcirkel. De straal is de helft van de afstand tussen P en Q en het middelpunt is het hoekpunt.***

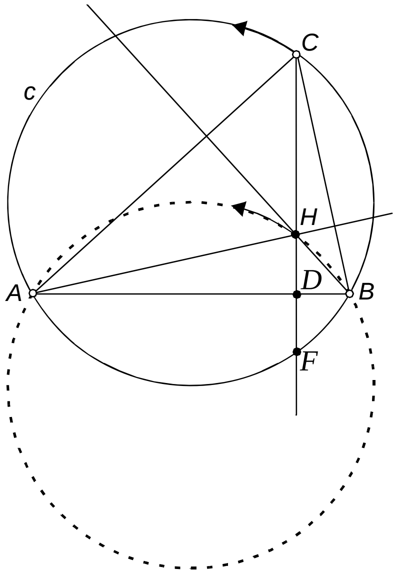
tweede geval: de afstand van P en Q langs de weg blijft constant.



vermoeden: ***M doorloopt de verbindingslijn van de middens van de lijnstukken waar P en Q over lopen.***

6 Bewijs beide vermoedens.

probleem 5: de baan van het hoogtepunt



Gegeven is een cirkel c met drie punten A, B en C erop. Als C de cirkel doorloopt en A en B blijven stilliggen, dan beschrijft het hoogtepunt H van driehoek ABC een baan.

Wie het heeft zien gebeuren op het computerscherm, kan niet ontkomen aan het volgende:

vermoeden: ***Punt H beweegt over een cirkel door A en B, die even groot is als de oorspronkelijke cirkel en ook door A en B gaat.***

7 Grote kans dat je méér hebt waargenomen, of iets anders dat gelijkwaardig met dit vermoeden is. Vandaar dat we eerst op de samenhang van een en ander ingaan. We gebruiken daarbij ook punt *F*, het andere snijpunt van de hoogtelijn uit *C* met de cirkel, en het voetpunt *D* van die hoogtelijn. *F* en *D* bewegen ook als *C* beweegt.

a. *Als* het vermoeden juist is, wat zal dan het verband tussen $|DF|$ en $|HD|$ zijn? Wat betekent dat voor de cirkel waar *H* op ligt, als je de ligging ervan vergelijkt met die van *c*?

b. Als het vermoeden juist is, dan moet $|CH|$ een vaste grootte hebben. Waarom? En hoe vertaal je dit in een verband tussen de beide cirkels?

c. Wat is het verband tussen $\angle ACB$ en $\angle AHB$?

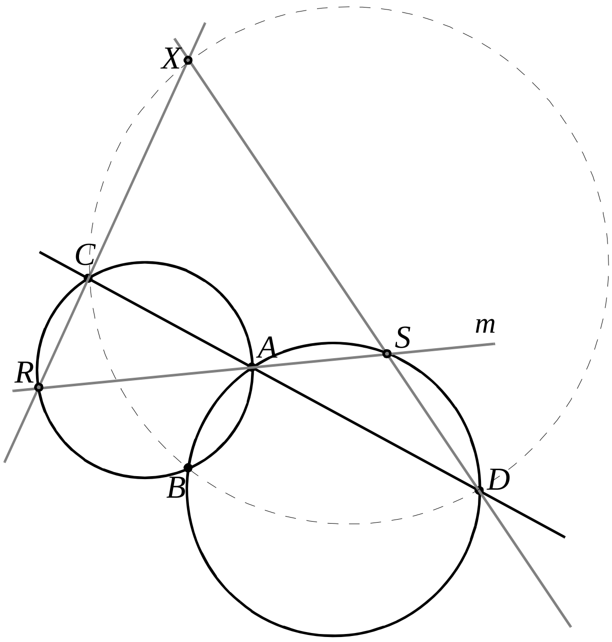
8 Bewijs nu het vermoeden.
Je kunt je hier laten inspireren door wat in de vorige opgave is verkend. De verbanden die daar met het vermoeden samenhingen, zouden ook tussenstappen in het bewijs kunnen zijn. Dat hoeft niet per se; zoek eerst je eigen weg! Misschien heb je ook niet alles nodig.

probleem 6: baan van een speciaal snijpunt

In deze figuur (volgende bladzijde) zie je:
- *twee cirkels c_1 en c_2,*
- *hun snijpunten A en B*
- *een lijn door A, die de cirkels respectievelijk nog in C en D snijdt.*

Op c_1 beweegt zich een punt R. Verder hangen nu van R af:
- *de lijn m door R en A*
- *het snijpunt van m met c_2: het punt S,*
- *de lijnen CR en DS*
- *het snijpunt X van CR en DS*

Onderzoek de baan van X als Q de cirkel c_1 doorloopt.



vermoeden: X doorloopt de cirkel die door C, D en B gaat.

9 Bewijs dit vermoeden.

Bij de aanwijzingen staat dat je naar bepaalde bekende figuren kunt zoeken, maar dat deed je natuurlijk al!

probleem 7: het midden van twee spiegelingen

Teken een driehoek ABC. Op zijde BC ligt het punt P.

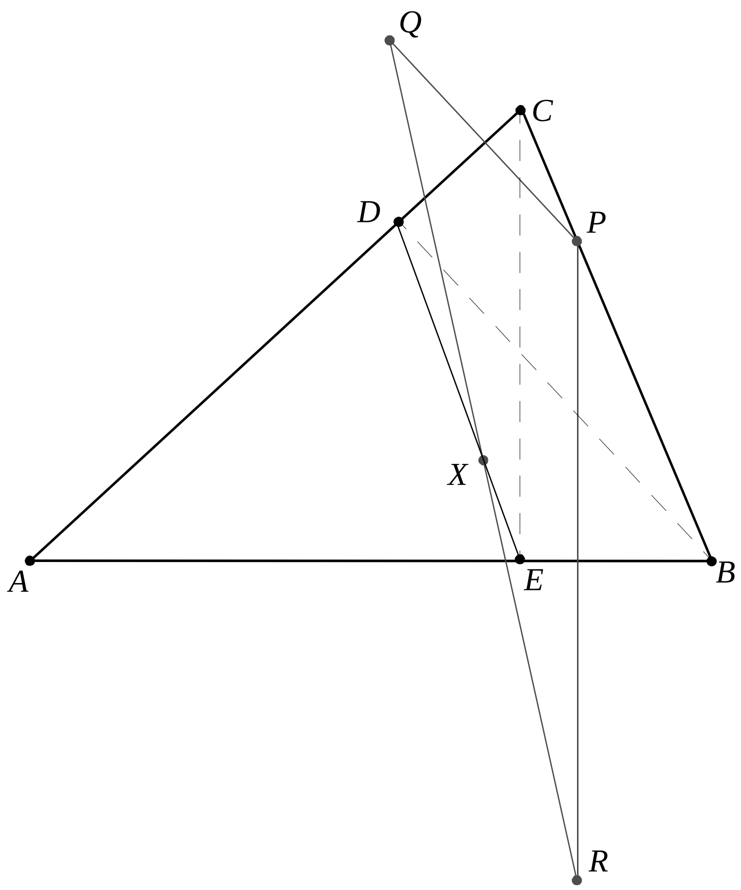
Teken de spiegelbeelden van P in AB en AC en noem ze Q en R.

Het midden van QR heet X.

Als P beweegt, beweegt X ook.

Wat is de baan van X als P de zijde BC doorloopt?

Formuleer hier een vermoeden over.



vermoeden: ***Als D en E de voetpunten zijn van de hoogtelijnen uit B en C, dan loopt X over lijnstuk DE als P over CB loopt.***

X ligt op *E* als *P* op *C* ligt, dat is niet zo moeilijk: in die positie valt *Q* namelijk met *P* en *C* samen en is *PR* de verdubbelde hoogtelijn uit *C*.

Bij de practicumopdracht waren suggesties voor onderzoek aangegeven. Dat leidde vast tot vermoedens over enkele hoeken:

vermoedens over de hoeken bij A:

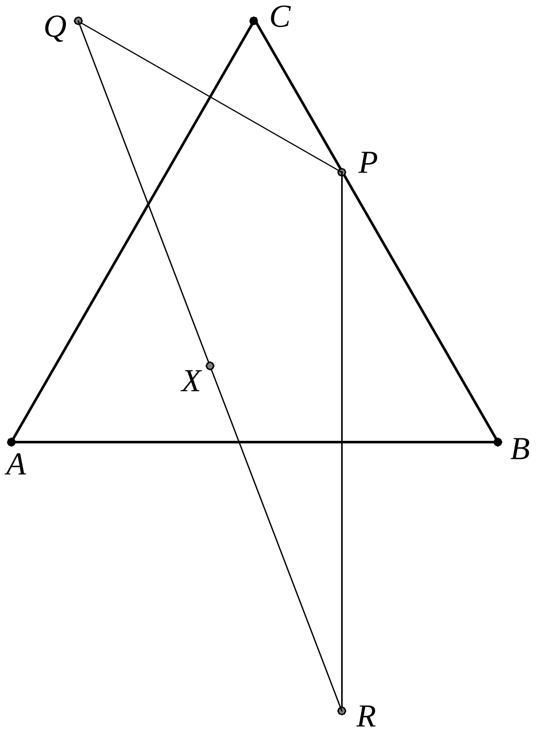
a: –***CAP*** **=** –***BAX***

b: –***QAX*** **=** –***CAB***

10 Trek de noodzakelijke lijnen in de figuur en bewijs de twee vermoedens over de hoeken. Kies zelf in welke volgorde je dat doet.

Het algemene bewijs dat *X* het aangegeven lijnstuk *DE* doorloopt, is niet zo eenvoudig; maar in het geval dat driehoek *ABC* bijzonder is, valt het wel mee. Dat bewijs moet je nu gaan zoeken.

11 Het geval dat *ABC* gelijkzijdig is, is hieronder opnieuw getekend. De gelijkheden van hoeken die je hebt bewezen, mag je uiteraard hier ook gebruiken.
Eerst een nadere verkenning van deze situatie.



a. Vul de figuur nog aan met de punten *D* en *E*. Geef in beeldtaal zoveel mogelijk gelijkheden en bekende hoeken in de figuur aan. Gebruik ook de bewezen beweringen van de vorige opgave.

b. Gebruik nu ook wat je weet van driehoeken met hoeken van 90 , 60 en 30 om aan te tonen dat $|AX| = \frac{1}{2}|AP|$.

Het lijkt er sterk op dat *X* op de middenparallel van *BC* en punt *A* ligt. Dat klopt ook met het algemene vermoeden.
Jammer genoeg volgt dit niet direct uit wat bij **b** bewezen is. Punt *X* is namelijk *niet* het midden van *AP*. We hebben nog een extra schakel nodig.

c. Voeg een punt in de tekening toe – noem het *P'*–, zodat *X* wel het midden van *AP'* is.

d. Geef nu een bewijs van de bewering:
als P op zijde BC van de gelijkzijdige driehoek ABC ligt, dan ligt het punt X, dat het midden is van de verbindingslijn van de spiegelbeelden van P in AB en in AC, op de middenparallel van BC en A.

extra (en behoorlijk lastig!)

het algemene geval

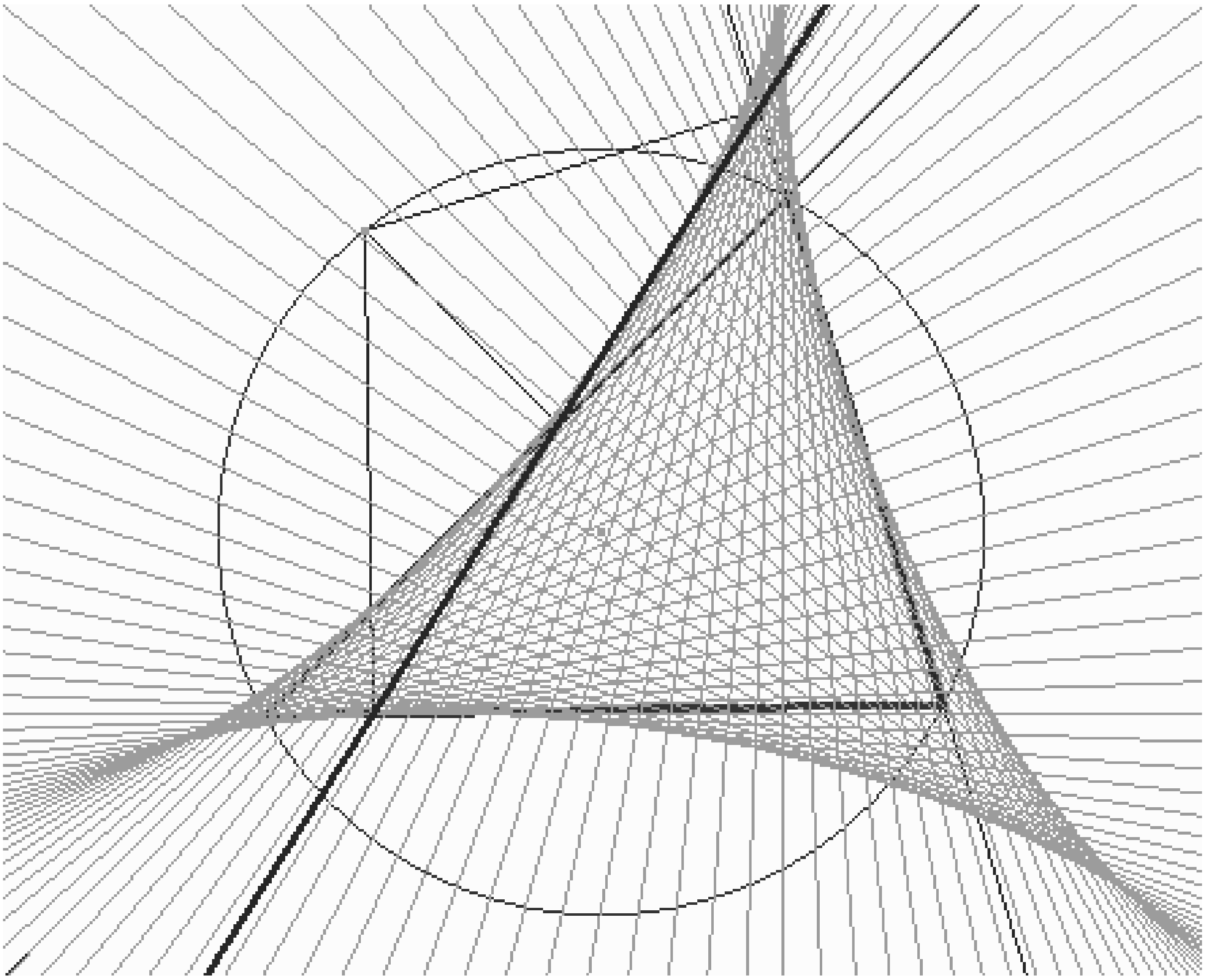
12 Bij het bewijs van het algemene geval kun je plagiaat plegen op het voorgaande, maar je moet dan tijdens het verhaal twee dingen aanpassen:

– de conclusie via het middenparallelprincipe wordt nu iets anders; dat komt omdat de factor $\frac{1}{2}$ door een andere moet worden vervangen en strikt genomen valt die conclusie dan net buiten ons meetkunde bereik.

– je moet een geschikte keuze maken voor *P*'. Die moet wèl op de lijn *AX* liggen, maar ook moet gelden |*AP*'| = |*AP*|. *P*' ligt dan niet (altijd) op *BC*, maar wel op een andere lijn: het spiegelbeeld van *BC* in de deellijn uit *A*.

Ga de uitdaging aan: bewijs het algemene vermoeden.

Hoofdstuk 2:



Herhalings- en onderzoeksopdrachten

Ter inleiding

Dit hoofdstuk bestaat uit een forse serie problemen. Sommige sluiten aan bij voorgaande situaties, andere boren nieuw terrein aan.
De bedoeling is dat je in overleg een of meer paragrafen uitkiest en daar dan zelfstandig aan werkt als je in jouw studieplanning daar nog tijd voor hebt.

Er zijn twee soorten problemen:

a. *Gesloten problemen*
   Dat zijn de paragrafen 32 tot en met 35.

   Hierbij wordt je geholpen om bijvoorbeeld een specifieke stelling te vinden, die bewezen moet worden. Dat lijkt erg op de werkwijze van de rest van dit boekje. Bij deze problemen horen alleen voorbeelduitwerkingen achterin. Je vindt minder aanwijzingen dan in vorige hoofdstukken.
   Het zijn uitdagende extra oefeningen in het vinden van bewijzen .
   De meetkundige problemen waar het omgaat, zijn meestal van veel later datum dan de klassieke problemen van Euclides. Sommige ontdekkingen zijn door amateurs gedaan. Je ontmoet onder andere een bekend Frans veldheer en een minder bekende Franse officier.
b. *Open onderzoeksopdrachten*
   Dat zijn de paragrafen 36 tot en met 39.

   Bij deze problemen liggen de zaken minder vast. Na een inleiding moet je zelf op zoek gaan. De vragen stel je als het ware gedeeltelijk zelf.
   Zo'n onderzoek sluit je af met een verslag. In dat verslag zal ook wel hier en daar een bewijs staan, dat je bij bepaalde vermoedens hebt gevonden. Als je zo'n bewijs niet vindt, moet je je vermoedens toch maar in het verslag spuien; in dat geval zeker met kloppende voorbeeldtekeningen erbij. Misschien vindt iemand anders dan later wel een bewijs bij jouw vermoedens. Of een tegenvoorbeeld!
   Omdat bij deze onderzoeken minder vaststaat, zijn er ook geen voorbeelduitwerkingen en aanwijzingen meer.

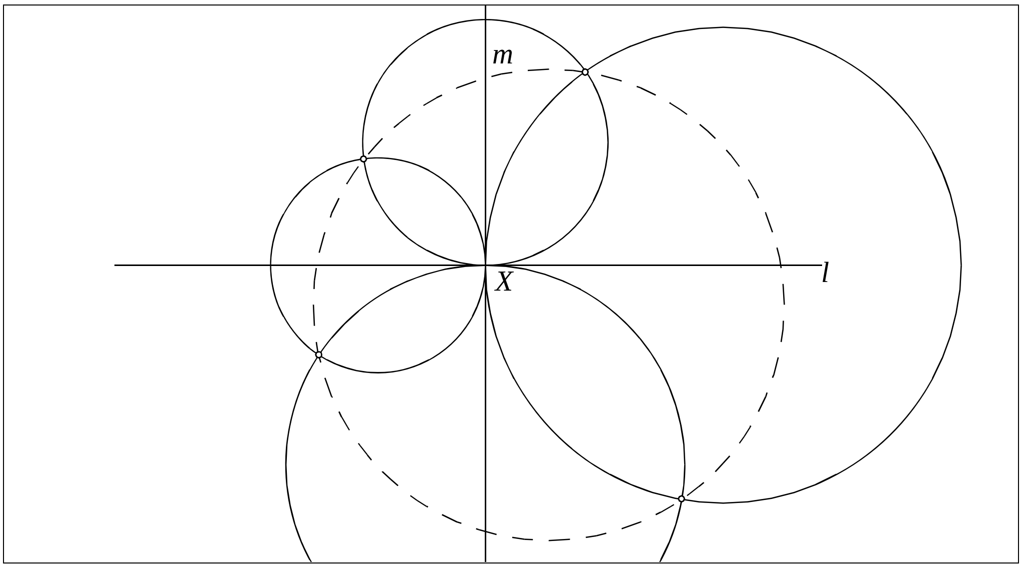
gebruik van CABRI

Bij veel problemen kun je CABRI gebruiken om te tekenen en om te verkennen. Bij enkele gevallen is dat expliciet aangegeven.
Omdat het de bedoeling is dat je wat zelfstandiger aan een keuze uit dit hoofdstuk werkt, moet je ook maar zelf een regeling daarvoor treffen wat betreft het gebruik van de computers van school of elders.

32: Twee problemen met cirkels en raaklijnen

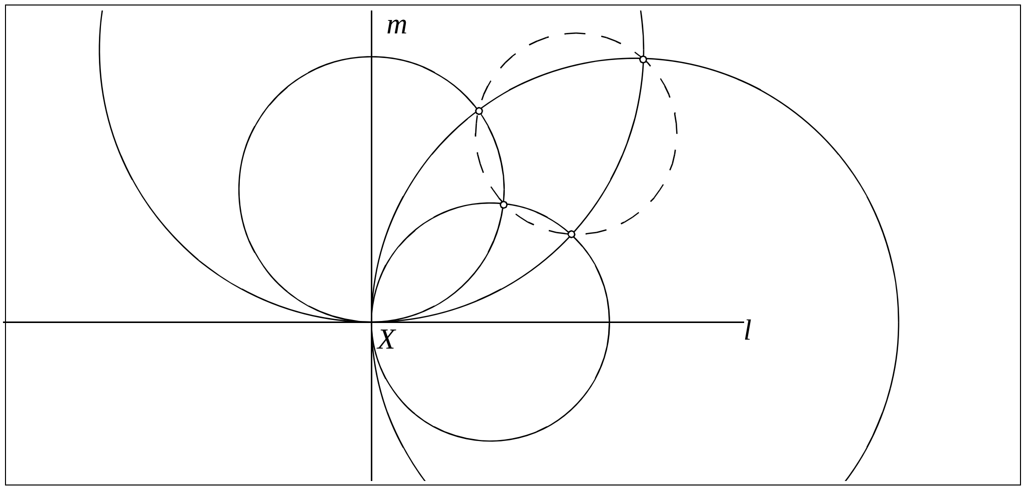
loodrecht snijden en raken

1 Gegeven twee lijnen, *l* en *m*, loodrecht op elkaar, met snijpunt *X*. En vier cirkels, twee in *X* rakend aan *l*, twee in *X* rakend aan *m*.



a. Bewijs dat de andere vier snijpunten ook op één cirkel liggen; in de figuur is dat de gestippelde cirkel.

b. Ga na dat het niet noodzakelijk is dat de cirkels steeds aan verschillende kanten van de lijn liggen.



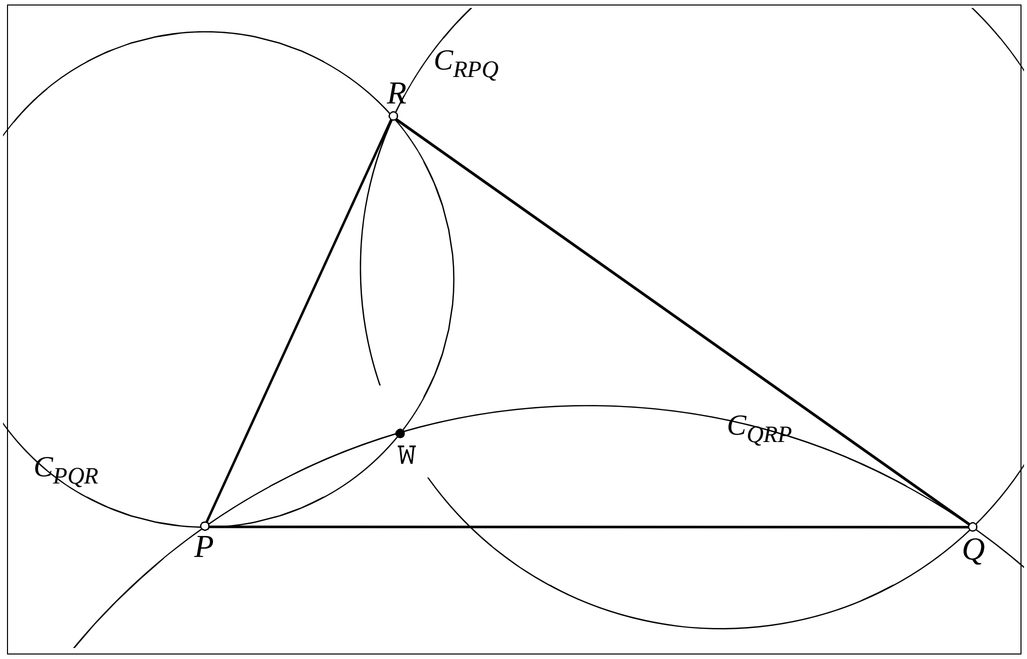
Twee keer twee aan één kant kan ook. Geef ook voor dit geval een bewijs!

c. Er is nog een derde ligging mogelijk. Neem die ook onder de loep.

d. Laat zien waarom de loodrechtheid van de lijnen *l* en *m* niet gemist kan worden.

de punten van Brocard

2 Gegeven een driehoek PQR.
C_{PQR} is de cirkel die in P raakt aan PQ en door R gaat.
C_{QRP} is de cirkel die in Q raakt aan QR en door P gaat.
C_{RPQ} is de cirkel die in R raakt aan RP en door Q gaat.
W is het snijpunt van C_{PQR} en C_{QRP} dat binnen de driehoek ligt.



Bewijs in de volgorde die jezelf wilt:
– dat –W PQ = –W RP = –W QR.
– dat cirkel C_{RPQ} ook door W gaat.

Opmerking:
Als je de namen P en Q in de tekening wisselt, krijg je drie andere cirkels en een ander gezamenlijk snijpunt, noem dat W'.

De punten W en W' heten de punten van Brocard, naar de Franse officier die er in 1875 de aandacht op richtte. Ze waren 60 jaar eerder al opgemerkt door de wiskundigen Crelle en Jacobi. Toch aardig dat ze wel naar de amateur Brocard genoemd zijn.

De punten W en W' blijken isogonaal verwant te zijn, zoals dat heet.
Het betekent dat als je bijvoorbeeld de lijn QW spiegelt in de deellijn van –PQR, dat het spiegelbeeld dan door W ‘ gaat. Vanuit de andere hoekpunten moet zoiets dan ook kloppen.
Voor W' geldt (in analogie aan onderdeel **a**, verwissel P en Q) namelijk:

–W'QP = –W'RQ = –W'PR

Maar voor de isogonale ligging moet je dan nog bewijzen: –W PQ = –W'QP
En dat valt niet mee!

33: kransen voor een bekend generaal

de stelling van Napoleon

Je herinnert je de stelling over de punten van Fermat:

> *Plaats drie gelijkzijdige driehoeken op de zijden AB, BC en CA van een driehoek ABC. Hun derde punten heten respectievelijk D, E en F.*
> *Dan gaan de lijnen AD, BE en CF door één punt.*

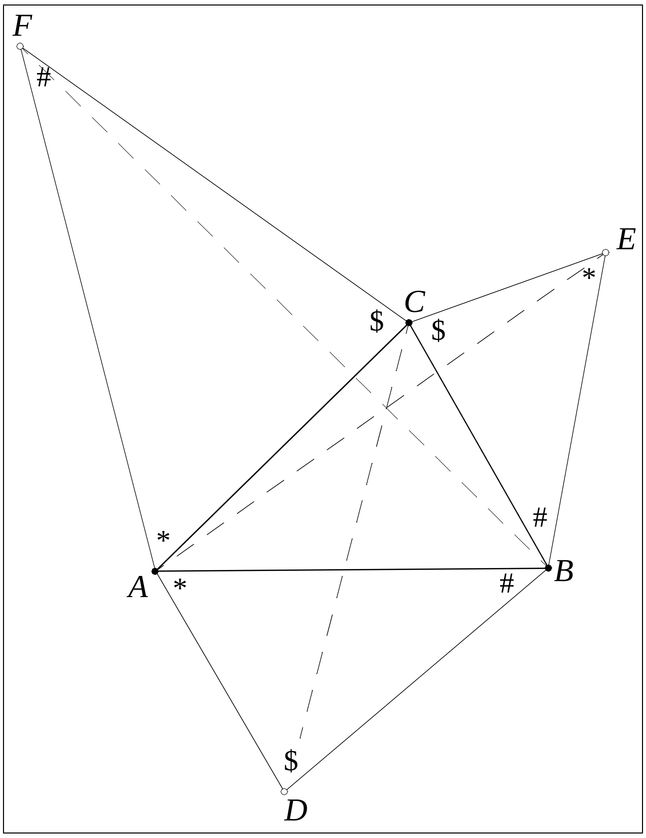
De gelijkzijdige driehoeken liggen als een krans om de oorspronkelijke driehoek. Zie bladzijde 118; daar werd ook teruggegrepen op een eerder bewezen feit:

> *het door één punt gaan van de drie omgeschreven cirkels van de driehoeken BCD, CAE en ABF.*

Aan Napoleon – een Corsicaanse wiskundeliefhebber – wordt de volgende veralgemening van deze stelling toegeschreven.

> *Plaats drie driehoeken van gelijke vorm op de zijden AB, BC en CA van een driehoek ABC. Hun derde punten heten respectievelijk D, E en F. De driehoeken liggen zó, dat de hoeken bij D, E en F juist de drie verschillende hoeken zijn.*
> *Dan gaan de lijnen AD, BE en CF door één punt.*

Het verschil is dat Napoleon zich niet houdt aan het gelijkzijdig zijn van de omkransende driehoeken.
Die driehoeken moeten nog wel gelijkvormig zijn en ook in de juiste standen liggen.
In de figuur is met tekens aangegeven welke hoeken gelijk moeten zijn.

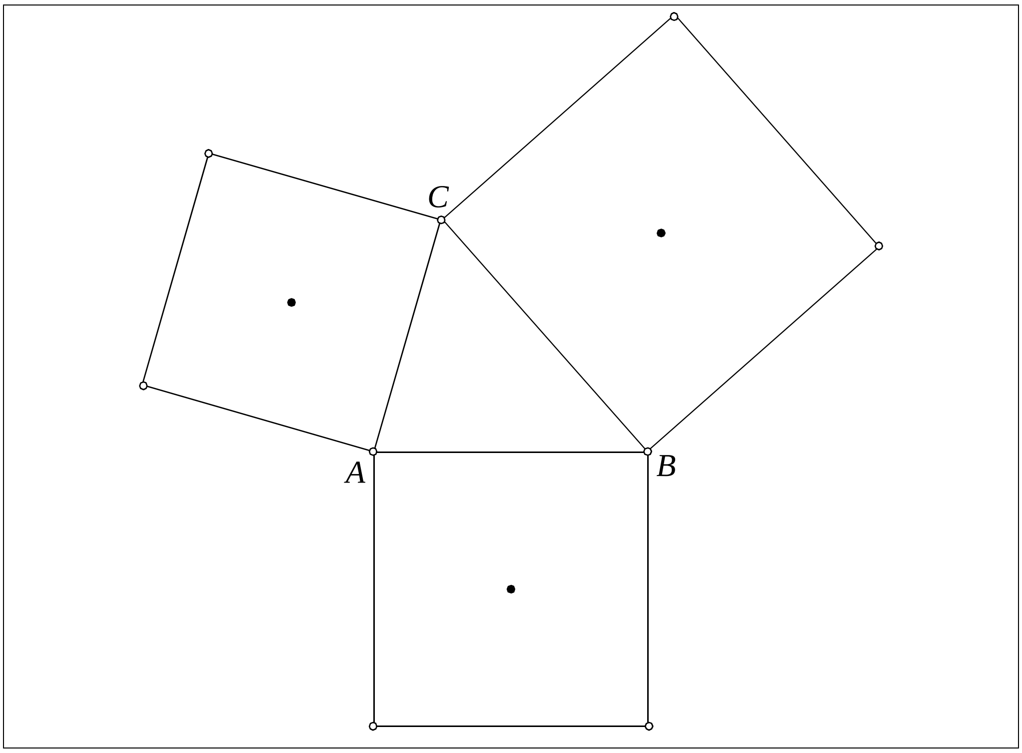


3 Bewijs de stelling van Napoleon.
Na de inleiding is er een voor de hand liggende strategie!

Opmerking:
Het is tamelijk onzeker of de stelling echt van Napoleon stamt.
In de Fermat-situatie (zie bladzijde 118) geldt ook nog dat de middelpunten van de omkransende driehoeken zelf weer een gelijkzijdige driehoek vormen.
Door sommige auteurs wordt juist dat aan Napoleon toegeschreven.

omvierkanting

Hier is een willekeurige driehoek *ABC* omgeven door drie vierkanten op de zijden. De middens van de vierkanten zijn ook gemarkeerd.



4 **a.** Trek vanuit elk hoekpunt van de driehoek drie lijnen: naar het midden van het tegenoverliggende vierkant en naar de twee hoekpunten van het tegenoverliggende vierkant, die niet punten van de driehoek zijn.

b. Je hebt negen lijnen getekend en er ontstaat een flink aantal snijpunten. Markeer die snijpunten waardoor *drie* lijnen lijken te gaan. Maak een onderscheid bij deze bijzondere punten: er is verschil in de hoeveelheid middelpunt-overkant verbindingen!

c. Het markeren van die speciale punten bij **b** is eigenlijk alleen maar het geven van een vermoeden. Vandaar: *Bewijs die vermoedens.*
Tip: Beperk je tot de drie punten van dezelfde soort. Daar kun je de stelling van Napoleon bij gebruiken. Je hebt niet veel keus in de soort driehoeken die je op de zijden van *ABC* gaat zetten.

5 Spiegel de hoekpunten *A*, *B* en *C* van driehoek *ABC* in zijde *BC*, *CA* en *AB*. Er ontstaan *A*', *B*' en *C*' .

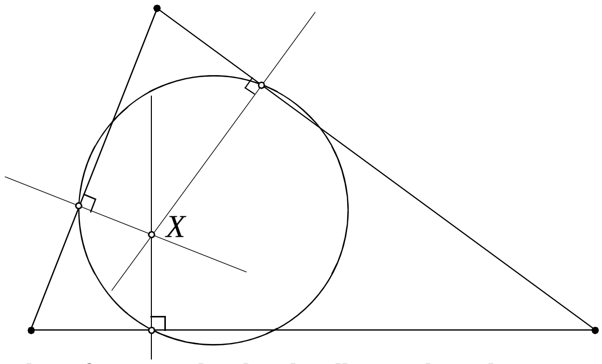
a. Toon nu met behulp van de stelling van Napoleon aan dat *AA*', *BB*' en *CC*' door één punt gaan.

b. Van welke oude stelling is dit een nieuw bewijs?

34: Voetpuntsdriehoeken

– Bij alle onderdelen van deze paragraaf kun je de tekeningen goed met CABRI maken –

twee trio's loodlijnen



Het bijzondere van deze figuur is dat drie loodlijnen door de snijpunten van cirkel en driehoek door één punt, *X*, gaan. Je zou met zo'n punt *X* kunnen beginnen, dan de loodlijnen tekenen en vervolgens de cirkel door de drie voetpunten. Dan heb je zo'n situatie te pakken. Als je met zomaar een cirkel en driehoek begint, gaan de drie loodlijnen niet door één punt. Er is dus iets bijzonders aan de hand.
Er blijkt ook een bijzonder gevolg te zijn.

6 a. De cirkel snijdt de drie zijden van de driehoek in nog drie andere punten. Teken ook de loodlijnen op de zijden in die drie punten.

b. Aan een vermoeden over die drie loodlijnen valt niet te ontkomen! Formuleer en bewijs dat vermoeden. Betrek er het middelpunt van de getekende cirkel bij.

Je kunt de situatie van deze opgave ook als volgt omschrijven:
– stap 1: ga uit van een vaste driehoek *ABC* en een punt *X* (niet per se binnen *ABC*)
– stap 2: bepaal de voetpunten *D*, *E* en *F* van de loodlijnen uit X op de driehoek

voetpunts-driehoek

DEF heet de *voetpuntsdriehoek* van *P* op *ABC*.

– stap 3: teken de cirkel door *D*, *E* en *F* (als die bestaat!) en vind zo drie nieuwe snijpunten van de cirkel met de driehoek; noem die *P*, *Q*, en *R*
– stap 4: teken de loodlijnen in *P*, *Q* en *R*; deze gaan door één punt *Y* (dat is bewezen in 6 a en b).

bevriende punten

Zo vind je (lijkt het wel) voor *elk* punt *X* een speciaal punt *Y* .
Noem *Y* het bevriende punt van *X* ten opzichte van driehoek *ABC*.

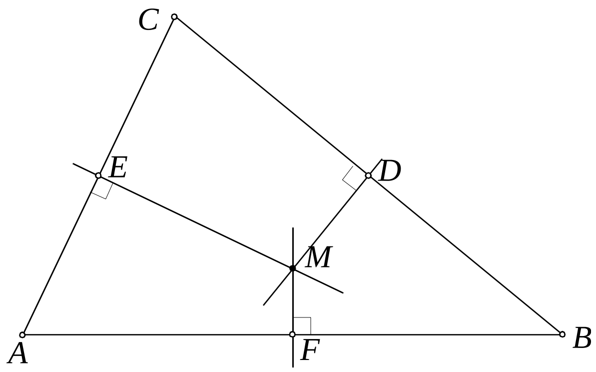
7 a. Bij welk van de vier aangegeven stappen zou het misschien mis kunnen gaan?

b. Als je voor *X* het middelpunt *I* van de ingeschreven cirkel neemt, vind je wel de aangegeven punten *D*, *E* en *F*. Geef commentaar op:
het bevriende punt van I is I zelf.

c. Als *Y* het bevriende punt van *X* is, wat is dan het bevriende punt van *Y*?

Het geval dat er geen cirkel is door *D*, *E* en *F* is bijzonder. In dat geval liggen de drie punten op één lijn. De volgende paragraaf gaat daarover.
Daar nemen we voor *X* een bekend speciaal punt: het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

de cirkel van Feuerbach



8 Gegeven is hier een driehoek ABC met het middelpunt M van de omgeschreven cirkel. De voetpunten van M zijn al getekend.

a. Geef in beeldtaal in de figuur ook gelijke lijnstukken aan.

b. Teken de voetpuntsdriehoek DEF van M. Uit welke bijzondere lijnen bestaat die driehoek? Wat weet je nu over *vorm* en *hoeken* van driehoek DEF?

c. Vind nu door tekenen het bevriende punt van M.

d. Het middelpunt van de cirkel door D, E en F heet voortaan N. Markeer dat ook.

9 Na het tekenen kom je er niet onderuit. Het vermoeden is:

het bevriende punt van M is het hoogtepunt van driehoek ABC.

In deze opgave gaan we dat vermoeden bewijzen.

a. Noem het voetpunt van de hoogtelijn uit C op AB verder H_C. Bewijs dat dit punt op de omgeschreven cirkel van DEF ligt; onderzoek hiertoe $-EH_CD$.

b. Bewijs nu verder dat het hoogtepunt H van ABC het bevriende punt van M is.

Op de omgeschreven cirkel van DEF liggen dus drie speciale punten van de driehoek: de voetpunten van de hoogtelijnen van ABC. De cirkel snijdt elke hoogtelijn echter ook nog in een ander punt. Deze drie punten zijn ook ‘bijzonder’. Dat onderzoeken we nu.

10 Noem het (andere) snijpunt van de omgeschreven cirkel van DEF met de hoogtelijn CH_C nu G. Het lijkt erop dat G midden tussen H en C in ligt. Ook bij de andere twee hoogtelijnen lijkt zoiets te gelden: de cirkel gaat zo te zien door de middens van AH en BH. In deze opgave ga je *bewijzen* dat dit inderdaad zo is.

Eerst komt het zoeken naar elementen die in het bewijs een rol kunnen spelen, daarna het bewijs zelf.

a. Middens van lijnstukken: er zijn er al een paar. Zo is D het midden van BC. Zoek een driehoek waarin je straks misschien via het middenparallelprincipe tot de gelijkheid van $|CG|$ en $|GH|$ kunt besluiten, ook al kun je de noodzakelijke evenwijdigheid nog niet aantonen.

b. Dat G het midden is van HC is nog niet zeker. Toch kun je wel iets anders bewijzen over G. Een vermoeden over de ligging van G, N en F dringt zich uit de tekening op. Formuleer dit vermoeden en stel het veilig met een *bewijs*.

c. Als GF zo bijzonder is voor de cirkel, kan dat gebruikt worden om nog meer hoeken ‘recht’ te praten. Verbind daartoe G met andere punten op de cirkel en zoek zulke hoeken. Zoek nu een weg naar een middenparallel voor onderdeel **a**.

d. Afwerking: noteer een correct bewijs voor de bewering $|CG| = |GH|$.

Uiteraard liggen middens K en L van HA en HB ook op de cirkel.

negenpunts-cirkel van Feuerbach

De cirkel door de negen punten die hier zijn aangegeven, heet de *negenpuntscirkel van **Feuerbach***. Deze gaat dus door:

– de drie middens van de zijden
– de drie voetpunten van de hoogtelijnen
– de drie middens van de verbindingslijnen van het hoogtepunt met de hoekpunten.

tot slot nog dit

11 De spiegelbeelden van *M* in de zijden van driehoek *DEF* liggen ook op de cirkel van Feuerbach. Waarom?

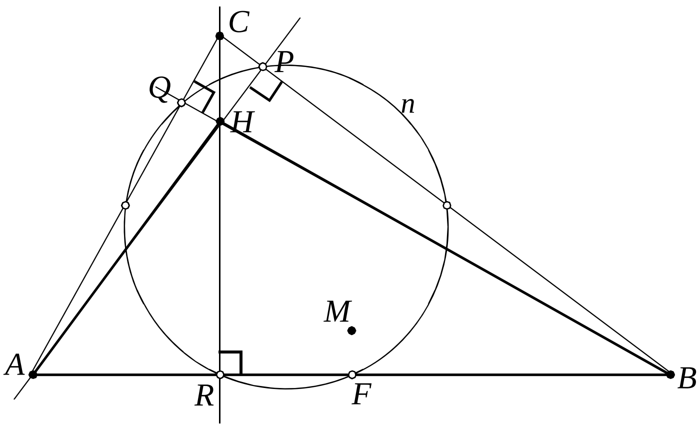
12 Toon tot slot aan: het zwaartepunt *Z* van *ABC* ligt ook op de lijn *HM*.
Tip: Kijk nog eens terug naar bladzijde 19 over de ligging van het zwaartepunt op een zwaartelijn.

lijn van Euler

De lijn *HM* (waar dus *Z* en *N* ook op liggen) heet ***de lijn van Euler***.

een alternatief bewijs

In deze figuur is weer *ABC* de uitgangsdriehoek. *P*, *Q* en *R* zijn hier de voetpunten van de hoogtelijnen. De cirkel *n* die door *P*, *Q* en *R* gaat, gaat ook door de middens van de zijden, dat volgt uit het bevriend zijn van *H* en *M*.



13 Via een fraaie truc valt ook heel anders te bewijzen dat het midden van bijvoorbeeld *BH* op *n* ligt.
We stappen dus opnieuw in na opgave 9; de aangegeven 6 punten liggen al op *n*; in het bewijs is geen gebruik gemaakt van het al dan niet scherp zijn van de driehoek waarker mee begonnen is. Laten we *n* even de *zespuntscirkel* van *ABC* noemen.

- **a.** Neem nu driehoek *AHB* als uitgangsdriehoek. In de tekening is die wat dik gemarkeerd. Wat zijn de hoogtelijnen van deze driehoek, wat is het hoogtepunt ervan en wat zijn de voetpunten van de hoogtelijnen?
- **b.** Wat is dus de zespuntscirkel van *AHB* en wat volgt daaruit over de middens van *HB* en *HA*?
- **c.** Hoe moet het nu met het midden van *HC*?

extra

14 Nog enkele extraatjes bij de de cirkel van Feuerbach en de lijn van Euler.
In de figuur hierboven is *F* weer het midden van *AB*.

- **a.** Toon aan: $|CH| = 2\ |MF|$.
- **b.** Toon aan: –*FBM* = –*CBH*.

Spectaculair, maar lastig bewijsbaar is nog dit:

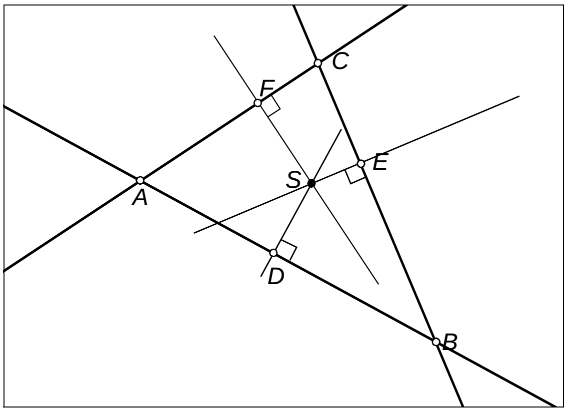
de negenpuntscirkel raakt aan de ingeschreven cirkel van ABC en ook aan de drie aangeschreven cirkels van ABC.

Ook dit is door Feuerbach in het begin van de vorige eeuw ontdekt en bewezen.

De gereedschappen waar in deze paragraaf de eigenschappen van de cirkel van Feuerbach en de lijn van Euler zijn bewezen, waren al ruim 2300 jaar geleden aan de oude Grieken bekend. Toch duurde het nog lang voor de zaken uit deze paragraaf werden ontdekt. Zou dat betekenen dat de gereedschappen van deze meetkunde weliswaar eenvoudig zijn, maar dat het werken ermee toch niet zo simpel is?

35: De rechte van Wallace-Simson

(Bij deze paragraaf heb je Cabri echt nodig)



In de figuur hiernaast zijn door een willekeurig punt *S* de loodlijnen getekend op de zijden van driehoek *ABC*. De snijpunten van deze loodlijnen met de driehoekszijden heten de **voetpunten** van punt *S*.
Je kunt ook zeggen: de loodrechte projecties van *S* op de lijnen *AB*, *BC* en *CA* zijn de punten *D*, *E* en *F*.
Driehoek *DEF* heet de **voetpuntsdriehoek** van *S*.

15 Voer de constructie uit. Let wel op het volgende.

a. Gebruik doorlopende lijnen door de gekozen punten en geen korte lijnstukken. De voetpunten zijn er dan altijd. Gebruik dus niet de TRIANGLE-optie.
b. Maak een vrij liggend punt *S* en teken de drie loodlijnen.
c. Versleep nu *S*, zodat de loodlijnen meegaan. Probeer twee situaties in beeld te krijgen die je inmiddels goed kent.

de rechte van Wallace

16 In de figuur vormen de drie voetpunten van punt *S* een driehoek *DEF*. Dat verandert in het algemeen niet als je punt *S* buiten de driehoek *ABC* sleept. Maar er zijn ook plaatsen voor *S* te vinden zo dat de drie voetpunten van *S* op een rechte lijn liggen en dus géén driehoek meer vormen. Probeer dat maar eens.

het probleem

Het probleem van deze opdracht is:

waar moet punt S liggen als zijn voetpunten D, E en F op één lijn liggen?

We beperken het onderzoek tot scherphoekige driehoeken *ABC*.

a. Omdat het lastig is om te zien of de drie punten op één lijn liggen, tekenen we de lijn door *twee* van die punten. Vul je tekening dus aan met de lijn door *D* en *E*.
Versleep nu punt *S* buiten driehoek *ABC* en probeer een paar plaatsen te vinden, zo dat punt *F* óp de lijn *DE* komt te liggen.
b. Als twee van de drie punten *D*, *E* en *F* samenvallen, liggen de ‘drie’ punten zeker op één lijn. Onderzoek waar *S* dan zou moeten liggen.
c. Het is ook mogelijk dat twee van de voetpunten samenvallen met hoekpunten van de driehoek (bijvoorbeeld *D* valt samen met *B* en *F* valt samen met *A*).
Onderzoek wat er in dat geval met de drie loodlijnen aan de hand is.
d. Wat gebeurt er als *S* op het verlengde van een van de driehoekszijden ligt?

17 Je zult wel gemerkt hebben dat de mogelijkheden om *D*, *E* en *F* op één lijn te krijgen, beperkt zijn. De hoekpunten *A*, *B* en *C* zijn geschikt, verder ligt *S* blijkbaar steeds buiten de driehoek maar ook weer niet heel ver weg.
Een idee: zou het met de omgeschreven cirkel te maken hebben?

a. Construeer de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*. Verberg achteraf je sporen met de optie EXTRA2 > HIDE/SHOW, dan blijft je tekening overzichtelijk.

b. Onderzoek de onderlinge ligging van *D*, *E* en *F* als *S* respectievelijk buiten, op en binnen deze cirkel ligt.
Formuleer een vermoeden voor scherphoekige driehoeken.

c. Koppel nu *S* aan de omgeschreven cirkel. Dat gaat zo:
- Kies CONSTRUCTIES1>REDEFINE OBJECT
- Ga naar punt *S*. Maak nu een *sleepbeweging*; je krijgt een keuze aangeboden; beweeg naar POINT-ON-OBJECT en laat los. Klik nu de cirkel aan waar je *S* op wilt hebben. Nu is *S* voortaan aan de cirkel gebonden.

d. Dat bewegen kun je ook weer door de computer laten uitvoeren, (zoals eerder) met de optie:
EXTRA1>ANIMATE
Klik op *S* en versleep *S* een stukje. Het lijkt op een flipperkast!
Laat los en kijk toe.
Je stopt de animatie met een muistik of met tikken op **ESC**.

e. Maak driehoek *ABC* ook eens rechthoekig. Onderzoek of jouw vermoeden nu ook van toepassing is op zo’n driehoek. Let ook weer op bijzondere situaties.

rechte van Wallace

Deze lijn heet: **rechte van Wallace** of **rechte van Simson.**

Jouw ‘vermoeden’ over de rechte van Simson is te bewijzen met de middelen die we in dit boekje hebben ontwikkeld. Dat moet je straks dan ook doen.

Het aardige (of onaardige) van zo’n computerprogramma is, dat je ook snel dingen kunt zien, die veel moeilijker zijn, maar wel heel fraai op het computerscherm verschijnen. Dat doen we dus toch.

18 Je kunt ook de *baan* van de rechte van Simson tekenen als *S* over de omgeschreven cirkel loopt. Wat zou dat worden?

a. Gebruik weer CONSTRUEER1>LOCUS en klik nu op de rechte van Wallace-Simson zelf en daarna op *S*. De baan verschijnt.

b. Herhaal nu nog eens het bewegen van de lijn met
EXTRA1>ANIMATE.
Wat is de betekenis van de geconstrueerde ‘*baan*’?

c. Je kunt de baan ook op een andere manier laten tekenen. Je moet daartoe een instelling van het programma veranderen. Dat gaat als volgt:
– Klik daarvoor op OPTIONS in de bovenbalk en kies PREFERENCES.
Een invulscherm verschijnt.
– Achter LOCUS OF LINES zie je een kruisje voor ENVELOPE. Dat betekent ‘omhullende’. Klik dat kruisje weg en klik vervolgens op APPLY TO.

d. Gooi nu de oude baan weg en maak een nieuwe.

hypocycloïde van Steiner

De vorm van de baan in de *Envelope*-vorm heet *deltoïde* of 3-*hypocycloïde*.
De omhullende van de rechten van Simson heet naar zijn ontdekker: de hypocycloïde van Steiner. Steiner ontdekte dit in de vorige eeuw, zonder computer.
Bijzonder is ook dat je met een willekeurige driehoek begint, dus zonder enige symmetrie, terwijl de deltoïde wel drietallige symmetrie heeft.
Als je in de vorige paragraaf de cirkel van Feuerbach hebt leren kennen, dan mag je er nog aan toevoegen: hypocycloïde van Steiner raakt aan de cirkel van Feuerbach.

naar een bewijs van de stelling van Wallce-Simson

Deze stelling kun je met de middelen van dit boekje echter wel bewijzen:

De rechte van Wallace-Simson

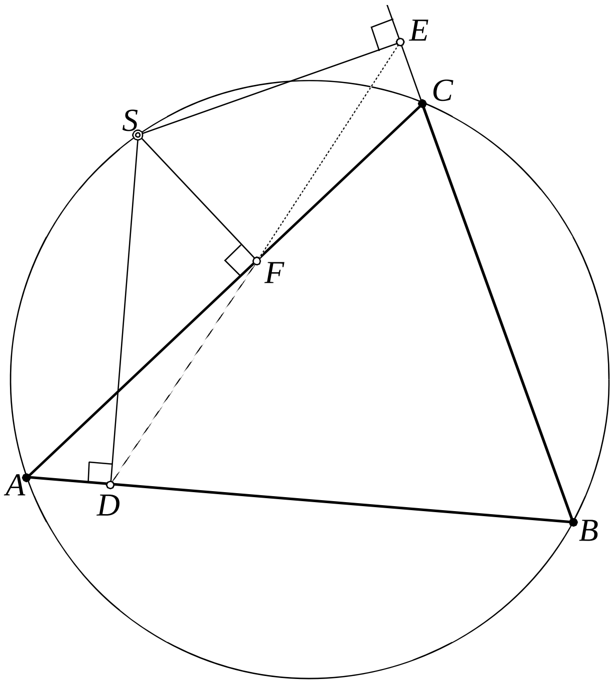
Als een punt S op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt, en D, E en F zijn de voetpunten van de loodlijnen op AB, BC en CA (eventueel verlengd), dan liggen D, E en F op één lijn.

19 Hier is een geschikte figuur. *DF* en *FE* zijn op verschillende manieren aangegeven. Aangetoond moet worden: *D*, *E* en *F* liggen op één lijn.

a. Vertaal die bewering in een bewering over twee hoeken bij *F*.

b. De loodrechtheid van de hoeken bij *D*, *E* en *F* kun je gebruiken om drie koordenvierhoeken te herkennen. Welke?

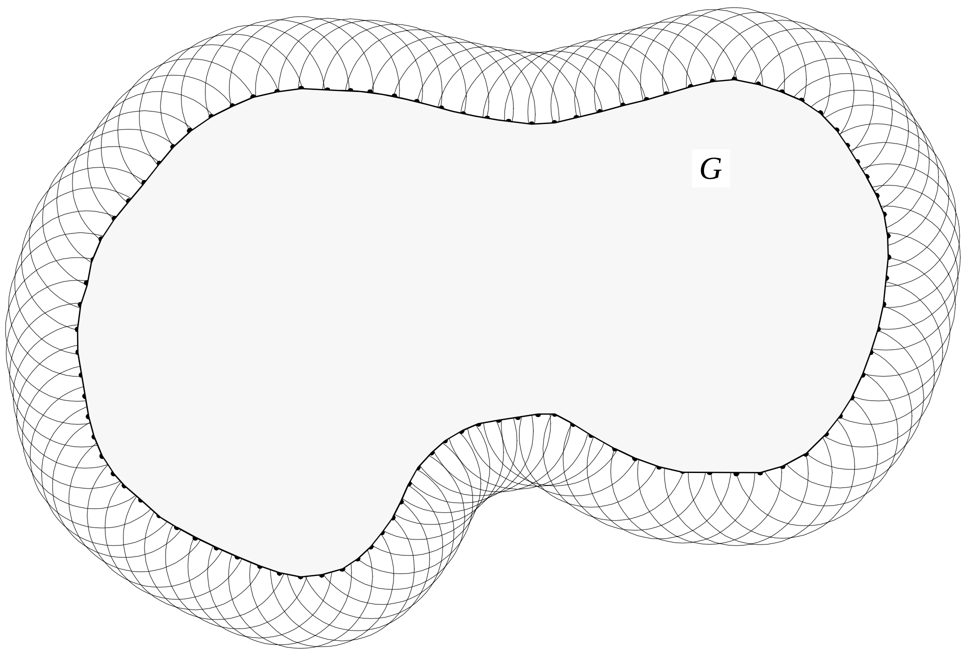
c. In de vorige onderdelen is een belangrijk element nog niet gebruikt: de speciale ligging van *S*. Dat levert weer een koordenvierhoek!



20 Zoek nu zelf verder een bewijsgang waarbij je gebruikmaakt van de diverse hoekverbanden die er nu te vinden zijn.
Werk veel met tekentjes voor gelijke hoeken, en noteer ook met tekentjes welke hoeken samen 180 zijn.
Noteer je bewijs kort, volledig en overzichtelijk.

36: Onderzoek I: Huygens met CABRI

In onderstaande figuur zie je een gebied en om de punten op de rand zijn evengrote cirkels getekend.



De lijn die deze cirkels omhult, is een iso-afstandslijn.
Als alle cirkels tegelijk groter worden, wordt de iso-afstandslijn aan alle kanten tegelijk weggedrukt.
De uitdijende cirkels heten naar hun uitvinder ‘Huygenscirkels’ en werden gebruikt om ideeën over spiegelen en breken van golfverschijnselen te onderzoeken.
Bij de inham valt op: de iso-afstandslijn maakt een sterkere bocht dan de kust zelf.

Onderzoeksopdracht

Dit verschijnsel kun je prachtig onderzoeken met CABRI en deze paragraaf geeft een start daarvoor.
Na een korte inleiding wordt straks een algemene opdracht gegeven waaraan te werken is, maar wat je uiteindelijk laat zien, hangt veel van jouw initiatief af.
Je besluit met een verslag met enkele tekeningen.

inleiding

21 Start CABRI. Je tekent een eenvoudig gebied met zijn Huygens-cirkels met CABRI als volgt:

– Kies de optie TEKEN2>POLYGON en klik een veelhoek van bijvoorbeeld tien punten aan. Sluit af door op het eerste punt te klikken. Je ziet nu de rand van het gebied.
– Zet een punt op de rand en teken er een klein cirkeltje om.
– Laat dat cirkeltje lopen met ANIMATE of teken de *baan* van het cirkeltje als het midden op de rand loopt met de LOCUS-optie.

probeer nu diverse dingen uit:

- Grootte veranderen van de uitgangscirkel (je kunt eraan trekken, de andere Huygens-cirkels bewegen mee).
- Werk met veelhoeken met meer hoekpunten, maak gecompliceerde inhammen.
- Probeer van alles!

mogelijke bijzondere verschijnselen

Allerlei bijzondere verschijnselen kunnen optreden als je de iso-afstandslijn verder van de kust af laat bewegen:

- bij bepaalde uitgangsgebieden kan de iso-afstandslijn in stukken uiteenvallen
- sommige van die stukken kunnen verdwijnen als de afstand wordt vergroot; gebeurt dat met losse stukken altijd?
- de iso-afstandslijn kan bij kleine afstanden twee knikken hebben, die bij groeiende afstand in één knik overgaan. Die knik kan ook bij groei weer met een andere knik samenvloeien!

  Je zou zelfs een kaart kunnen maken van de plekken waar de iso-afstandslijnen knikken hebben.

opdracht:

Probeer wat van die verschijnselen op te roepen.
Maak er schetsjes van (of afdrukken, zie het kader onderaan).
Maak een verslag van je onderzoek en je bevindingen.
Zie je kans bepaalde verschijnselen ook te bewijzen, doe dat dan ook.

Printen vanuit CABRI

Als een printer goed aangesloten is zou de optie FILE>PRINT moeten werken. Met FILE>PAGE SETUP kun je printerinstellingen veranderen.

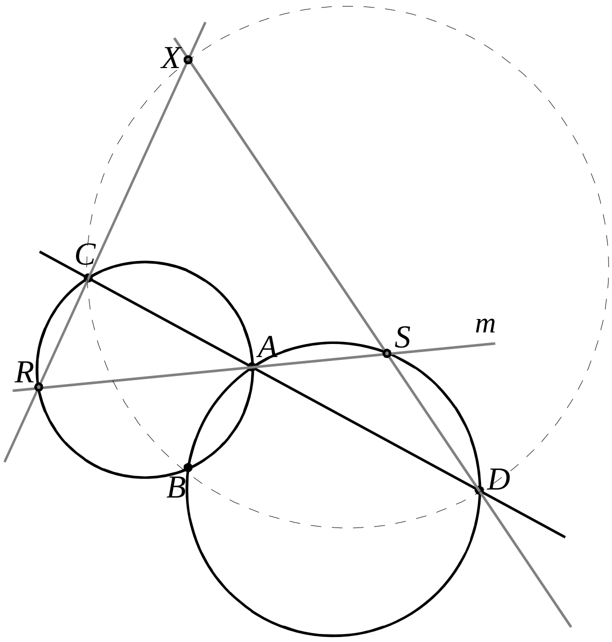
Andere mogelijkheid: de PrSc-toets van de PC gebruiken.
Onder Windows 95 levert dat een plaatje dat je met PASTE in diverse programma's kunt opvragen en daarna afwerken. PAINTSHOP PRO werkt bijvoorbeeld goed.

37: Onderzoek II: oude bekenden komen samen

De figuur hiernaast is je misschien bekend.
Als lijn *m* draait, maar door *A* blijft gaan, dan beschrijft het snijpunt van *RC* en *DS* een cirkel.

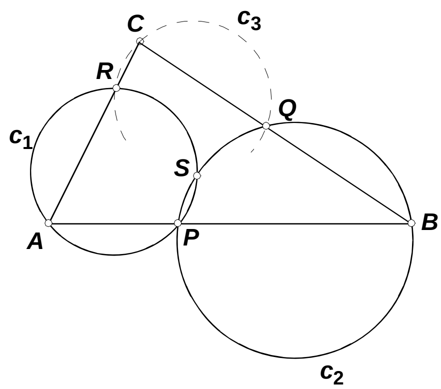
Het probleem kwam voor in het CABRI-practicum in hoofdstuk 7 op bladzijde 135.

Er komt iets bijzonders aan het licht als we de situatie met een andere bekende situatie vergelijken.



Tel eens even na:
– In de figuur is één punt te vinden waar drie cirkels door gaan.
– Er zijn drie punten waar twee cirkels door gaan.
– Er zijn drie punten waar één cirkel door gaat.

Eerder is een figuur aan bod geweest waarin dat precies zo was: bij de stelling van Miquel, zie bladzijde 31 of de figuur die hiernaast.
Maar er is ook wel een verschil: bij de eerste figuur zie je vier lijnen, bij de tweede maar drie.



Onderzoeksopdracht

Onderzoek de samenhang van de gevallen nauwkeurig.
Je moet uiteindelijk kunnen uitleggen welk probleem een bijzonder geval van het andere probleem is; daarbij kan ook wel wat nieuws ter sprake komen.
Verwerk je onderzoek in een verslag met figuren; maak gebruik van CABRI

Een paar tips hierbij, ook over het gebruik van CABRI.
– Maak eerst een punten-vertaal-tabel, gebruikmakend van het bovenstaande. Stel vast wat de overeenkomsten en verschillen zijn.
– Bij de stelling van Miquel lag *S* binnen de driehoek *ABC*. Dat was nodig in het bewijs. Geldt de stelling ook als *S* niet binnen *ABC* ligt?

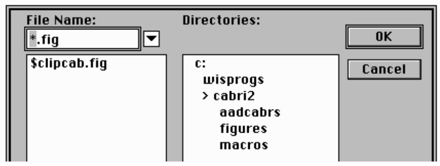
– Schets enkele nieuwe situaties, varianten van de Miquel-stelling, vooral die waarbij *P*, *Q* en *R* (een, twee of drie van de drie) op de verlengden van de zijden van de driehoek liggen. Maakt het wat uit als ze ook nog op één lijn liggen?

– Probeer ook het volgende in je verhaal te betrekken: in de eerste figuur van deze paragraaf kunnen we ook de lijn *RS* vasthouden en de lijn *BC* om *A* laten draaien. Ook dan beschrijft *X* een cirkel, maar wel een andere.
Nu staat een figuur voor je van vier lijnen en vier cirkels met een eenvoudige samenhang. Dat kan als een mooie stelling geformuleerd worden!

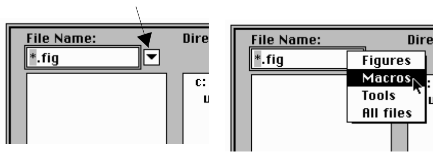
snelle omgeschreven cirkels met Cabri

Bij onderzoek met Cabri van deze problemen, zul je vaak een cirkel willen tekenen die door drie gegeven punten gaat. Het is vervelend om dan steeds eerst middelloodlijnen te moeten tekenen. Je wilt zo'n omgeschreven cirkel nu wel direct bij de drie punten gratis krijgen.
Dat kan: je zorgt gewoon een keer dat Cabri die extra optie aan boord heeft. Zó:

a. Kies File>Open. Je komt nu in een zogenaamde *browser*: een gereedschap om bestanden te zoeken en op te halen. Je ziet:
Klik op Macros.

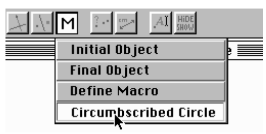


b. Je moet nu aangeven dat je het speciale type .mac wilt. Doe dat door slepen naar macros vanaf het pijltje in nevenstaande figuur.



c. Dubbel-Klik nu op circscr.mac

d. Je komt nu terug op het tekenscherm, waar je nu de nieuwe optie:
Construeer3>Circumbscribed Circle
aantreft.
De typefout van de fabrikant neem je maar voor lief.
Je tekent er een cirkel mee die door drie aangewezen punten (nieuw of oud) gaat.



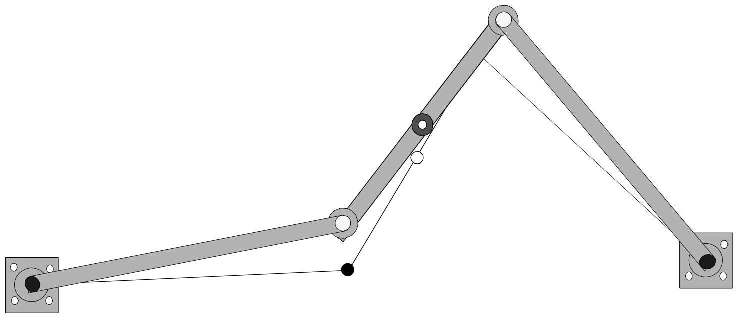
probeer (met Cabri) ook dit

Bij *vier* willekeurige lijnen hoorden *vier* cirkels, die door één punt gaan.
Bij *vijf* lijnen, zeg *a*, *b*, *c*, *d* en *e*, kun je dat *vijf* keer doen, door telkens een lijn uit te sluiten. Je vindt *vijf* van die punten.

Deze vijf punten blijken weer op één cirkel te liggen!

38: Onderzoek III: rechtlijnige beweging?

Eerder heb je het mechanisme van Robert Manchester gezien.
Het speelde een rol in het maken van een rechtlijnige beweging met behulp van onderling bewegende stangen.
De oudste poging hiertoe is van James Watt zelf, die aan het eind van de 18e eeuw de stoommachine verbeterde.
In deze afbeelding zie je zijn mechanisme:



Er zijn weer twee vaste punten.
Er zijn twee evenlange stangen die aan de vaste punten zitten en er is een derde stang die aan de einden van beide andere draaiend vastzit. Het punt waar het om gaat is het midden van die derde stang.
Een andere mogelijke stand van het mechaniek is weer door de dunne lijn gesuggereerd.
Watt gaf een verband tussen de twee verschillende stanglengtes en de afstand van de vaste punten; als dat verband gold, was de beweging van het bewuste middelpunt van de middenstang in ieder geval voor een groot stuk praktisch rechtlijnig.

Onderzoeksopdracht

Simuleer het mechanisme met CABRI en onderzoek het.

commentaar en tips bij de CABRI-constructie.

a. Kies de vaste punten eerst.
b. De uiteinden van de twee gelijke stangen lopen uiteraard over cirkels.
   Kies een lopend punt op een van de cirkels en neem daarom heen een cirkel met een of andere straal. Je ziet mogelijkheden voor het bewegende punt op de tweede cirkel, dat dus van het eerste bewegende punt afhankelijk is.
c. Je kunt ook eerst lijnstukken tekenen aan de rand van het scherm die de juiste lengte hebben. Dan kun je de cirkels maken met CONSTRUEER1>COMPAS. Klik het lijnstuk aan dat de lengte van de straal heeft en klik een middelpunt voor de cirkel aan. Dat werkt dus echt net als een gewone passer.
d. Omdat je twee mogelijke punten op de tweede cirkel krijgt, is het geen slecht idee ze maar allebei te gebruiken bij de locus van het middelpunt van de middenstaaf!

tips bij het onderzoek

a. Je kunt behoorlijk verschillende vormen van de locus krijgen. Onderzoek hoe de verschillende gedaanten samenhangen met de lengtes van de staven.

b. Van belang is te kijken naar de stand van het mechaniek waarbij het midden van de middenstaaf tussen de vaste punten in is. In die omgeving is rechtlijnigheid benaderbaar.

   Noem de afstand der vaste punten *d*, de lengte van de draaiende stangen *r*, en van de verbindingsstaaf *k*.

   Watt's beweert dat voor het maken van een stuk (bijna?) rechtlijnige gang het volgende nodig is:

$$r^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

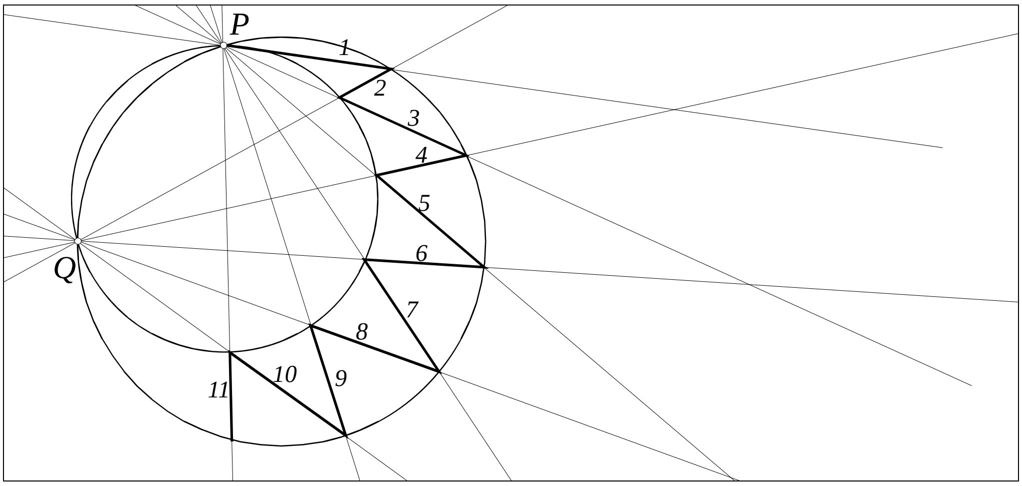
   Achterhaal wat dat voor de bewegingsrichting in het midden betekent.
   Klopt het dat de beweging nu rechtlijniger wordt dan in andere situaties?

c. Door eerst een rechthoekige driehoek te tekenen, kun je wel afdwingen dat jouw mechanisme precies aan die vergelijking voldoet. Dan neem je de lengtes met CONSTRUEER1>COMPASS over van die driehoek.

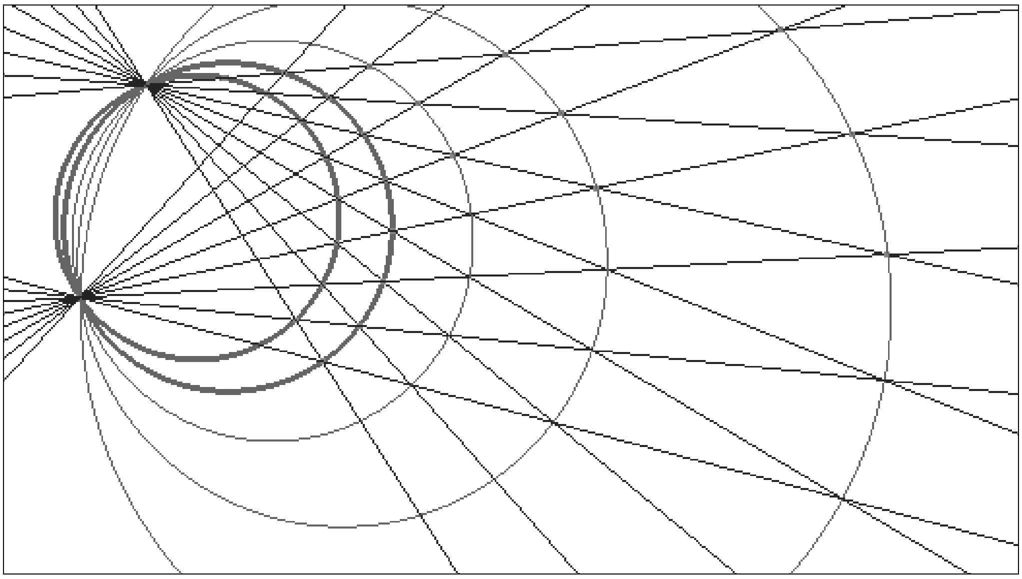
   Probeer dat geval van Watts' mechaniek apart te construeren.

39: Onderzoek IV: een tapijt van cirkels en lijnen

Hier zijn twee cirkels gegeven, met twee snijpunten, *P* en *Q*. Volg de vette zigzaglijn vanuit *P*, je merkt dan in welke volgorde en hoe de lijnen getekend zijn.



In de figuur hieronder (met CABRI gemaakt) lijkt het erop dat de snijpunten die spontaan ontstaan, ook weer op allerlei cirkels door *P* en *Q* liggen.



(Op bladzijde 163 vind je een handige manier om met CABRI cirkels door drie gegeven punten te tekenen. Dat is hier vast heel handig.

Onderzoeksopdracht

Onderzoek hoe dit lijnenspel in elkaar zit.
Onderzoek ook het gebied binnen de twee uitgangscirkels.
Probeer de beweringen over het snijden van de cirkels en de lijnen precies te noteren.
Bewijs eventueel je beweringen.

Aanwijzingen
bij hoofdstuk 6 en 8

en

Voorbeelduitwerkingen
bij hoofdstuk 5, 6, 8 en 9

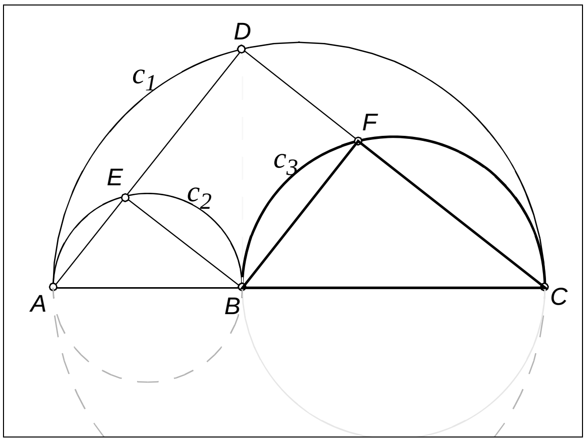
Aanwijzingen bij hoofdstuk 6
Bewijzen vinden

1 Begin steeds met een tekening. Probeer in de tekening iets te herkennen van een bekende stelling. Bij deze opgave ligt dat niet zo heel ver weg.

2

a. *Zoeken naar het bekende:*
Er zijn drie halve cirkels te zien, met in elke halve cirkel een driehoek, waarvan een zijde de middellijn van de cirkel is. In de figuur is dat voor driehoek *BFC* extra gemarkeerd.
Daar hoort een bekende stelling bij.

b. Drie keer die stelling toepassen.



3

a. Begin met nog andere lijnen die punten van de vierhoek met elkaar verbinden.

b. Er is sprake van cirkels en middellijnen. In welke stelling komen die voor?

Kies *AB* en cirkel c_1 als voorbeeld en laat *S* het snijpunt zijn van c_1 en c_2. Maak de Thalesfiguur af.

De Thalesfiguur bij *BC* is er nu ook.

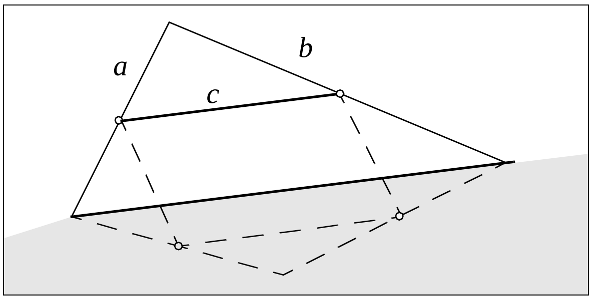
c. In dat punt stuiten vier rechte hoeken op elkaar.

4

a. Middens van twee lijnstukken die door één punt gaan.
Concentreer je eens op een zo'n lijnstuk (*c*) van de nieuwe vierhoek en de behorende zijden *a* en *b*. Denk het grijze deel even weg.

b. Parallellogram?

c.



5 In de rechtercirkel kun je makkelijk de constante hoekfiguur op de cirkel herkennen. Dat geeft je gelijke hoeken. Zet nu nog meer gelijke hoektekens in de figuur. Van het een komt het ander!

6 ***Aanwijzing 1:***
Evenwijdigheid bewijzen gaat waarschijnlijk via *F*- of *Z*-hoeken. Dus moet je de hoeken bij *P* en/of *Q* in verband brengen met hoeken bij *S* en/of *R*.
De schakel daartussen zal wel een *hoek* (of meer) zijn bij *A* en/of *B*.

Aanwijzing 2:
Teken een extra lijn die zorgt voor hoeken bij *A* en/of *B*: lijn *AB*. Je hebt nu bij *A* een hoek links en een hoek rechts.

Aanwijzing 3:

Er zijn nu twee koordenvierhoeken te zien. In koordenvierhoeken weet je iets van de som van overstaande hoeken.

Aanwijzing 4:
Gebruik de twee hoeken bij *A* als schakel.

7 Vergeet *P*, *PA* en *PB* van die figuur. Feitelijk heb je nu een variant van de vorige opgave voor je.

8 ***Aanwijzing 1:*** Zet een tekentje ∗ in –*DEB*. Die hoek staat op boog *DB*. Staan er meer hoeken op die boog?

Aanwijzing 2: Zet een tekentje # bij de andere hoek bij *E*. Waar kun je dat tekentje nog een keer kwijt?

Aanwijzing 3: De twee nieuwe hoeken ∗ en # zouden gelijk moeten zijn. Vat elke hoek op als een hoek van een al zichtbare driehoek.

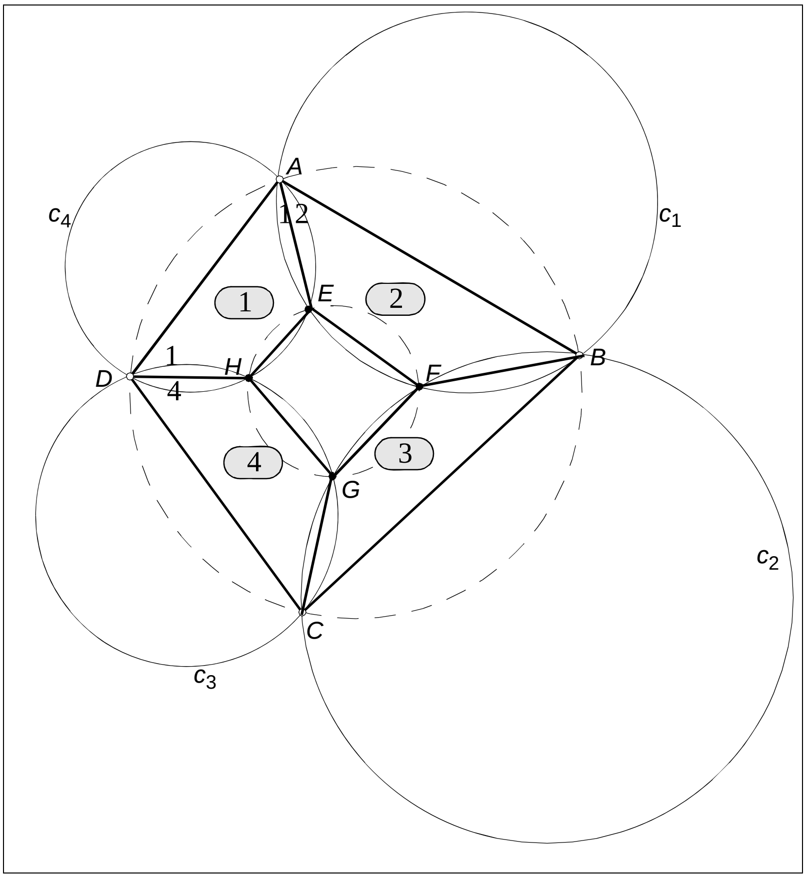
9 De drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

10 ***Aanwijzing 1***: Ga uit van koordenvierhoek *ABCD* en zoek schakels naar de hoeken van vierhoek *EFGH*.

Aanwijzing 2: Koordenvierhoek *ADEH* helpt bij het oversteken van hoeken van *ABCD* naar hoeken die bij de middenvierhoek *EFHG* zitten.

Aanwijzing 3: Je wilt bewijzen dat *E*, *F*, *G* en *H* op een cirkel liggen, ofwel .. een koordenvierhoek zijn. Dan zouden de hoeken bij *E* en *G* samen... Druk dus die juiste hoeken bij *E* en *G* uit in andere hoeken, waar je aan de buitenkant iets mee kunt.

Aanwijzing 4: zet nummers bij de deelhoeken; gebruik nummers die met de kleine koordenvierhoeken corresponderen.



11 ***Aanwijzing 1***: Zet tekentjes # en * in de *onderdelen* van hoek –*IBF*. Kijk of je nog elders die tekentjes kwijt kunt. Dat zijn al kleine schakels.

Aanwijzing 2: Zorg dat ook gebruikt is dat *BI* en *CI* deellijnen zijn. Levert dat een schakel?

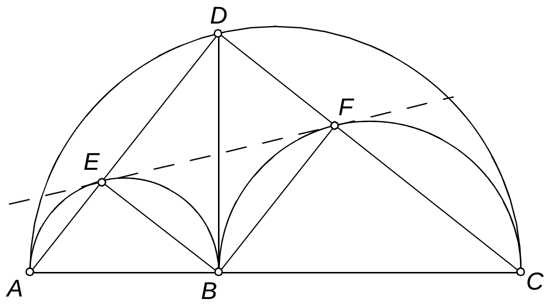
Aanwijzing 3: Je moet af op –*FIB*. Probeer dus of –*FIB* in verband met andere hoeken gebracht kan worden. Dit is dus van de andere kant af werken.

12

13 ***Aanwijzing een***: Associeren bij middens van zijden: middenparallellen

Aanwijzing twee: Gelijke hoeken en parallellen. *F*-hoeken? *Z*-hoeken?

14 ***Aanwijzing 1***: *BD* is al een raaklijn aan de cirkel.



Aanwijzing 2: Diagonalen in de rechthoek ....

Aanwijzing 3: *EB* is een koorde van de cirkel. Hoek raaklijn en koorde ....

15 Als *S* over *AC* schuift .... verandert een gedeelte van de som niet.

16

a. ***Aanwijzing 1***: Narekenen van één eenvoudige geval is voldoende om de constante waarde te vinden.

Aanwijzing 2: Kies een bijzonder punt voor *S*.

Aanwijzing 3: Bijvoorbeeld *M* zelf!

b. ***Aanwijzing 1***: Natuurlijk ga je Pythagoras inzetten. Daarmee herleid je de som van vier kwadraten tot een som van twee kwadraten .

Aanwijzing 2: Er zijn halve cirkels te zien, maar de twee betrokken lijnstukken liggen niet in dezelfde helft. Is daar iets aan te doen?

Aanwijzing 3: Halve cirkel, dus Thales?

17 Enkele suggesties hierbij:
– Omtrekshoeken en bogen hangen steeds samen. Maar er is nog geen omtrekshoek te zien! Daar kan iets aan gedaan worden!
– –*BDC* staat op boog *BC* en is ook hoek van een recht hoekige driehoek. Veel belovend! Wat is de andere hoek van driehoek?
– Bij **16b** heb je Thales gebruikt. Dat zal in het algemene geval niet direct meer lukken, nu is immers *DB* geen middellijn meer. Maar laat je niet direct uit het veld slaan, in vraag **17** is immers ook sprake van een halve cirkel**.**
– Som van bogen, som van hoeken?

18

19

20

21 ***Aanwijzing***: Overzicht bekende feiten nummer 3.

22 ***Aanwijzing 1:*** *SA* en *SD* moeten een hoek van ..... vormen.

Aanwijzing 2: Die hoek is opgedeeld in drie stukken.

23

24

25 De twee voorwaarden (zien onder 90 en zien onder 45) horen bij bekende figuren.

26

27 In ditzelfde hoofdstuk; als twee druppels water die nu iets meer over elkaar liggen.

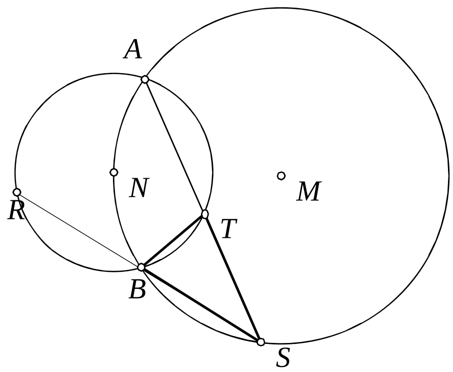
28 ***Aanwijzing 1***: Plagiaat.

Aanwijzing 2: Bij raken in *A* kun je ook denken: *A* bestaat eigenlijk uit de twee snijpunten van *l* met de cirkel, die nu samenvallen.

Aanwijzing 3: In dit hoofdstuk, opgave 6, bladzijde 111.
Gedeeltelijk kun je het bewijs van het origineel misschien wel volgen, maar heb je op zeker moment toch een stelling over raaklijnen nodig.

Aanwijzingen bij hoofdstuk 8: Vermoedens bewijzen

1 **a.** ***Aanwijzing 1:***
Hoek *SBT* en *STB* zouden gelijk moeten zijn. Vervelend is, dat *S*, *T* en *B* niet op een van de cirkels liggen. Maar je hebt zo ook een paar punten op de *grote* cirkel nog helemaal niet in het spel betrokken.



Aanwijzing 2:
Kijk of je gelijke hoeken in de figuur kunt vinden, door de grote cirkel te gebruiken.

Aanwijzing 3:
Zo te zien is boog *AN* gelijk aan *NB*. Als dat echt zo is, kun je – desnoods na trekken van extra lijnen – wel een paar gelijke hoeken vinden.

Aanwijzing 4:
Zoek associaties bij ‘gelijkbenig’. Een heel algemene is: symmetrie. Welke lijn zou de symmetrie-as van driehoek *BST* dan wel moeten zijn? Teken die erbij. Kun je nu een paar *vermoedelijk* gelijke hoeken vinden waarvan de gelijkheid *te bewijzen* is?

b. Zie voorbeelduitwerkingen.
c. Ook *SRA* is gelijkbenig.

2 ***Aanwijzing 1***: Maak een tekening. Gebruik tekentaal voor de gelijke hoeken en/of geef hoekdelen met nummers aan. Let op het *feest der herkenning.*

Aanwijzing 2: –*QPS* zou 90 moeten zijn. In de figuur is het makkelijker –*APB* te bepalen.

Aanwijzing 3: In driehoek *APB* zijn de hoekpunten *A* en *B* ook hoekpunten van het parallellogram. Welke *associaties* heb je bij ‘naburige hoeken in paralellogrammen’?

Aanwijzing 4: Bepaal de som van de hoeken *A* en *B* in driehoek *ABP*, en dan *P* zelf.

3 Maak in ieder geval weer een tekening, als je die nog niet hebt in je aantekeningen bij hoofdstuk 4.

a. ***Aanwijzing 1****: ABCD* is een rechthoek. *Feest der herkenning*: je weet dus nog meer dan bij het paralellogram. Wat weet je nu nog méér van driehoek *APB*?

Aanwijzing 2: *Associaties* bij ‘vierkant’. Hoe herken je een vierkant nog meer als je niet direct weet dat de zijden even lang zijn? Denk aan de diagonalen. Even lang? dat is niet genoeg!

Aanwijzing 3: mogelijk andere weg: Om een bewijs te vinden, kun je aanvankelijk gebruikmaken van de symmetrie assen van rechthoek *ABCD*. Wat betekenen die voor ‘rechthoek’ *PQRS*, volgens de tekening?

Aanwijzing 4a: Laat zien dat driehoek *APB* gelijkbenig is. Zo gebruik je zonder dat hardop te zeggen in feite de symmetrie-as. Hieruit volgt dat *P* op de middelloodlijn van *AB* ligt.

Aanwijzing 4b: Betrek *R* er bij. Hoe loopt *RP*? *RP* heeft twee rollen: hij is diagonaal in *PQRS*, maar in dit geval ook .....

b. ***Aanwijzing***: Wat zijn de deellijnen in een ruit nog meer dan deellijnen alleen?

c. ***Aanwijzing:*** *ABCD* is een trapezium; bijvoorbeeld geldt $AD \,//\, BC$. Je kunt nu toch wel iets van het voorgaande gebruiken.

4 ***Aanwijzing 1:*** Maak een tekening en stel je zelf de vraag: Wat is de belangrijkste eigenschap van koordenvierhoeken?

Aanwijzing 2: Druk net als eerder de hoek bij *P* in de hoeken bij *A* en *B* uit. Als je iets met overstaande hoeken wilt doen, zul je ook zoiets voor *R* moeten doen.

5 ***Aanwijzing***: Het gaat blijkbaar om de cirkel met middellijn *MP*. Er is een stelling over cirkels met middellijn!

6 ***Aanwijzing 1 voor beide gevallen:*** Er is een rechthoek en er wordt een lijnstuk gehalveerd. Als *QP* diagonaal was van ..., dan kon je daar vast wat mee doen.

Aanwijzing 2 voor beide gevallen: Vul *QHP* aan tot een rechthoek.

Aanwijzing 3 voor geval twee: Het nieuwe punt *X* van de rechthoek beschrijft ook een baan!

7 ***Aanwijzing*****:** Je kunt de twee cirkels zien als elkaars spiegelbeeld in *AB*, maar je kunt ook de tweede cirkel als een verschuiving van de eerste zien.

8 ***Aanwijzing 1*****:** Geef weer zoveel mogelijk gelijke hoeken in de tekening aan. Je beperkt aanvankelijk misschien wel tot speciale posities van *C* (tot scherphoekige driehoeken), maar dat is voorlopig niet zo erg. Dat los zich later wel op.
Aanwijzing 2**:** Als $|HD| = |DF|$ geldt, dan ziet het er mooi uit voor de spiegeling! Maar als dat zo is, dan moet $\angle HAD = \angle DAF$ gelden. Misschien eerst de gelijkheid van die hoeken bewijzen? Zijn die hoeken te schakelen via een andere hoek?

Aanwijzing 2a: (verder bij aanwijzing 2.) Heb je al gebruikt dat er een cirkel gegeven is, die om ABC met F erop. Daar zijn gelijke hoeken mee te bewijzen, desnoods teken je er een koorde extra bij.

Aanwijzing 3**:** Als $|CH|$ constant is, dan ziet het er mooi uit voor de verschuivingsaanpak. Het zou dan handig zijn een bijzondere van C te vinden, waarin CH makkelijk te vinden is en er met de andere posities vergeleken kan worden.
Aanwijzing 3a**:** (verder bij aanwijzing 3.) Kan H met B samenvallen? Waar ligt C dan?

Aanwijzing 4: Omdat er wel allerlei gelijkheden zichtbaar zijn, weet je op den duur soms niet wat je wel en niet bewezen hebt. Remedie: Schrijf op een kladje op wat je zeker weet. Dat zijn de gegevens: driehoek, hoogtepunt, ligging van F en D. Schrijf op dat kladje voortaan alleen wat je binnen je redenering zéker weet, dus niet allerlei vermoedens.

Aanwijzing 5**:** Zorg dat je het geval van de gegeven figuur voor elkaar hebt voor je naar de ander liggingen kijkt. Ga na of bij andere liggingen van C een ander bewijs nodig is. Indien dat zo is, gebruik dan de plagiaattechniek, zoals die eerder beoefend is: het aanpassen van een bewijs door bijna-letterlijk vertalen naar de nieuwe situatie.

9 ***Aanwijzing*****:** Ga eerst uit van de situatie in de tekening en bewijs dat X op de cirkel door CBD gaat.

Aanwijzing: Als je af wilt op $-CBD + -CXD$ zul je toch nog punt A in het spel moeten brengen.

Aanwijzing: Splits $-CBD$ en beschouw de delen apart. Zitten ze ergens anders ook?

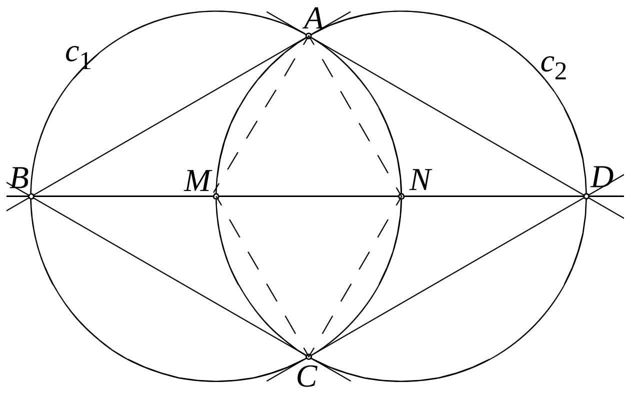
Aanwijzing: 180 is van belang bij koorden vierhoeken, maar ook in diverse andere stellingen. Associeer!

10
11
12

Dit is veruit het lastigste onderdeel van de paragraaf.
In het hoofdstuk zelf zijn al direct aanwijzingen in de tekst opgenomen, ook in de vorm van hulpopgaven.

Voorbeelduitwerkingen bij hoofdstuk 5: Oefenen in bewijzen

1 Omdat het een oefening is, volgt hier een uitgebreid gedetailleerde versie van het bewijs.



a. *Gegevens*:

1>> M en N zijn de middelpunten van de cirkels c_1 en c_2.
2>> M ligt op c_2 en N op c_1.
3>> B en D zijn de snijpunten vaan MN met c_1 en c_2.
4>> A en C zijn de snijpunten van c_1 en c_2.

Te bewijzen: ABCD is een ruit.

Bewijs:

1:: De stralen van de cirkels zijn gelijk. (*volgt uit gegeven 2>>*)
2:: Dus $|MA| = |MN| = |NA|$, dus driehoek MNA is gelijkzijdig en dus $\angle ANM = \angle AMN = 60$.(*eigenschap gelijkzijdige driehoek.*) (*ZIE VOETNOOT*)
3:: Evenzo: $\angle CMN = \angle CNM = 60$.
4:: Dus ook: $\angle AND = \angle DNC = \angle CMB = \angle BMA = 120$. (*gestrekte hoeken*)
5:: Ook geldt $|MB| = |MC| = |MA| = |ND| = |NA| = |NC|$ (*volgt uit 1::*)
6:: Dus de driehoeken *ADN*, *DNC*, *CMB* en *BMA* zijn gelijk, (*gelijke driehoeken, ZHZ, uit 4:: en 5::*)
7:: Dus $|AD| = |DC| = |CB| = |BA|$ (*idem*)
8:: Maar ook $AD \parallel BC$, want $\angle ADN = \angle CBM$. (*hoekgelijkheid uit 6::, gelijke Z-hoeken*)
9:: Net zo: $AB \parallel CD$, want $\angle ABM = \angle CDN$.
10:: Dus *ABCD* is een parallellogram. (*Overzicht nummer 8 a*; *Twee paar evenwijdige zijden*)
11:: *ABCD* is een ruit, omdat het een parallellogram met gelijke zijden is. (*Overzicht nummer 9a*)

Dat moest bewezen worden.

b. *Te bewijzen*: De lijn AB raakt in A aan de cirkel c_2.

Bewijs:

$\angle BAN = 90$. (*Stelling van Thales op middellijn BN*)
Dus BA raakt aan cirkel c_2 (*raaklijn aan de cirkel, nummer 22 van het overzicht*)

VOETNOOT: Dat een gelijkzijdige driehoek hoeken van 60 heeft, moet eigenlijk ook bewezen worden. Korte manier: de driehoek is op drie manieren gelijkbenig. Daarom zijn de drie hoeken allemaal gelijk. Ze moeten dan 60 zijn, omdat ze samen 180 zijn.

2

a. Dan zouden de twee kortste zijden samen even lang als de derde zijde zijn. Dat is strijdig met de driehoeksongelijkheid.

b. De hoeken zijn dan 30 , 60 en 90 graden.

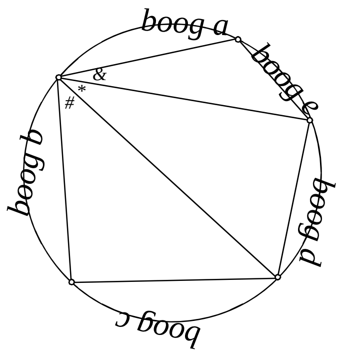
3 Dat kan als *a*, *b* en *c* ongelijk aan nul zijn altijd, want dan krijg je gewoon drie punten op de cirkel. De bogen zijn dan:

$$\frac{a}{a+b+c} \cdot 360 \quad , \quad \frac{b}{a+b+c} \cdot 360 \quad \text{en} \quad \frac{c}{a+b+c} \cdot 360$$

en de hoeken dus:

$$\frac{a}{a+b+c} \cdot 180 \quad , \quad \frac{b}{a+b+c} \cdot 180 \quad \text{en} \quad \frac{c}{a+b+c} \cdot 180 \quad .$$

4 De hoeken van de vijfhoek zijn de helft van de som van de tegenoverliggende bogen. Door met verschillende volgordes te werken, kun je variëren.



a. De kleinste hoek is: $\frac{1+2+3}{1+2+3+4+5} \cdot \frac{360}{2} = 72$.

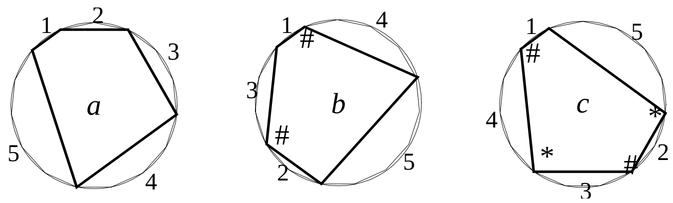
De andere hoeken hebben in de teller 2 + 3 + 4, 3 + 4 + 5, 4 + 5 + 1, 5 + 1 + 2; ze zijn 108 , 144 , 120 en 90 .

b. Zet de bogen in volgorde: 1 – 4 – 5 – 2 – 3. De tellers 1 + 4 + 5 en 5 +2+3 leveren gelijke hoeken. De hoeken zijn: 120 , 132 , 120 , 72 , 96 .

c. Zet de bogen in volgorde: 4 - 1 - 5 - 2 - 3.

Nu komen voor als gelijke tellers: 4 + 1 + 5 en 5 + 2 + 3, maar ook nog 3 + 4 + 1 en
1 + + 2.

De hoeken zijn: 120 , 96 , 120 , 108 , 96 .



5

a. De deur is 2 meter, dus 4 en 5 meter ongeveer.

b. Zie figuur. Wie durft?

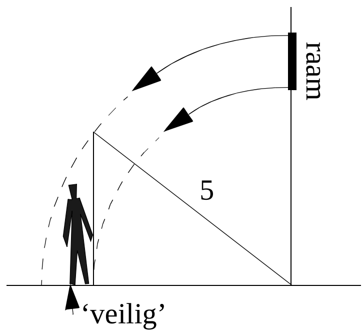
c. De maximale lengte is aangegeven; die is volgens Pythagoras 3 meter.

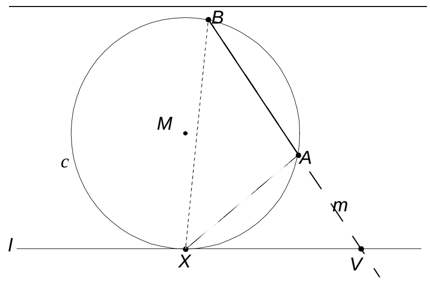
d. $\sqrt{5^2 - 4{,}5^2} = 2{,}18$meter

e. Gebruik de figuur van bladzijde 58 van deel A. Zie hieronder.

Daar is aan getoond dat hoe *AXB* maximaal is als $|VX|^2 = |VA| \bullet |VB|$ en dus is *X* onafhankelijk van de hoek van huis en vloer.

Buster blijft staan op $\sqrt{4 \quad 5} = 4{,}47$ meter.

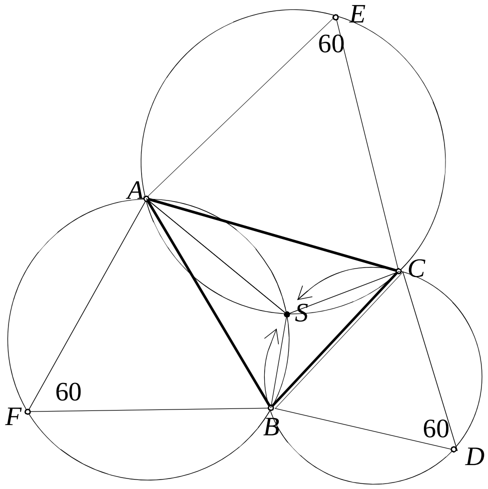




6

a. *S* ligt op boog *AB*, dus *ESBF* is een koordenvierhoek; omdat hoek –*AFB* = 60 , wordt *S* gekarakteriseerd door –*ASB* = 120 .

b. De stelling van de koordenvierhoek, twee keer van koordenvierhoek naar hoekensom, de derde keer andersom.



c.

Zij *S* het snijpunt van de cirkels om *ABF* en *ACF*

stap 1

S op boog *AB*
Dus
–*ASB* = 120

stap 1bis

S op boog *AC*
Dus
–*ASC* = 120

verbindingsstap

Dus

–*CSB* = 120

conclusiestap

–*CSB* + –*CDB* = 180
Dus
S op de cirkel door *B*, *C* en *D*.

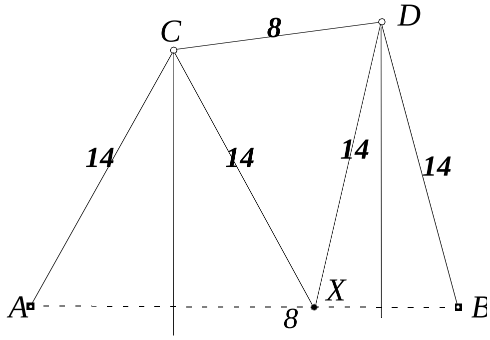
7 Als je beweegt, kun je haast niet de beweging van het bewuste punt van een rechte lijn onderscheiden.

8

a.

b. De afstand tussen de hoogtelijnen is de helft van *AX* plus de helft van *XB*, dus 8.

c. *X* ligt niet in het midden, daarom zijn de driehoeken *AXC* en *XBD* niet even hoog. Dus is *CD* niet evenwijdig aan *AB*. Dan moet *CD* groter zijn dan de afstand tussen de twee hoogtelijnen.
Dat is in tegenspraak met |*CD*| = 8.
Dus uit de aanname '*X ligt op AB*' volgt een tegenspraak. Dus ligt *X niet* op *AB*.

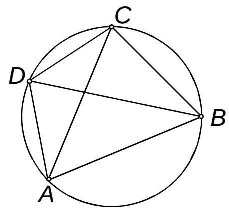


Voorbeelduitwerkingen bij hoofdstuk 6: Bewijzen vinden

1

a. HOEKEN IN DE KOORDENVIERHOEK

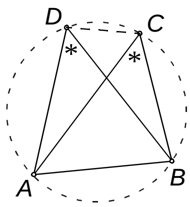
Als vierhoek ABCD een koordenvierhoek is, dan geldt $\angle ACB = \angle ADB$.



A, *B*, *C* en *D* liggen volgens het gegeven op een cirkel. Dus kan onmiddelijk de *stelling van de constante hoek* worden toegepast. Daarom geldt $\angle ACB = \angle ADB$.

b. DRIEHOEKEN MET GEMEENSCHAPPELIJKE ZIJDE EN EEN GELIJKE HOEK

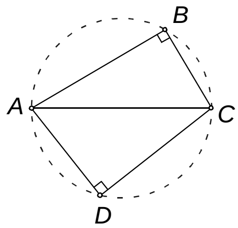
Als twee driehoeken de zijde AB gemeenschappelijk hebben, C en D aan dezelfde kant van deze zijde liggen en $\angle ACB = \angle ADB$*, dan is ABCD een koordenvierhoek.*



Omdat $\angle ACB = \angle ADB$, ligt *D* op de cirkel door *A*, *B* en *C*. Dit volgens de omkering van de stelling van de constante hoek. Dus vormen de vier punten een koordenvierhoek.
(Eigenlijk: ABCD óf ABDC is een koordenvierhoek!)

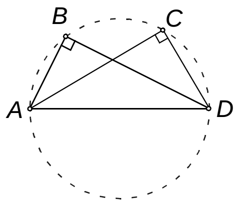
c. VIERHOEKEN MET TWEE OVERSTAANDE RECHTE HOEKEN

Als in een vierhoek *ABCD* geldt: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, dan is *ABCD* een koordenvierhoek.
Zowel *B* als *D* liggen op een halve cirkel met *AC* als middellijn volgens de stelling van *Thales*. Dus liggen *A*, *B*, *C* en *D* op één cirkel, omdat die twee halve cirkels samen één cirkel vormen.



d. RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN MET ZELFDE SCHUINE ZIJDE

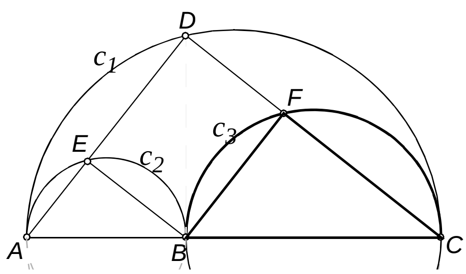
Als in een vierhoek ABCD geldt: de driehoeken ABD en ACD zijn rechthoekig en AD is de schuine zijde van beide driehoeken, dan is ABCD een koordenvierhoek.
Dit is alleen maar een speciaal geval van opgave **b**, met wat andere letters. Je zou het hier al met de stelling van Thales kunnen bewijzen, want die is het 90°-geval van de omkering van de stelling van de constante hoek.



2

a. Thales.

b. *Gegevens*:
- *AC* is middellijn van een cirkel c_1, *D* is een punt op c_1
- *B* ligt op *AC*; *AB* is middellijn van cirkel c_2; *BC* is middellijn van cirkel c_3
- *AD* snijdt c_2 nog in *E*, *CD* snijdt c_3 nog in *F*
- *DB* raakt in *B* aan c_2 en aan c_3.

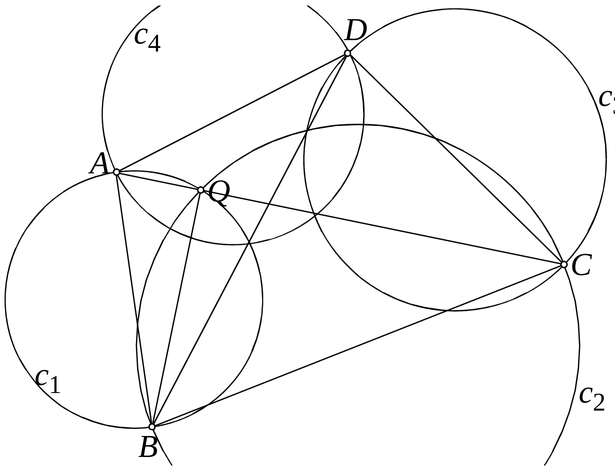


Te bewijzen:
EBFD is een rechthoek.

Bewijs:
AC is middellijn van een cirkel waar *D* op ligt. Dus $\angle ADC$ is recht. Dus $ED \perp DF$.

AB is middellijn van een cirkel waar *E* op ligt. Dus is $\angle AEB$ recht. Dus $EB \perp ED$.
BC is middellijn van een cirkel waar *F* op ligt. Dus is $\angle BFC$ recht. Dus $BF \perp DF$.
Van vierhoek *DEBF* zijn drie hoeken recht.
Dan is de vierde ook recht en is de vierhoek een rechthoek.

3

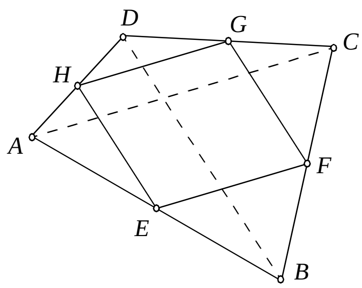


a. Vier van de zes snijpunten liggen op de diagonalen van de vierhoek. Het zijn de snijpunten van cirkels die bij opvolgende zijden horen. Het snijpunt ligt op de diagonaal vanuit het punt waar de zijden aansluiten. Zo hoort bij *B* snijpunt *Q* in de tekening.

b. Trek *QB*. Nu is $\angle BQA$ recht, want *AB* is middellijn van cirkel c_1. Ook is $\angle BQC$ recht, want *BC* is middellijn van cirkel c_2.
$\angle AQC$ is dus een gestrekte hoek en dat betekent: *Q ligt op de lijn AC*.

c. Noem zo'n punt *P*.
Er geldt dan: $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = \angle DPA = 90$.
Dat betekent dat de diagonalen van de vierhoek elkaar loodrecht in *P* snijden.

4

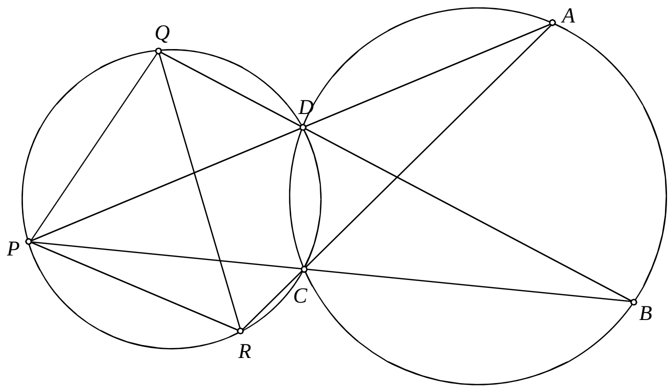


a. Middenparallellen.

b. Parallellogram.

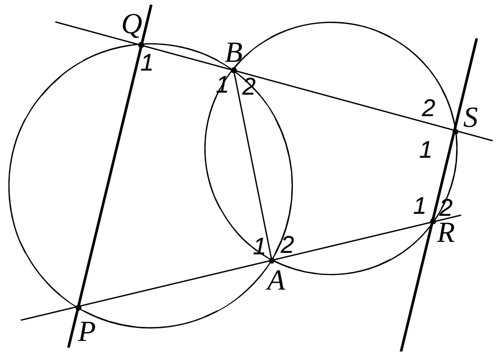
c. *Gegeven:* *E*, *F*, *G* en *H* zijn middens van *AB*, *BC*, *CD* en *DA*.
Te bewijzen: *EFGH* is een parallellogram.
Bewijs: $HG \parallel AC$ *(middenparallelprincipe)*
$EF \parallel AC$ *(middenparallelprincipe*
Dus: $EF \parallel HG$
Net zo: $EH \parallel FG$.
Dus *EFGH* is een parallegram. (*Twee paar evenwijdeige overstaande zijden*)

5 In de cirkel door *A*, *B*, *C* en *D* herken je de constante hoek-situatie.
Dus $\angle ADB = \angle ACB$.
Direct volgt nu dat ook $\angle QDP = \angle PCR$.
Dus zijn ook de bogen *PQ* en *PR* gelijk aan elkaar en dus geldt ook $|PQ| = |PR|$.



6 *Gegeven:* de situatie van de tekening.
Hier zijn twee cirkels gegeven en twee lijnen door de snijpunten van de cirkels.
Te bewijzen is: *PQ* // *RS.*
Bewijs: Trek *AB*.

PABQ is een koordenvierhoek.
Dus $-Q_1 + -A_1 = 180$.
Ook geldt $-A_1 + -A_2 = 180$. Dus $-Q_1 = -A_2$.
ARSB is een koordenvierhoek.
Dus $-S_1 + -A_2 = 180$.
Dus ook $-S_1 + -Q_1 = 180$.
Ook geldt $-S_1 + -S_2 = 180$. Dus $-Q_1 = -S_2$.
Daaruit volgt dat *QP* en *SR* evenwijdig zijn.

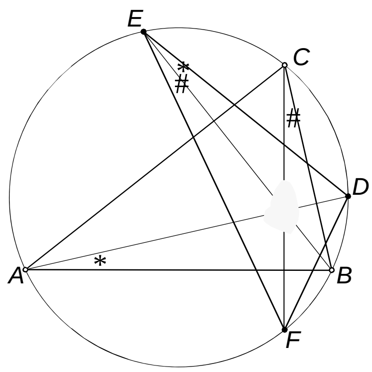


Een andere aanpak is goed mogelijk. Die wordt heel kort geformuleerd; nu is *B* schakelpunt op een iets andere manier.
Omdat in elke koordenvierhoek geldt dat overstaande hoeken samen 180 zijn, geldt ook: een hoek van een koordenvierhoek is gelijk aan de buitenhoek van het tegenoverliggende hoek punt.
Zo is $-QPA = -B_2$.en om dezelfde reden geldt. $-B_2$. $= -R_2$.
QP en *SR* zijn dus evenwijdig. (*F*-hoeken bij snijlijn *PR*).

7 Het bewijs verloopt net als bij de vorige opgave. *l* en *m* zijn nu de lijnen *QB* en *RA*. Omdat die snijden wordt in het bewijs de koordenvierhoekstelling door de constante hoekstelling vervangen.
Het bewijs in het kort:

$-ABD = -ACD$	*(constante hoekstelling)*
$= 180 \; - -RCD$	*(gestrekte hoek C)*
$= -RQD$	*(koordenvierhoek)*
Omdat $-ABD = -RQD$	
zijn *QR* en *AB* evenwijdig	*(Z-hoeken)*

8 *Gegeven:* scherphoekige driehoek *ABC* met omgeschreven cirkel.
De hoogtelijnen snijden de omgeschreven cirkel in *D*, *E* en *F*
Te bewijzen: hoogtelijn EB van driehoek ABC is deellijn van hoek DEF.
Bewijs:
$-BEF = -BCF$, want beide hoeken staan op dezelfde boog *BF.*
$-DEB = -DAB$, want beide hoeken staan op dezelfde boog *DB*.
De hoeken $-BCF$ en $-DAB$ zijn hoeken van de rechthoekige driehoeken *BCP* en *BAQ*, waarin *P* en *Q* de voetpunten van de hoogtelijnen op *AB* en *BC* zijn.
Dus geldt: $-BCF + -B = 90 \; = -DAB + -B$. Dus $-BCF = -DAB$.
Dus is ook $-BEF = -DEB$. Dus *EB* is deellijn van *DEF.*
Voor de lijnen *DA* en *FC* gaat het net zo.

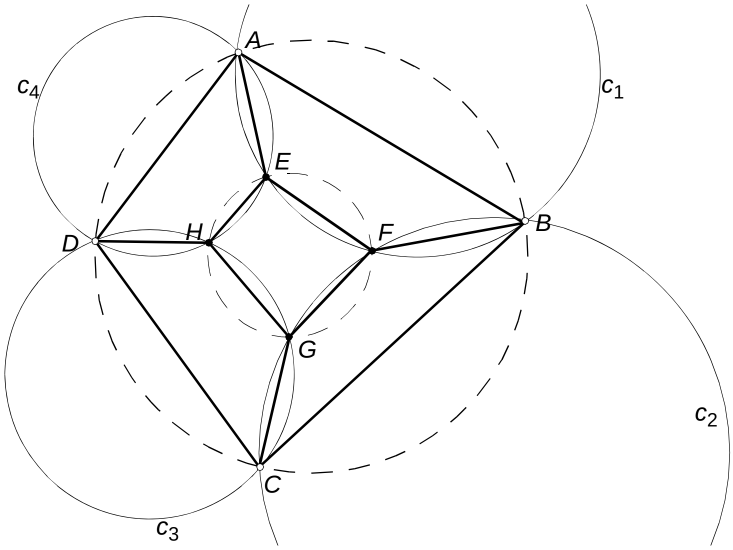


9 De drie hoogtelijnen van *ABC* zijn deellijnen van *EDF* en gaan dus door één punt. De bekende stelling van de hoogtelijnen in de driehoek.
Als de driehoek niet scherphoekig is, loopt het bewijs niet op deze manier. Je krijgt dan te maken met een echte deellijn en twee buitendeellijnen van driehoek *EDF*.

10 *Gegeven:* De cirkels c_1, c_2, c_3, en c_4 snijden elkaar op de aangegeven manier in *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* en *H*.

Te bewijzen : *Als A*, *B*, *C* en *D* op één cirkel liggen, *dan* liggen *E*, *F*, *G* en *H* ook op één cirkel.

Bewijsidee: Bewijs dat –*HEF* + –*FGH* = 180 . onder gebruikmaking van het feit dat er al vijf koordenvierhoeken gegeven zijn.



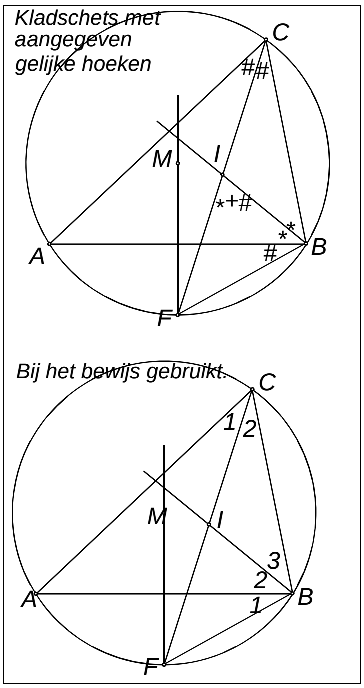
Bewijs: –*HEF* + –*FGH*

= 360 – –*FEA* – –*HEA* + 360 – –*HGC* – –*FGC*	*(hoekensom* 360 *om punten E en G)*
= 360 – (180 – –*FBA)* – (180 – –*HDA)* + 360 – (180 – –*HDC)* – (180 – –*FBC)*	*(koordenvierhoeken AEFB, HEAD, HGCD en CBFG)*
= –*FBA* + –*HDA*+ –*HDC* + –*FBC*	*(algebraïsch boekhouden)*
= –*FBA* + –*FBC* + –*HDA*+ –*HDC*	*(omordenen)*
= –*ABC* + –*ADC*	*(samennemen hoeken)*
= 180	*(ABCD is een koordenvierhoek).*
Dus –*HEF* + –*FGH* = 180	
Dus liggen *E*, *F*, *G* en *H* op één cirkel.	*(Stelling van de koordenvierhoek in de andere richting)*

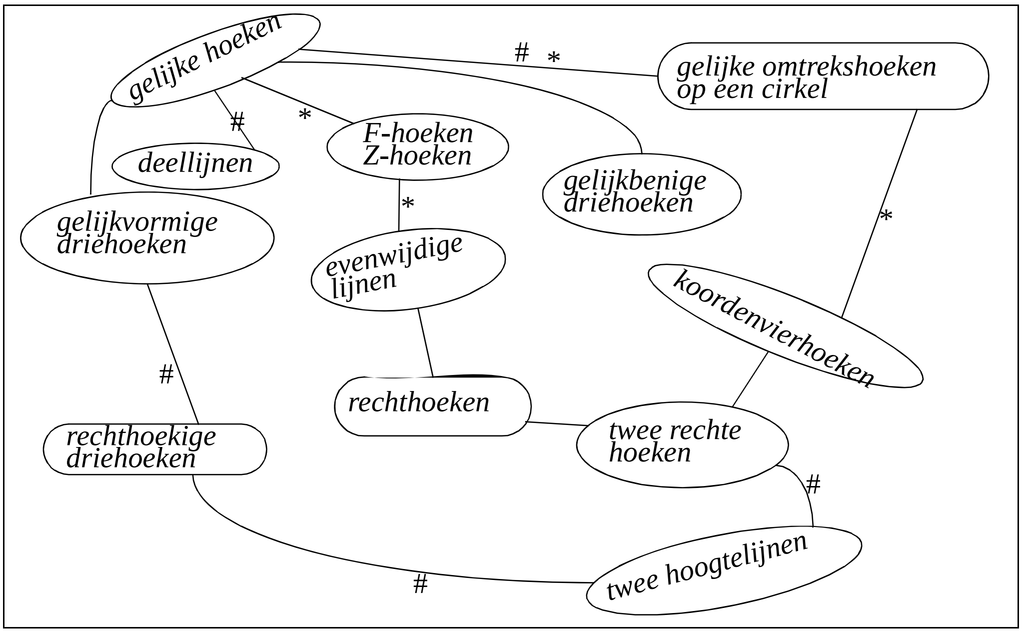
11 *Te bewijzen*: |*FI*| = |*FB*|.
Bewijs:

–*IBF*	= –B_1 + –B_2	
–B_1	= –C_1	(*omtrekshoeken op boog AF*)
–C_1	= –C_2 en –B_2 = –B_3	(*deellijn uit C en B)*
–*BIF*	= –C_2 + –B_3	(*buitenhoek van CIB*)
	= –B_1 + –B_2 = –*IBF.*	

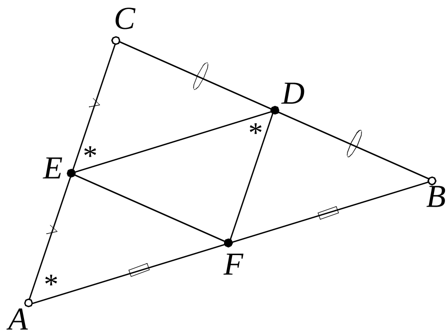
Dus BIF is een gelijkbenige driehoek.
Dus |*FI*| = |*FB*| (*Klaar!)*



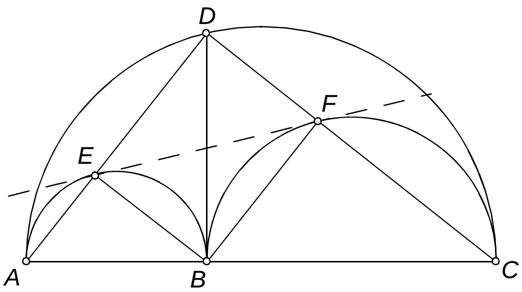
12 Bij opgave **6: *;** bij opgave **8: #;**



13 *ED* // *AB*. *(middenparallel)*
DF // *AC*. *(middenparallel)*
Dus *AFDE* is een parallellogram (*Overzicht nr. 8a.)*
Dus $\angle EDF = \angle EAF$ *(dat is bijvoorbeeld in hoofdstuk 1, opgave 23 op bladzijde 21 aangetoond).*
Als je dat niet snel terugvindt: de drie sterretjes zijn gelijk, *F*-hoeken, Z-hoeken.



14 Noem het snijpunt van de diagonalen van rechthoek *EBFD Q*.
Nu is $|EQ| = |QB|$ omdat beide de helft van gelijke diagonalen zijn. Dus geldt ook $\angle EBQ = \angle QEB$.
Omdat *QB* aan de cirkel met middellijn *AB* raakt, doet *QE* dat dus ook. Bewezen moet dan worden dat de twee raaklijnen door de einden van een koorde gelijke hoeken met die koorden maken.
Dat is zo omdat die hoeken beide gelijk zijn aan de helft van de middelpuntshoek op die koorde. Dat is stelling 6 van bladzijde 206.



15 Als *S* over *AC* schuift, verandert een gedeelte van de som niet. Want in:

$$|AS| + |BS| + |CS| + |DS| = |AC| + |BD|$$

verandert $|AC|$ dan niet, maar $|BD|$ wel.

16

a. Neem $S = M$.

$|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2 = 4r^2$

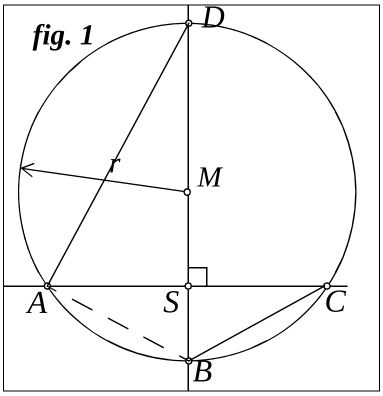


fig. 1

b. $|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 + |DS|^2$

$= |AD|^2 + |BC|^2$ (*Pythagoras in ADS en BCS*)

$= |AD|^2 + |BA|^2$ (*Symmetrie in de lijn DB*

$= |AB|^2$ (*DAB is rechthoekig volgens Thales, Pythagoras)*

$= 4r^2$. (*|AB| = 2r)*

17

a. *Te bewijzen:* boog *BC* en boog *AD* vormen samen de helft van de cirkel.

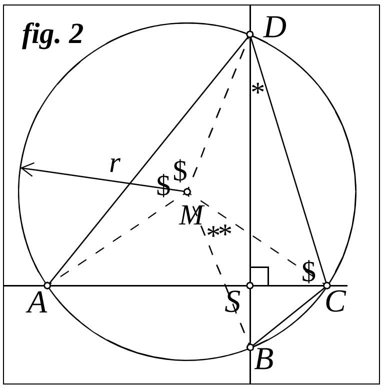


fig. 2

Bewijs:

∠*BMC* = 2∠*BDC* (*Middelpuntshoek dubbele van omtrekshoek, stelling 5, bladzijde 206)*

∠*DMA* = 2∠*DCA* (*Idem)*

∠*BDC* + ∠*DCA* = 90 (*Want is samen met* ∠*S 180)*

Dus ∠*BMC* + ∠*DMA* = 180 .

b. I*Bewijs:*

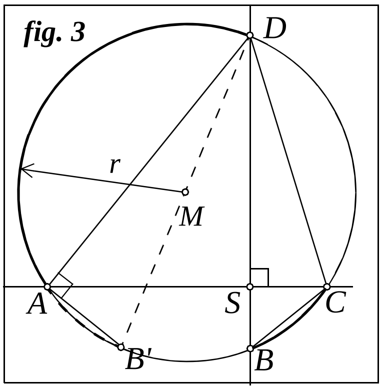


fig. 3

Laat *B*' op boog(*ABC)* het punt zijn, waarvoor boog(*AB*') = boog(*BC*).

Dan is

∠*B'MA* + ∠*DMA* = ∠*BMC* + ∠*DMA* = 180

(*Volgens deel a*)

Dus *B'D* is een middellijne van de cirkel en

∠*B'AD* = 90 (*Thales*)

$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 + |DS|^2$

$= |AD|^2 + |BC|^2$ (*Pythagoras in ADS en BCS)*

$= |AD|^2 + |AB'|^2$ (*Constructie van B')*

$= |DB'|^2$ (*DAB' is rechthoekig, Pythagoras)*

$= 4r^2$. (*|AB| = 2r)*

18 Bij de stellingen van de middelloodlijnen en de deellijnen.

19 Hoofdstuk 5, opgave 6, bladzijde 103.

20 Driehoeksongelijkheid; het geval van gelijkheid hoorde bij drie punten op een lijn.

21

a. ∠*ABD* + ∠*DBC* = 180 .

b. ∠*ECA* = ∠*ECB.*

22

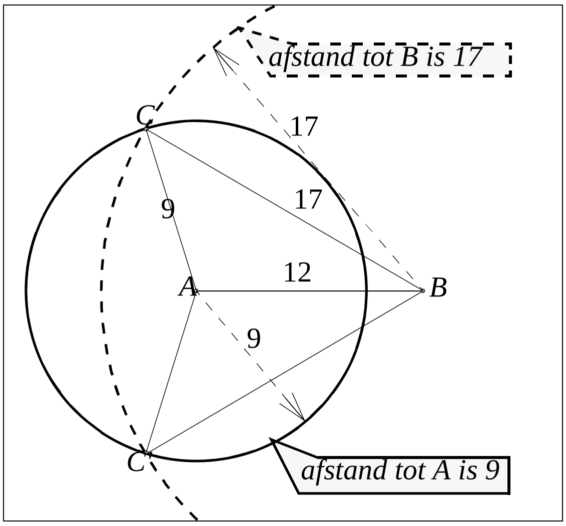
a. *(E*, *S* en *B* op een lijn vertalen we in: ∠*ESB* = ∠*ESA*+ ∠*ASF*+ ∠*FSB* = 180 .)

Bewijs:
$\angle ESA = \angle ECA = 60$. (*omtrekshoekenstelling, gelijkzijdigheid van ACE*)
$\angle ASF = \angle ABF = 60$. (*omtrekshoekenstelling, gelijkzijdigheid van AFB)*
$\angle FSB = \angle FAB = 60$. (*omtrekshoekenstelling, gelijkzijdigheid van AFB)*
Dus: $\angle ESB = \angle ESA + \angle ASF + \angle FSB = 180$.
Dus liggen *E*, *S* en *B* op één lijn.

b. De lijnen *AD*, *BE* en *CF* gaan door één punt. Dat volgt uit het feit dat de drie lijnen door *S* gaan.

23

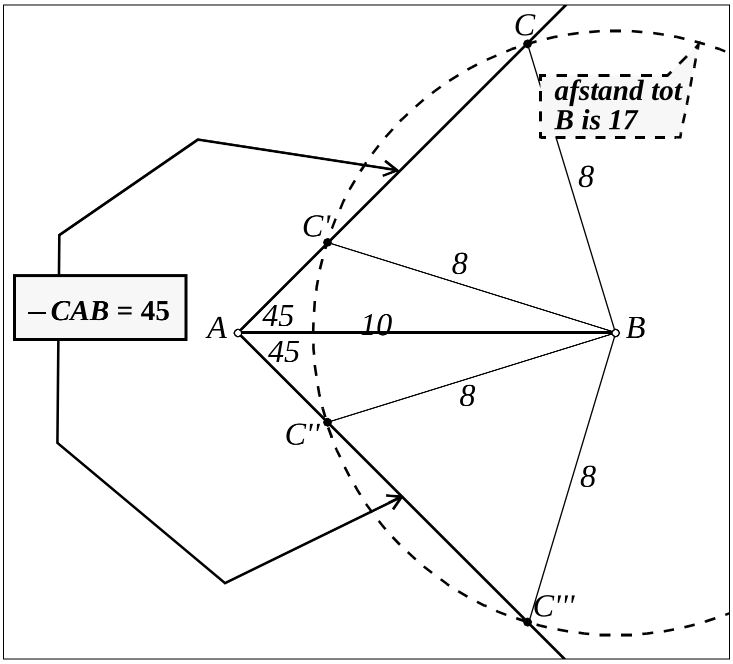
a. Schaal 1 op 4.
b. $|AC| = 9$ en $|BC| = 17$.
c. De driehoeken zijn gelijk volgens *ZZZ*, maar ze zijn wel elkaars spiegelbeeld (in de lijn *AB*)



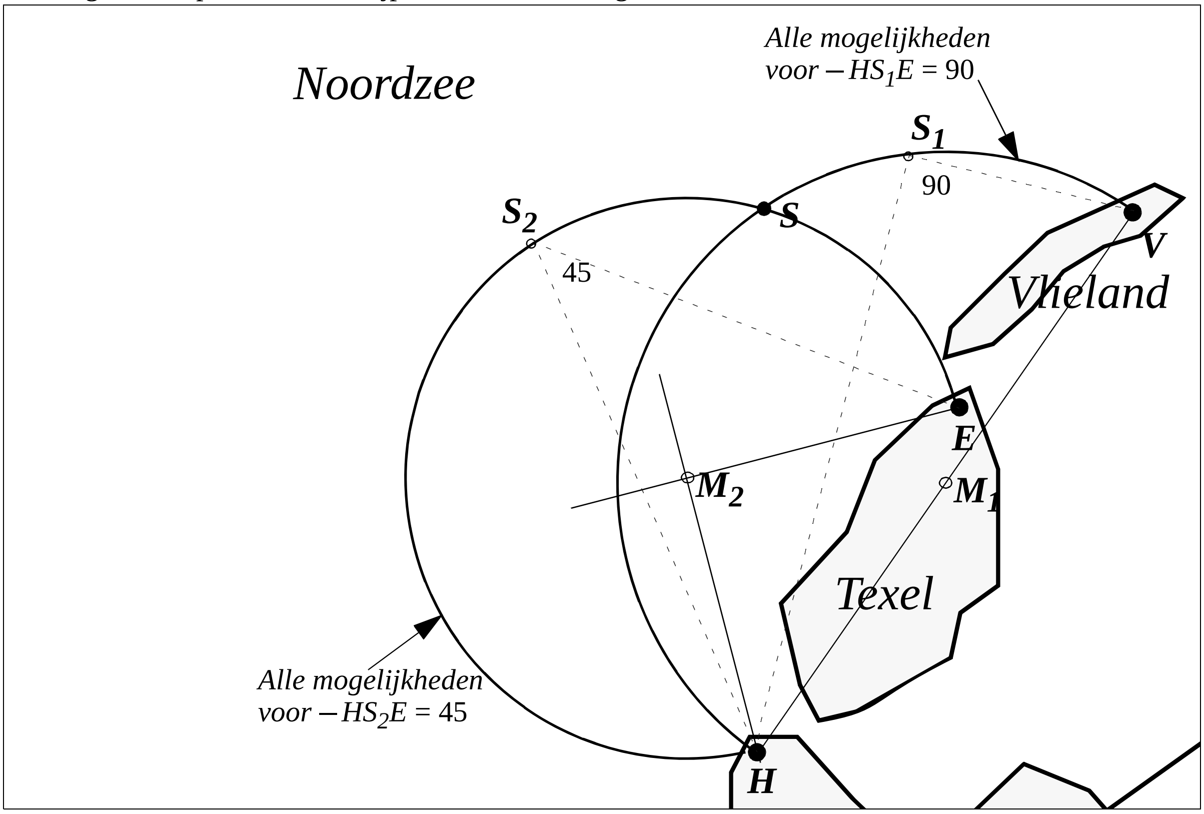
24 Zie de figuur onderaan.

a. De twee voorwaarden zijn nu:
– $\angle CAB = 45$; dat geeft twee halve lijnen vanuit *A*
– $|BC| = 9$. Een cirkel.

b. Er zijn vier mogelijkheden. Die horen weer twee aan twee als spiegelbeelden bij elkaar. Maar de twee snijpunten van de cirkel met een van de halve lijnen levert twee punten, *C* en *C*', maar niet geldt: *AC* = *AC*'. *ABC* en *ABC*' zijn geen congruente driehoeken. Het is het ontbrekende geval *ZZH* van nummer 6 van het overzicht op bladzijde 204.



25 De figuur bij $\angle HS_1V = 90$ is een stuk van de cirkel met middellijn HV en middelpunt M_1.
De figuur bij $\angle HS_2E = 45$ is ook een stuk cirkelcirkel. Het middelpunt M_2 is de top van een gelijkbenige driehoek HM_2E met een tophoek M_2 van 90 .
Je mag je tot de cirkelbogen beperken die in de Noordzee liggen.
Het gezochte punt S is het snijpunt van de twee figuren.



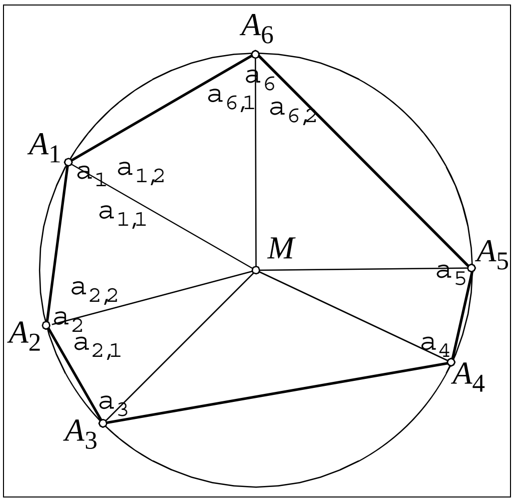
26

a. *Bewijs:* De hoek a_1 bij A_1 wordt door A_1M in twee delen verdeeld, $a_{1,1} = \angle MA_1A_2$ en $a_{1,2} = \angle MA_1A_6$.
Net zo worden de andere hoeken verdeeld.
Er gelden:

$a_{1,1} = a_{2,2}$
$a_{1,2} = a_{6,1}$
$a_{3,1} = a_{4,2}$
$a_{3,2} = a_{2,1}$
$a_{5,1} = a_{6,2}$
$a_{5,2} = a_{4,1}$

Daar uit volgt direct:

$a_1 + a_3 + a_5$
$= a_{1,1} + a_{1,2} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{5,1} + a_{5,2}$
$= a_{2,2} + a_{6,1} + a_{4,2} + a_{2,1} + a_{6,2} + a_{4,1}$
$a_2 + a_4 + a_6$



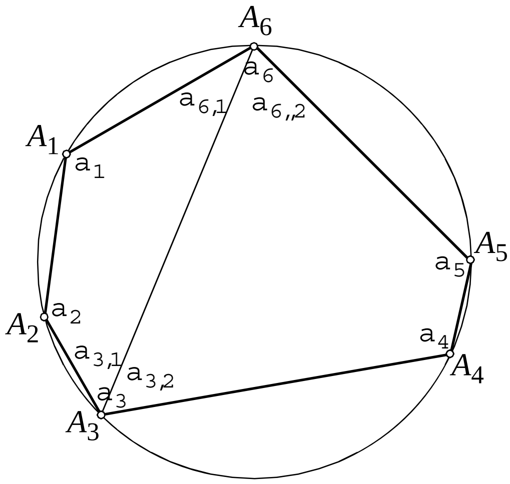
Het bewijs is precies dat van bij de koordenvierhoek; daar was het met tekentjes geïllustreerd.

b. Trek bijvoorbeeld A_3A_6. De hoeken bij A_3 en A_6 worden dus weer onderverdeeld (andere hoeken en nummers dan bij deel **a**; zie figuur!))
Nu gelden:

$$a_{3,1} + a_1 = a_2 + a_{6,1} \ (= 180\ )$$
$$a_{3,2} + a_5 = a_4 + a_{6,2} \ (= 180$$

Optellen geeft weer a_1

$$a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6 \ (= 360\ )$$

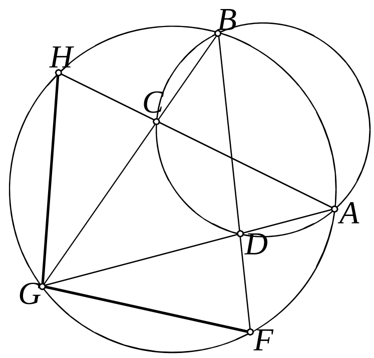


c. Net als bij de koordenvierhoek zou het middelpunt *M* van de cirkel buiten de zeshoek kunnen liggen. In dit geval moet er bij **a** een variant met minnen in plaats van plussen gegeven worden.
Het bewijs bij **b** is wel goed, want A_3A_6 loopt door het inwendige van de zeshoek, dus daar gaan de hoekoptellingen altijd goed. Omdat we bij de koordenvierhoek de gevalsonderscheiding al gemaakt hebben, kan de koordenvierhoekstelling hier algemeen gebruikt worden.

d. Bij een *koordenduizendhoek* geldt: de som van de even hoeken is gelijk aan die van de oneven-hoeken.

e. Zo'n opdeling in even en oneven hoeken kan niet gemaakt worden bij oneven aantallen. Dat gaat dus niet.

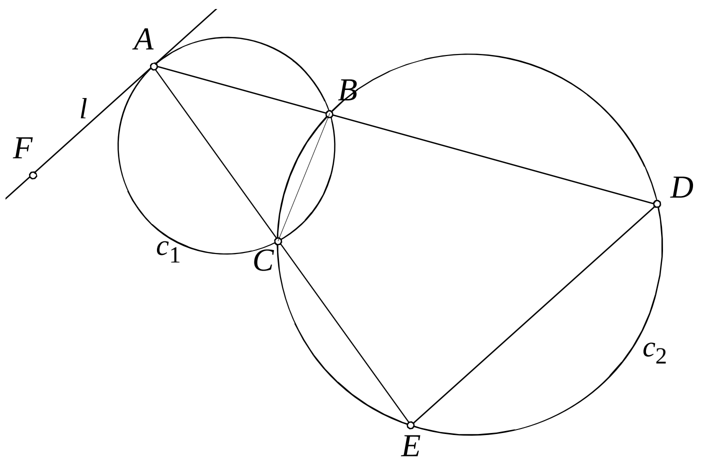
27 Het verschilt niet veel van opgave 5, bladzijde 110. De rollen van *A*-*B* enerzijds en *C*-*D* anderzijds zijn wel verwisseld.
Bewijs:



a. ∠*CBD* = ∠*CAD* (omtrekshoeken op cirkel *ABCD*)
Dus ook:
∠*GBF* = ∠*HAG* (zelfde hoeken!)
Dus de bogen *HG* en *GF* zijn gelijk, dus ook de koorden *HG* en *GF*. Klaar .

Dit alternatief voor de laatste stap is natuurlijk ook goed:
∠*GBF* = ∠*HAG*, dus ook:
∠*GHF* = ∠*HFG*, want ∠*GBF* = ∠*GHF en* ∠*HAG* = ∠*HFG* (omtrekshoeken)
M. a.w.: *HGF* is gelijkbenig.

28 *Te bewijzen is*: *PQ* // *RS*.
Bewijs:



Trek *BC*. Kies een punt *F* op *l*, zo dat *F* en *B* aan verschillende kanten van *AE* liggen.
Volgens de stelling over raaklijnen en bogen geldt: ∠*FAC* = ∠ *ABC*.
∠*ABC* + ∠*CBD* = 180 (hoekensom gestrekte hoek)
en ook ∠*CBD* + ∠*CED* = 180 . (koordenvierhoek)
Dus ∠*FAC*= ∠*AED*, dus *FA* // *ED*.

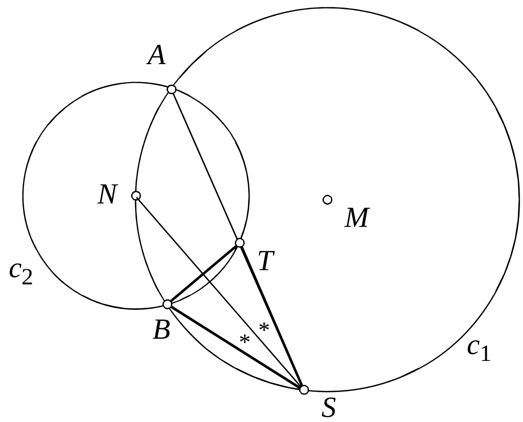
Voorbeelduitwerkingen bij hoofdstuk 8: Vermoedens bewijzen

1 **a.**

b. We moeten laten zien dat |*BS*| = |*TS*|. *NS* moet de deellijn zijn van *BSA*. Daarvoor wordt c_1 gebruikt.
Dan gebruiken we dat lijn *NS* een symmetrie-as van een deel van de figuur is, het deel zonder c_1.

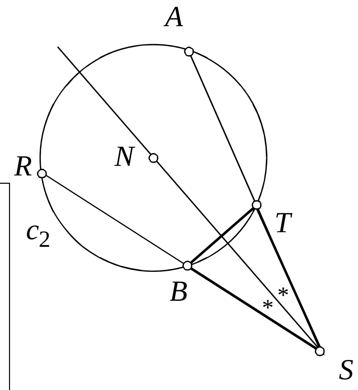
Gegeven:

N en *S* liggen op een cirkel c_1 met middelpunt *M*.
Een cirkel c_2 met middelpunt *N* snijdt cirkel c_1 in *A* en *B*.
De koorde *SA* snijdt cirkel c_2 nog in punt *T*.



Te bewijzen:

Driehoek *BTS* is gelijkbenig,
|*BS*| = |*TS*|.



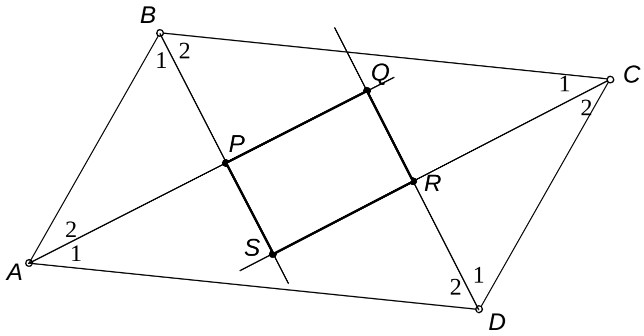
Bewijs:

–*BSN* = –*NSA*	(Gevolg van stelling 7, bladzijde 206)
Trek *SB* door tot het tweede snijpunt met c_2: *R*.	
De figuur van cirkel c_2 en de lijnen *RS*, *NS*, *AS* is symmetrisch rond lijn *NS*. Dus |*BS*| = |*TS*|, maar ook |*RS*| = |*AS*|. *BST* en *RSA* zijn gelijkbenig.	

c. Vergelijk dit met de situatie van 24b, daar waren twee paren driehoeken congruent. De sterretjes hier komen overeen met de hoeken van 45 graden bij *A* daar, en *N* hier komt overeen met *B* daar. Nu zijn hier dus |*BS*| en |*TS*| aan elkaar gelijk en ook |*RS*| en |*AS*|.
Kortom: *RSA* is ook gelijkbenig.

2

a. *Gegeven*: $AD \mathbin{/\!/} BC$.
Te bewijzen: De deellijnen uit A en B snijden elkaar loodrecht.
Bewijs:
We berekenen $-P$ in driehoek ABP.
$-A_1 + -B_2 = \frac{1}{2}(-A + -B)$ omdat AP en BP deellijnen zijn.

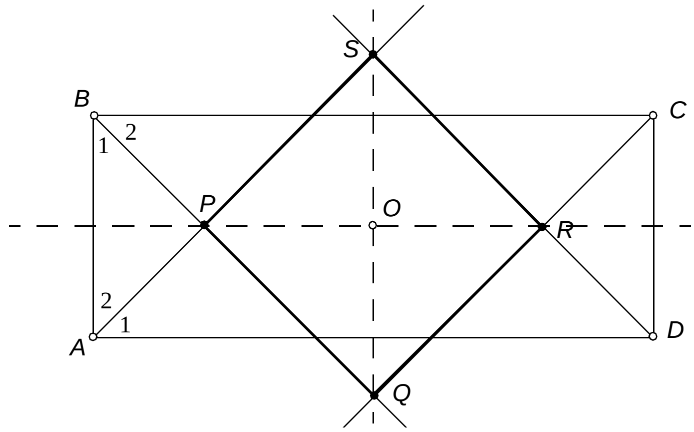


In een parallellogram zijn overstaande hoeken gelijk en de vierhoeken zijn samen 360 .
$-A_1 + -B_2$ is dus de helft van de helft van 360 , dus 90 .
Daaruit volgt $-P = 90$,vanwege de hoekensom-stelling in de driehoek ABP .
De andere hoeken van $PQRS$ zijn ook 90 vanwege dezelfde redeneringen.

b. Alleen $AD \mathbin{/\!/} BC$ is gebruikt.

3

a. *ABCD* is een rechthoek. We willen aantonen dat *PQRS* een vierkant is. In de figuur *zien* we dat de diagonalen *PR* en *SQ* van *PQRS* evenwijdig zijn aan de zijden van de rechthoek.
Bewijsplan:
Deze evenwijdigheid gaan we *bewijzen* en daaruit leiden we af dat *PQRS* vierkant is.
Alles wat bij de vorige opgave gold, geldt nu nog. De figuur is aangepast.



Bewijs: *APB* is gelijkbenig, want nu geldt $-A_2 = -B_1$, omdat hoek *A* en *B* gelijk zijn. Dus is *ABP* gelijkbenig en *P* ligt op de middelloodlijn van AB.
Net zo ligt *R* op de middelloodlijn van *CD*. Maar die middelloodlijnen zijn een en dezelfde lijn en die lijn loopt evenwijdig aan *BC* omdat hoek *B* recht is.
Net zo: *SR* loopt evenwijdig Dus is *PR* evenwijdig aan BA.
In rechthoek *PQRS* staan de diagonalen loodrecht op elkaar. *PR* is dus middelloodlijn van *SQ*, omdat de diagonalen in een rechthoek elkaar middendoor delen. Dus: $|PS| = |SR|$.

b. In een ruit zijn de deellijnen van de ruit ook tegelijk de diagonalen; dus gaan de vier deellijnen door één punt: het snijpunten van de diagonalen

c. *ABCD* is een trapezium; bijvoorbeeld geldt $AD \mathbin{/\!/} BC$. Dan is $-P$ van *PQRS* recht en om dezelfde reden $-R$ ook. Enzovoorts voor de andere gelijkheden.

4 *Bewijs in een notedop*: voor het algemene geval.

Te bewijzen: *PQRS* is een koordenvierhoek.

In driehoek *ABP* geldt:

$\angle P = 180^\circ - (\angle A_2 + \angle B_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

Net zo in *DCR*

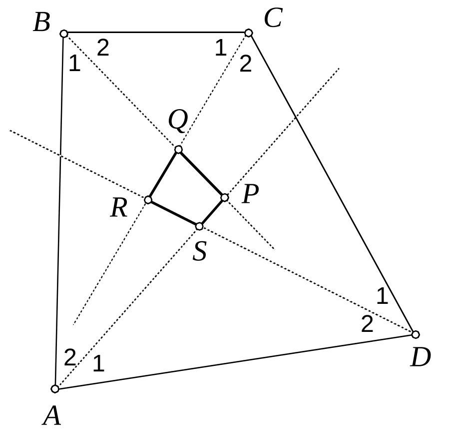
$\angle R = 180^\circ - (\angle C_2 + \angle D_1) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

Optellen en gebruikmaken van $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$:

$\angle P + \angle R = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$

$= 360^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ) = 180^\circ$.

Dus *PQRS* is een koordenvierhoek.



Als het bewijs *uitgebreid* opgeschreven wordt, zouden genoemd moeten worden:

nr. 4: hoekensom in driehoek is 180°

nr. 5: hoekensom in vierhoek is 360°

nr. 23: als twee overstaande hoeken in een vierhoek samen 180° zijn, dan is de vierhoek een koordenvierhoek.

Bij de rekenstappen met de factor $\frac{1}{2}$ erin zou bijvoorbeeld staan: uit het gegeven dat *P* op de deellijn uit *A* en/of die uit *B* ligt.

5

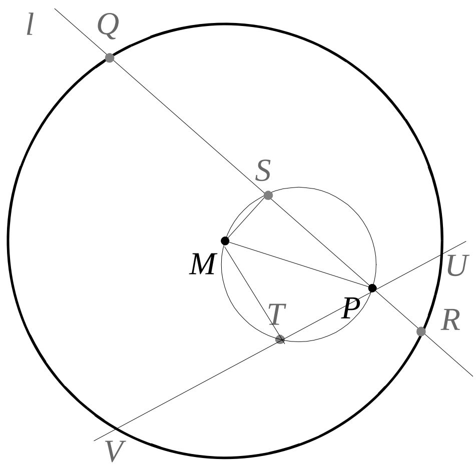
a. *Bewijs:*

$\angle MSP = 90^\circ$ (midden van koorde, overzicht 22)

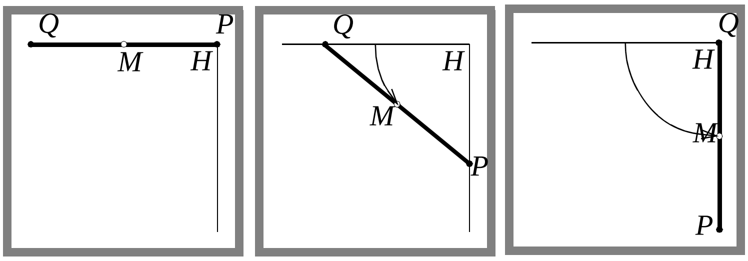
Dus *S* op de cirkel met middellijn *MP* (Thales).

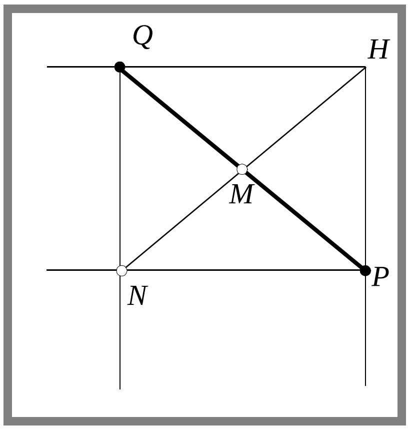
b. $\angle MTP = 90^\circ$, want *T* ligt op de cirkel met middellijn *MP*.

De snijpunten van *TP* met de cirkel zijn *U* en V. *MT* staat loodrecht op koorde *UV*, dus is *T* het midden van *UV*, volgens nr. 22.



6 *(eerste geval) de echte afstand van P en Q onderling blijft constant.*
Vermoeden: M doorloopt een kwartcirkel.

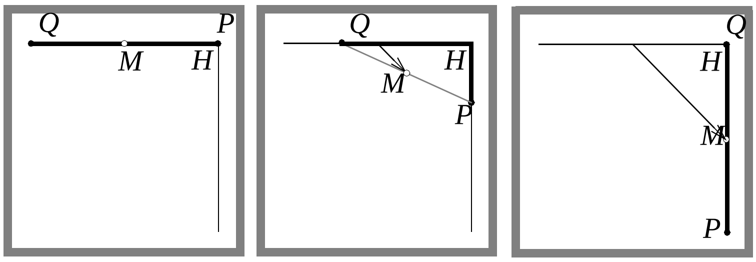


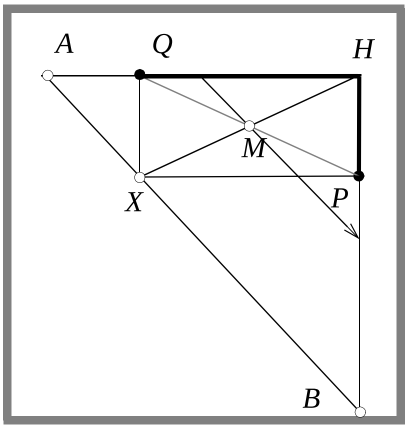


Als we kunnen aantonen dat $|MH| = \frac{1}{2}|PQ|$ zijn we (bijna) klaar, want dan ligt *M* precies op de aangegeven kwartcirkel, want $|PQ|$ is constant.
Nu is *QHP* een rechthoekige driehoek.
Trek lijnen door *P* en *Q* die evenwijdig zijn met *QH* en *PH*. Deze lijnen snijden in *N*. Zo ontstaat een rechthoek *QHPN*. Omdat *M* het midden van de diagonaal *QP* is, is *M* ook midden van diagonaal *NH*. Deze diagonalen zijn gelijk en delen elkaar middendoor.
Daarom is $|MH| = \frac{1}{2}|HN| = \frac{1}{2}|PQ|$.

6 *(tweede geval) de afstand van P en Q langs de gehoekte weg blijft constant.*

vermoeden: M doorloopt de verbindingslijn van de middens van de lijnstukken waar P en Q over lopen.





Het startpunt van *Q* noemen we *A* en het eindpunt van *P* noemen we *B*.
Ook hier vullen we *QHP* aan tot de rechthoek *QHPX*. *M* is weer het midden van *HX*.
We willen aantonen dat *X* op *AB* ligt.
Daartoe bepalen we –*AXQ*, –*QXP* en –*PXB*. Als de som ervan 180 is, zijn we klaar.
Omdat $|QH| + |HP|$ altijd gelijk is aan $|AH|$ geldt:
$|AQ| + |QH| = |QH| + |HP| = |QH| + |QX|$
En dus $|AQ| = |XQ|$.
Dus –*AXQ* = 45 .
Evenzo: –*PXB* = 45 .
Ook geldt –*QXP* = 90 en de som van de drie hoeken is dus inderdaad 180 .
Dus ligt *X* op *AB*.
Omdat $|XM| = |MH|$
Hieruit volgt dat *M* de middenparallel van H en AB doorloopt; nauwkeuriger *M* beweegt over het lijnstuk dat de middens van *AH* en *HB* verbindt.

7 (Zie aanwijzingen)
a. Die moeten gelijk zijn; hier ligt nadruk op het spiegelen.

b. *CH* is constant en heeft steeds dezelfde richting, loodrecht op *AB* namelijk. Hier ligt nadruk op het verschuiven.

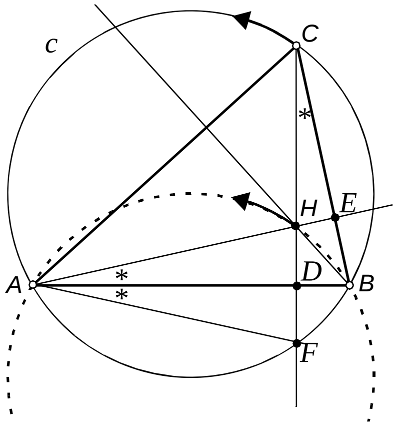
c. Ze zijn samen 180°.

8 *(Er volgen twee bewijzen, aansluitend bij de verschillende visies. Bewijs A gaat via |HD| = |FD|, bewijs B gaat via |CH| = constant. Dan volgt een nabeschouwing.)*

Variant A.

Eerst |*HD*| = |*FD* en daaruit afleiden dat de baan van *H* het spiegelbeeld van *c* in *AB* is.

Bewijsplan: We gaan aan de hand van deze figuur bewijzen dat |*DF*| = |*HD*| .Dat doen we door driehoeken *ADF* en *AHD* te vergelijken.



Gegeven:

Driehoek *ABC* met omgeschreven cirkel *c*.
H is het hoogtepunt, *CH* snijdt *AB* in *D* en de omgeschreven cirkel nog in *F*.

Te bewijzen

|*HD*| = |*DF*|.

Bewijs

Teken de lijn *AF*.
Nu is: $\angle FAD = \angle FAB = \angle FCB$ *(stelling van de constante hoek).*
Ook geldt: $\angle HAD = \angle BCF$ (*beide zijn samen met* $\angle B$ *90°, gebruik driehoeken AEB en CDB*).
Dus is $\angle HAD = \angle FAD$.
Maar ook $\angle HDA = \angle FDA = 90°$ en |*AD*| = |*AD*|.
Alle overeenkomstige elementen van driehoeken *ADH* en *ADF* zijn dus gelijk
(*zie nr. 6 van het overzicht; gelijke driehoeken, HZH*)
Dus |*HD*| = |*DF*|.

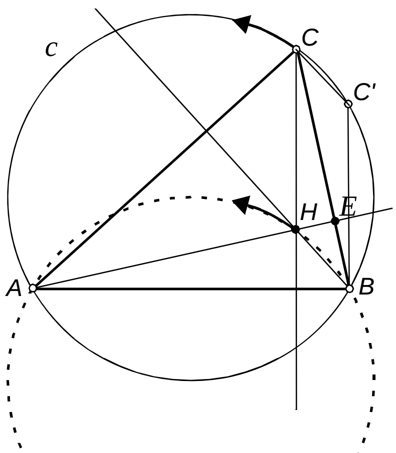
Conclusie: *H* ligt op het spiegelbeeld van de cirkel *c* in de lijn *AB*.

Als je heel grondig bent, moet je nu bewijzen dat het spiegelbeeld van een cirkel in een lijn weer een cirkel is. Dat kan met het lijnspiegelprincipe, overzicht nummer 19.

(C**ontrole** of het bewijs doorgaat voor alle liggingen van punt *C*. Zie later.)

Variant B:

Bewijzen dat |*CH*| constant is en daaruit afleiden dat *H* ligt op een verschuiving van *c*.



Bewijsplan: We gaan aan de hand van deze figuur bewijzen dat |*CH*| constant is. We doen dat door *CH* met de bijzondere positie te vergelijken waarin hoek *B* recht is. *F* en *D* zijn (voorlopig?) niet nodig.

Gegeven:

Driehoek *ABC* met omgeschreven cirkel *c*.
H is het hoogtepunt

Te bewijzen:

|*CH*| is constant.

Bewijs:

Teken de loodlijn op *AB* in *B*; deze snijdt de cirkel *c* nog in *C'*.
Nu staan *CH* en *C'B* loodrecht op *AB*. Dus *CH* // *C'B.*
Vanwege Thales is *C'A* een middellijn van *c*. Dus staat ook *C'C* loodrecht op *AC*.

Nu staan *CC'* en *HB* loodrecht op AC. Dus *CC'* // *HB*.
Dus *CHBC'* is een parallellogram en dus zijn |*CH*| en |C'*B*| gelijk.
Dus |*CH*| is constant.

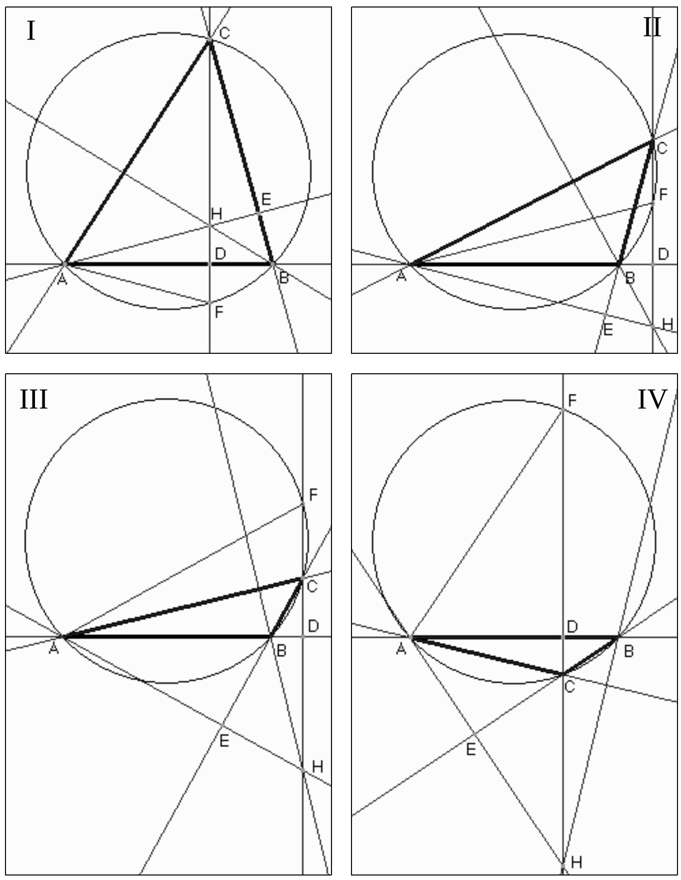
Conclusie: *H* ligt op een verschuiving van de cirkel *c*. De verschoven cirkel gaat door *B* (en ook door *A*).

Als je heel grondig bent, moet je nu bewijzen dat de verschuiving van een cirkel weer een cirkel is. Er is namelijk geen stelling die dit beweert! Dit *kun* je doen door ook naar de verschuiving van het middelpunt te kijken.
H, *C*, middelpunt en verschoven middelpunt vormen steeds een parallellogram.

Controle of de bewijzen doorgaan voor alle liggingen van punt C.

Bij variant B is dat geen probleem, de rechthoekigheden zijn er altijd en de evenwijdigheden dus ook.
Bij variant A kan de ligging van *C* zo zijn dat *C*, *F* en *D* in andere volgorde komen te liggen. Dat is het soort ellende dat we al eerder hebben ontmoet.
Op de volgende bladzijde staat een serie figuren die met CABRI gemaakt zijn. Doordat de letters erbij staan, is alles na te gaan. Bijna alle stappen kloppen letterlijk. Zie volgende bladzijde.
Je moet eigenlijk ook bewijzen dat *H* over de **hele** cirkel loopt. In variant B is dat weer makkelijk te zien. In variant A stel je eerst vast dat *F* over de hele cirkel *c* loopt, en dus loopt *D* over het hele spiegelbeeld. Klaar.

Nagaan van bijzondere situaties bij variant A.
Zie de figuren hiernaast.



Alleen Bij geval III is een kleine aanpassing nodig. Je vind de verandering door de stappen na te lopen.

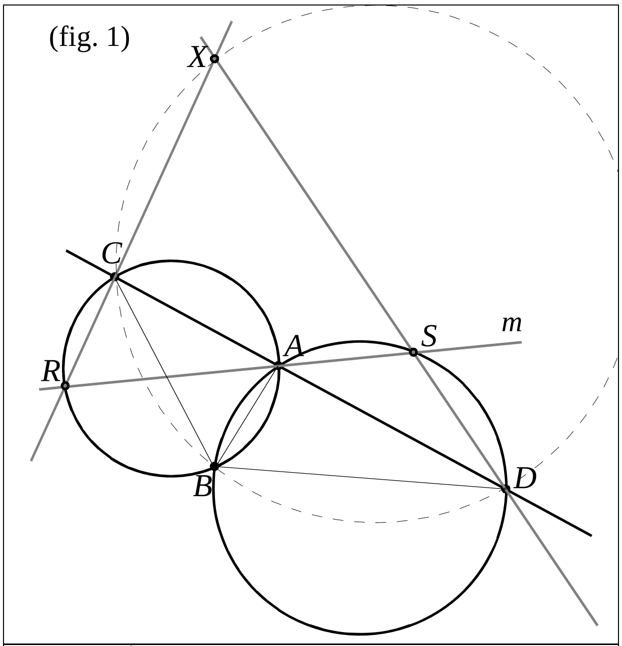
Bewijs:
Teken de lijn *AF*.
Nu is: **–*FAD* + –*FCB* = 180 (stelling van de koordenvierhoek.).**
Ook geldt: –*HAD* = –***BCD*** (beide zijn samen met –**C*BD* (of –*ABE*) 90**, gebruik driehoeken *AEB* en *CDB*.
Maar –*BCD* + –*FCB* = **180**, dus ook –*HAD* + –*FCB* = **180**
Dus is –*HAD* = –*FAD*.
Maar ook –*HDA* = –*FDA* = 90 en |*AD*| = |*AD*|.
Alle overeenkomstige elementen van driehoeken *ADH* en *ADF* zijn dus gelijk (zie nr. 6 van het overzicht; gelijke driehoeken, HZH).
Daarom is |*HD*| = |*DF*|.

9 *Bewijs* : Eerst het geval dat *B* en *X* aan verschillende zijden van *CD* liggen . (fig. 1)
Aangetoond moet dan worden dat
$\angle CBD + \angle CXD = 180$.

$\angle CBD = \angle CBA + ABD$
$= \angle CRA + (180 \times - \angle ASD)$ *(koordenvierhoeken)*
$= \angle XRA + \angle ASX$

Omdat $\angle XRA + \angle ASX + \angle CBD = 180$ *(hoekensom in driehoek)* geldt ook
$\angle CBD + \angle CXD = 180$.
Dus ligt *X* op de cirkel door *C*, *B* en *D*.

(fig. 1)

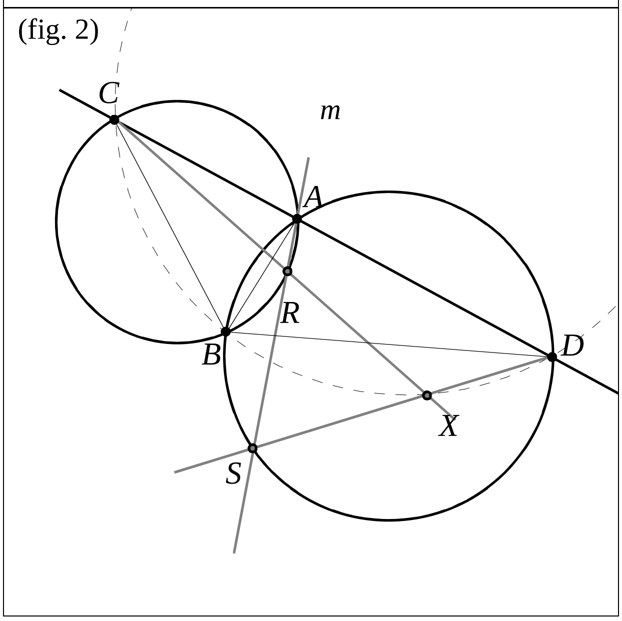


Als *X* aan de *B*-kant van lijn *CD* ligt moet aangetoond worden dat $\angle CBD = \angle CXD$ (fig. 2)

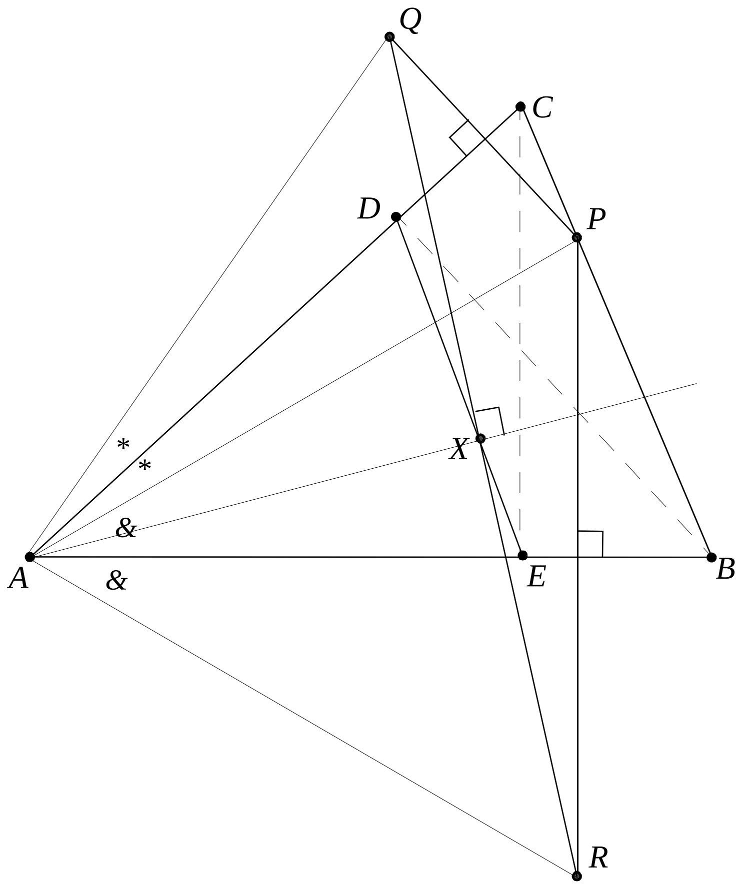
Voor het geval dat x op boog *BD* ligt:
$\angle CBD = \angle CBA + ABD$
$= \angle CRA + \angle ASD$ *(constante hoeken op bogen)*
$= \angle XRS + \angle RSX$ *(overstaande hoeken bij R)*
$= 180 - \angle RXS$ *(hoeknsom driehoek)*
$= \angle CXD$

Het geavl dat *X* op *CB* ligt is niet naders; alleen de puntennamen wijken af..

(fig. 2)



10 .*Gegeven*: Een driehoek *ABC*. Op zijde *BC* ligt het punt *P*.
De spiegelbeelden van *P* in AB en *AC* zijn *Q* en *R*.
Het midden van *QR* is *X*.



Te bewijzen:

a: –*CAP* = –*BAX*
b: –*QAX* = –*CAB*

Vanwege de spiegelingen gelden:

–*CAP* = –*CAQ*
–*BAP* = –*BAR*.

en bovendien:

|*AQ*| = |*AP*| = |*AR*|

AX is dus de middelloodlijn van QR. (immers: *AQX* en *ARX* zijn gelijke driehoeken).
Uit de hoekgelijkheden volgt nu dat:

–*QAR* = 2–*CAB.*

Dan is dus ook:

–*QAX* = –*CAB*

Vermoeden b is daarmee bewezen.
Nu is

–*QAB* = –*QAC* + –*CAB*

en ook

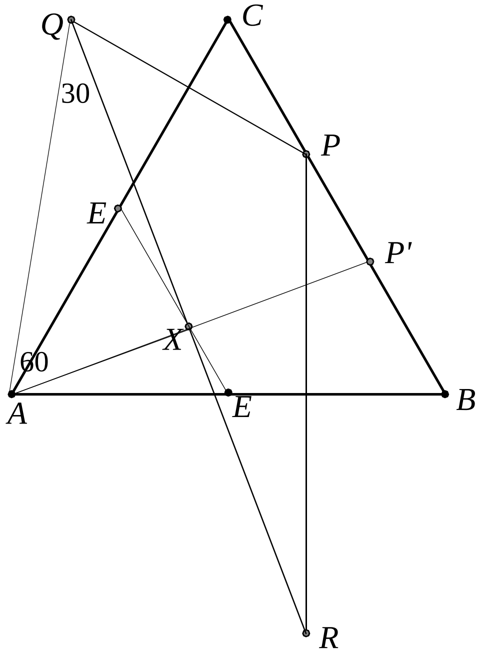
–*QAB* = –*QAX*+ –*QAC*

Omdat

–*CAB* = –*QAX* geldt dus ook –*PAC* = –*QAC* = –*QAC*.

Nu is vermoeden **a** ook bewezen.

11 Het geval dat *ABC* gelijkzijdig is, is hier opnieuw getekend. De gelijkheden van hoeken die je hebt bewezen, mag je uiteraard hier ook gebruiken.
Eerst een nadere verkenning van deze situatie.



a.

b. Uit wat eerder bewezen is, volgt dat *QAX* een 90 -60 - 30 driehoek is.

Dus is $|AX| = \frac{1}{2}|AQ|$ en omdat $|AQ|$ en $|AP|$ gelijk zijn geldt dan ook $|AX| = \frac{1}{2}|AP|$.

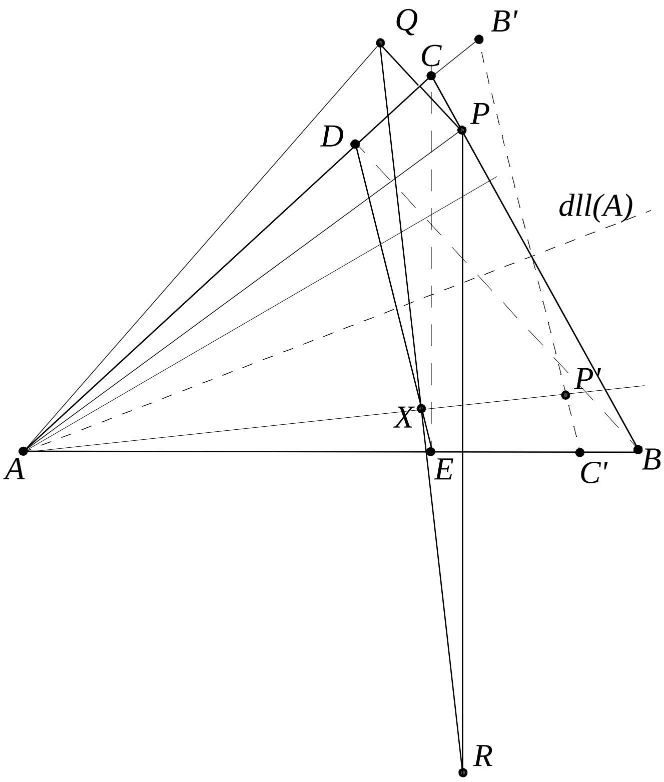
c. In de tekening ligt *P'* zo, dat *X* wel het midden van *AP'* is. Je *merkt* dat *P*' op *BC* ligt, maar dat moet nog wel *bewezen* worden!

d. Omdat:

AP = *AP*'	(*beide dubbele van* $\|AX\|$)
– *PAC* = – *P'AB*	(*vorige opgave*)
$\|AC\| = \|AB\|$	(*gelijkzijdigheid*).

zijn driehoeken *CAP* en *BAP*' gelijk (*ZHZ*).
Dus ligt *P*' op *BC*, want – *P'AB* = 60 .
Daaruit volgt dat *X* op de middenparallel van *A* en *BC* ligt, en dat is bij een gelijkzijdige driehoek juist de verbinding van twee voetpunten van hoogtelijnen, hier dus *D* en *E*.

12 Voor het bewijs van het algemene geval kiezen we *P*' op *AX*, en zo dat $|AP'| = |AP|$.
Dan is *P*' het spiegelbeeld van *P* in de deellijn van hoek *CAB*.
Als *P BC* door loopt doorloopt *P*' dan het spiegelbeeld van BC in de deellijn. In de figuur is dat *B*'*C*'.



Nu is $\frac{|AX|}{|AP'|}$ constant, want gelijk aan

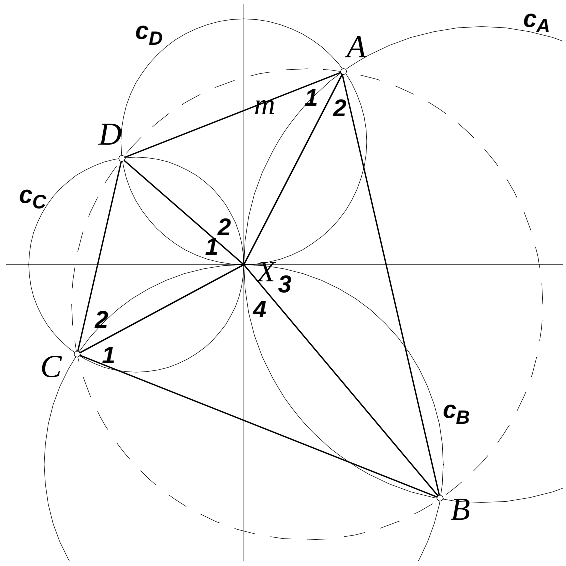
$\frac{|AX|}{|AQ|}$ en dat is

cos(– *QAX*) = cos(– *CAB*).

X verdeelt dus *AP*' niet in gelijke delen, maar wel in een constante verhouding. In dat geval doorloopt *X*, als *P*' het lijnstuk *B*'*C*' doorloopt, ook een lijnstuk.
Dit laatste is strikt genomen niet uit een van de bekende stellingen, maar het is toch wel duidelijk dat driehoek *AED* precies de verkleining van *AC*'*B*' met die verhoudingsfactor moet zijn.

Korte uitwerkingen bij de herhalingsopdrachten van hoofdstuk 9

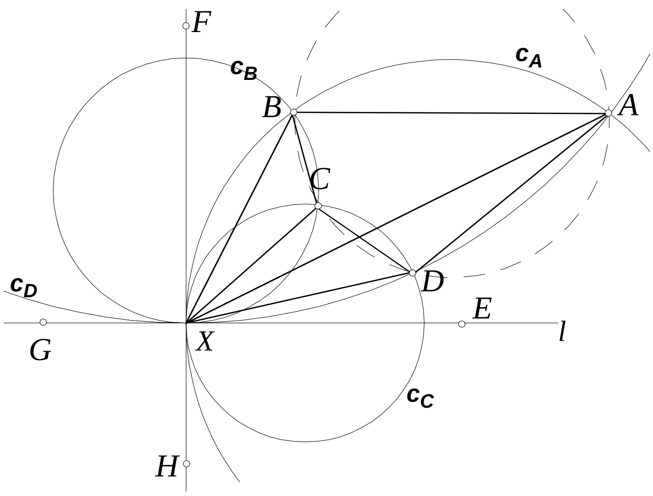
1 Gegeven: twee lijnen, *l* en *m*, loodrecht op elkaar, met snijpunt *X*. En vier cirkels, twee in *X* rakend aan *l*, twee in *X* rakend aan *m*.
Er zijn enkele puntennamen toegevoegd, lijnstukken getrokken, de cirkels hebben ook namen gekregen in de figuur.



a. *Te bewijzen: ABCD* is een koordenvierhoek.
Pas de hoeken A_1, A_2, C_1 en C_2 de stelling van raaklijn en koorde toe.:
$-A_1 = -X_1$ (in cirkel c_D)
$-A_2 = -X_4$ (in cirkel c_A)
$-C_1 = -X_3$ (in cirkel c_B)
$-C_2 = -X_2$ (in cirkel c_C)

Optellen: $-DAB + -DCB =$
$-X_1 + -X_2 + -X_3 + -X_4 = 90 \quad + 90 \quad = 180$.
Dus liggen *A*, *B*, *C* en *D* op één cirkel.

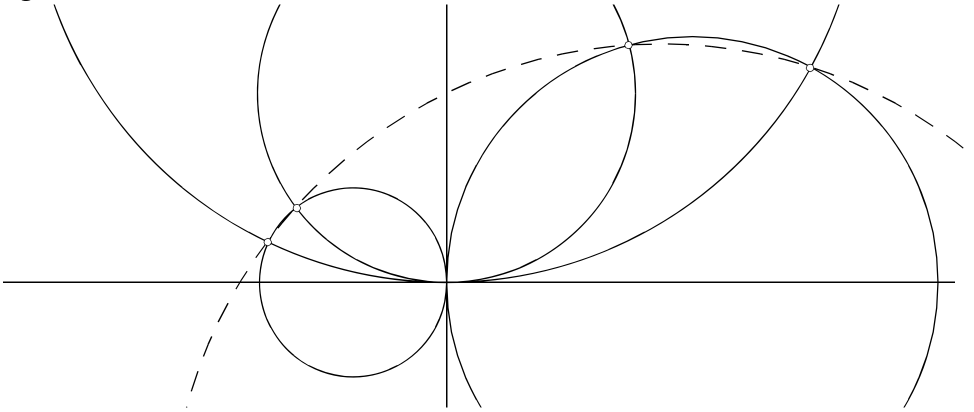
b. De belettering is precies die van de vorige situatie. Om verwarring te voorkomen, schrijven we nu de hoeken wel geheel uit in letters; het patroon van het bovenstaande bewijs wordt geplagieerd. Daarom zijn ook punten op de lijnen *l* en *m* gemarkeerd.



$-DAX = -DXE$ (in cirkel c_D)
$-BAX = -BXF$ (in cirkel c_A)
$-BCX = -GXB$ (in cirkel c_B)
$-DCX = -DXH$ (in cirkel c_C)

Bereken van $-DAB + -DCB$.
$= -DAX + -BAX + 360 \quad - -BCX - -DCX$
$= -DXE + -BXF + 360 \quad - -GXB - -DXH$
(Nu herleiden naar hoeken in de rechterbovenhoek:)
$= -DXE + -BXF + 180 \quad - -GXB + 180 \quad - -DXH$
$= -DXE + -BXF + -BXE + -DXF$
$= -DXE + -DXF + -BXF + -BXE = 90 \quad + 90 \quad = 180$.
Dus liggen *A*, *B*, *C* en *D* op één cirkel.

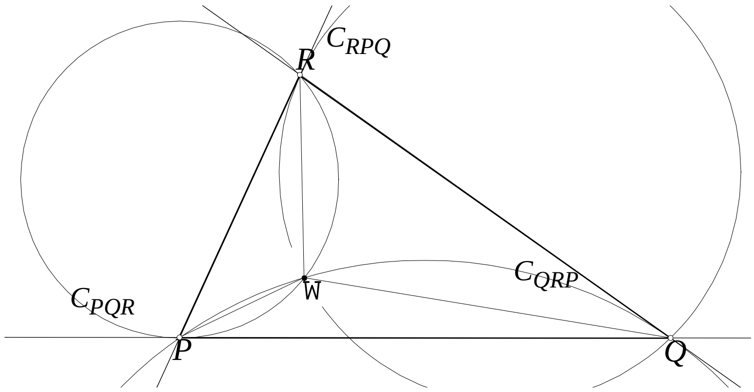
c. Zie figuur.



Door het patroon van het eerste en tweede bewijs consequent door te zetten, wordt hier ook een bewijs gevonden. Dat is verder niet zo interessant.
Het is ook (zeldzaam) nog mogelijk dat *A*, *B*, *C* en *D* op één lijn liggen.

d. Alle bewijzen eindigen met de som ofwel van twee overstaande hoeken bij *X*, ofwel van twee keer dezelfde hoek bij *X*. Dat is alleen gelijk aan 180 als *l* en *m* een hoek van 90 maken.

2 Trek *P*W , *Q*W en *R*W .



Twee bewijsvarianten bij de twee mogelijke volgordes:

variant A:
Omdat *PQ* raakt aan C_{PQR} geldt –W *PQ* = –W *RP* (stelling 6, bladzijde 206).
Omdat *RQ* raakt aan C_{QRP} geldt evenzo –W *QR* = –W *PQ*.
Dus –W *PQ* = –W *RP* = –W *PQ*.
Daarmee is de eerste helft klaar.
Er is in ieder geval een cirkel, noem die *C** die in *R* aan *PR* raakt en door W gaat.
Omdat –W *QR* = –W *RP* ligt *Q* ook op die cirkel. Die cirkel is dus gelijk aan de cirkel C_{RPQ}. Dus ligt W op de cirkel C_{RPQ}.

variant B:
Volgens het 1-1-bis patroon bewijzen dat snijpunt W van C_{PQR} en C_{QRP} ook op C_{RPQ} ligt.
Dat kan door –*R*W *Q* te berekenen, waarbij de andere twee hoeken bij W worden gebruikt.

Stap 1: Omdat *RQ* aan C_{QRP} raakt, geldt: –*P*W *Q* = (180× ––*RQP)*
Stap 1bis: Omdat *PQ* aan C_{PQR} raakt, geldt: –*R*W *P* = (180× ––*QPR)*
Samennemen: –*R*W *Q* = 360× ––*P*W *Q* ––*R*W *P*
= 360× – (180× ––*RQP)* – (180× ––*QPR)*
= –*RQP* + –*QPR*
= 180× ––*PRQ* (hoekensom driehoek *PQR*)

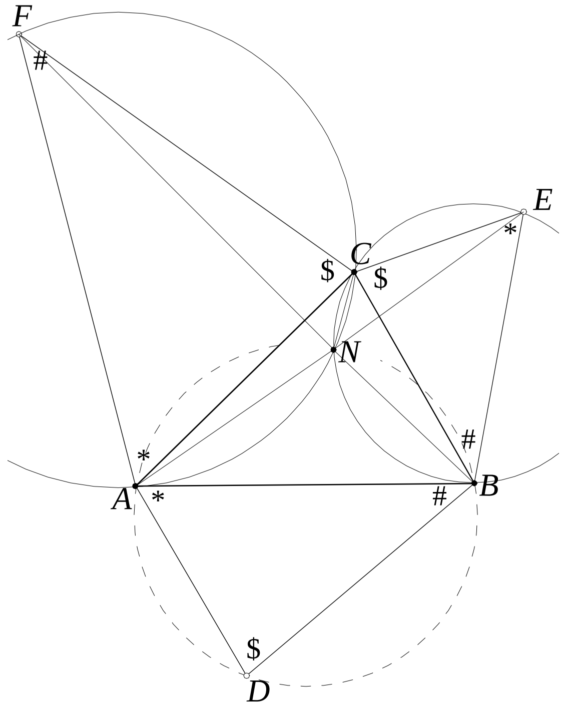
Conclusiestap: Omdat RQ raakt aan C_{RPQ} en –*R*W *Q* = 180× ––*PRQ* ligt W op C_{RPQ}. (Weer wegens stelling 6, bladzijde 206).

Omdat *RQ* raakt aan C_{QRP} geldt –W *QR* = –W *PQ*. (Evenzo de andere gelijkheden).

3 *Plagiaat*: (a: bij opgave 6, bladzijde 103 en b: bij opgave 22, bladzijde 118)

a. eerst bewijzen dat de omgeschreven cirkels van *ACF*, *CBE* en *BAD* door één punt *N* gaan.

b. daarna voor *N* bewijzen dat hoek *FNB* gestrekt is.



Uitwerking **a** via het 1-1bis-schema.
Zij *N* het snijpunt van de omgeschreven cirkels van *ACF* en *CBE*.

Stap 1: –*CNB* = 180× – –*CEB* = 180× – (*).
Stap 1bis: –*CNA* = 180× – –*CFA* = 180× – (#).

Samennemen:
–*ANB* = 360× – –*CNB* – –*CNA*
= 360× – (180× – (*)) – (180× – (#))
= 180× – ($).

Conclusiestap: *N* ligt op de cirkel door *A*, *B* en *D*.

Uitwerking deel **b**:
Trek ook nog *FN* en *NE* in de figuur.
–*FNC* = –*FAC* = (*) (cirkel door *F*, *C*, *N* en *A*)
–*CNE* = –*CBE* = (#) (cirkel door *E*, *C*, *N* en *B*)
–*ENB* = –*ECB*= ($) (ook de cirkel door *E*, *C*, *N* en *B*)
Omdat * + # + $ = 180× , liggen *F*, *N* en *B* op één lijn.
Voor de andere lijnen, loopt precies zo'n bewijs. Uiteraard!

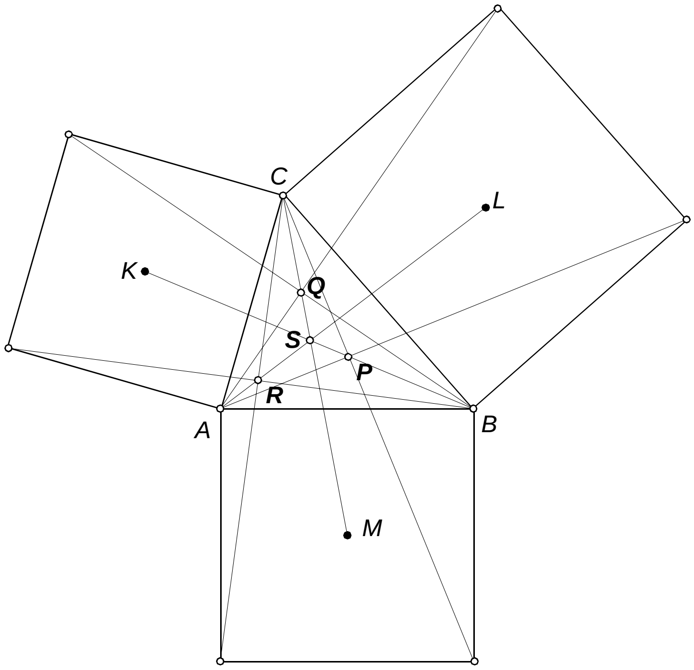
4 **a.**

b. Zie de figuur.

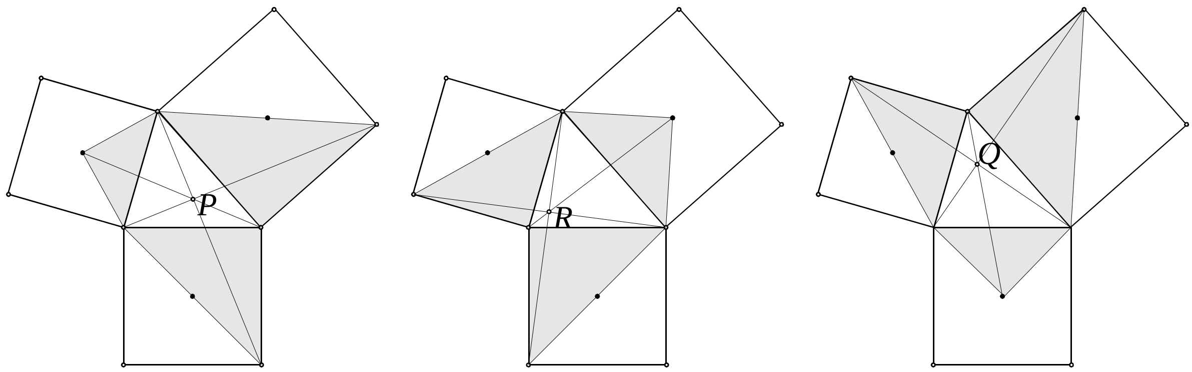
Bij S gaat het om de drie verbindingen met de middens van de vierkanten.

Bij *P*, *Q* en *R* gaat het steeds om een verbindingslijn met één midden en twee andere lijnen.

Bij *S* gaat het om de verbindingen van de drie hoekpunten met drie middens van de vierkanten.



c. Bij *P*, *Q* en *R*: toepassen van de stelling van Napoleon. De driehoeken zijn 90 -45 -45 driehoeken. De figuren hieronder volstaan.



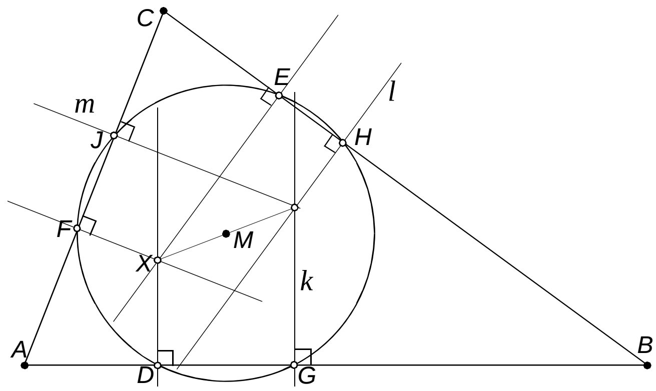
Voor punt *S* in de figuur kan zo'n Napoleontische maneuvre niet uitgevoerd worden. Je kunt wel drie 90 -45 -45 driehoeken op de zijden leggen, met de 90 -hoeken in de middens van de vierkanten, maar die liggen dan niet volgens de regels van Napoleon. Meteen is trouwens al te zien dat bijvoorbeeld *A*, *K*, *C* en *S* niet op één cirkel liggen, immers *A*, *K*, *C* en ***P*** liggen dat wél.
Het geval van *S* is dus echt anders dan dat van *P*, *Q* en *R*.
Je kunt in de figuur nog door meten het vermoeden krijgen dat *KL* en *CM* loodrecht op elkaar staan. Als je dat kunt bewijzen (en natuurlijk ook $KB \perp LM$ en $AL \perp KM$), ben je klaar: dan zijn *CM*, *LA* en *BK* hoogtelijnen van *KLM*.
Er geldt zelfs nog meer: $|KL| = |CM|$.
Met technieken die niet in dit boekje voorkomen, kunnen zowel $KL \perp CM$ als $|KL| = |CM|$ bewezen worden; met heel veel moeite en vindingrijkheid kan het ook wel zonder die technieken, maar dat valt beslist niet mee!

5

a. Driehoek *A'BC* is het spiegelbeeld van *ABC*. Evenzo zijn *AB'C* en *ABC'* spiegelbeelden van *ABC*. De omkransende driehoeken zijn dus gelijk. De hoeken die bijvoorbeeld om *B* liggen, zijn gelijk aan – *B*. Evenzo bij *A* en C. Dus is de ligging van de omkransende driehoeken geschikt voor toepassing van Napoleon.

b. De bewuste lijnen zijn de hoogtelijnen. De stelling van de drie hoogtelijnen.

6 **a.** De voetpunten *X* op de zijden zijn *D*, *E* en *F*. De andere drie snijpunten zijn *G*, *H* en *J*.



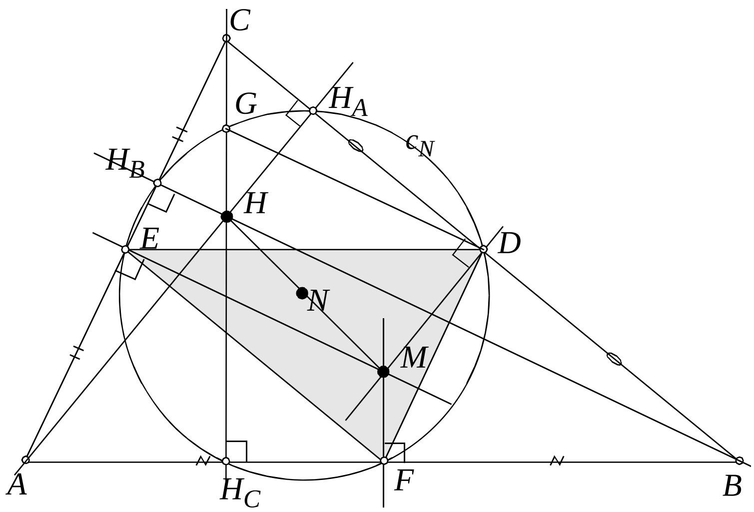
b. *Vermoedens*:
De loodlijnen in *G*, *H* en *J* op de zijden gaan door één punt. Het middelpunt *M* van de cirkel is het midden van de verbindingslijn van *X* en dat snijpunt.
Bewijs: De loodlijnen in *G*, *H* en *I* zijn in de figuur *k*, *l* en *m* genoemd.
Omdat |*DM*| = |*MG*| ligt *M* op de middelloodlijn van *DG*; dit is ook de middenparallel van de lijnen *XD* en *k*.
Laat nu *Y* het puntspiegelbeeld van *X* in *M* zijn. Dan ligt *Y* dus op *k*, want anders zou *M* (het midden van *YX)* niet op de middenparallel liggen. Evenzo ligt *Y* op *l* en op *m*. Dus gaan *k*, *l* en *m* door één punt.

7 **a.** Stap 3. *D*, *E* en *F* zouden op één lijn kunnen liggen en dan is er geen cirkel door *D*, *E* en *F*.

b. In dat geval zijn er geen andere snijpunten, want de cirkel raakt dan aan de zijden. Maar je kunt ook zeggen dat *G*, *H* en *J* dan samenvallen met *D*, *E* en *F*. Als je de cirkel een heel klein beetje verschuift, splitst het raakpunt namelijk in twee zeer naburige snijpunten.
Daarom is het niet zo gek om te zeggen: het bevriende punt van *I* is *I* zelf.

c. *X*.

8



a.

b. De drie middenparallellen van *ABC*.
DEF heeft dezelfde vorm als *ABC*; dat wil zeggen: de driehoeken hebben dezelfde hoeken.

c.

d.

9 *Het bevriende punt van M is het hoogtepunt H van de driehoek.*

a. *ED* is middenparallel van *C* en *AB*; dus deelt *ED* het lijnstuk CH_C middendoor en staat er loodrecht op. H_C is dus het spiegelbeeld van *C* in *DE*.
Daaruit volgt $-EH_CD = -ECD$. Ook geldt $-EFD = -ECD$ en dus $-EH_CD = -EFD$. Daaruit volgt dat H_C op de cirkel door *D*, *E* en *F* ligt.
(Vele andere bewijzen zijn mogelijk.)

b. De drie loodlijnen die bij het bepalen van het bevriende punt worden gebruikt, zijn de hoogtelijnen van de driehoek.

(Voetnoot: Dat de lijnen AH_A, BH_B en CH_C door één punt gaan volgt dus ook uit opgave 6b. Eigenlijk is hier dus op een nieuwe manier bewezen dat de hoogtelijnen door één punt gaan!)

10

a. *GD* zou middenparallel kunnen zijn van driehoek *CHB*. Of *GE* van *CHA*.

b. *Vermoeden*: *GF* is een middellijn van de cirkel door *D*, *E* en *F*.
Bewijs: dat volgt uit. $\angle GH_CF = 90$.

c. $\angle GDF = 90$, Thales in dezelfde cirkel. Nu moet $GD \mathbin{/\mkern-5mu/} HB$ te bewijzen zijn en dan is *GD* dus de middenparallel van *CHB*.

d. *Te bewijzen*: $|CG| = |GH|$.
Bewijs:

1:	Zij c_N de cirkel door *D*, *E* en *F* . *G* en H_C liggen daar ook op	
2:	*GF* is een middellijn van c_N	*($\angle GH_CF = 90$, Thales)*
3:	$\angle GDF = 90$	(*Thales, middellijn GF*)
4:	$DF \mathbin{/\mkern-5mu/} AC$	(*middenparallel*)
5:	$GD \perp AC$	(*volgt uit 3 en 4*
6:	$GD \mathbin{/\mkern-5mu/} HB$	(*volgt uit* $HB \perp AC$ *en 5*)
7:	*GD* is middenparallel van *C* en *HB*	*(D is midden van BC, en 6)*
8:	$\lvert CG\rvert = \lvert GH\rvert$	(*volgt uit 7, middenparallelprincipe*)

Klaar.

11 Omdat *M* hoogtepunt van *DEF* is. In opgave **7** en **8,** bladzijde 143, is deze eigenschap van het hoogtepunt van een driehoek bewezen.

12 Trek bijvoorbeeld zwaartelijn *CF*. Deze snijdt *HM* in een punt, dat we even *X* noemen.
Nu heeft driehoek *CHX* dezelfde hoeken als *FMX*; dit volgt uit de evenwijdigheid van *CH* en *MF*.
Bovendien geldt nog $|HC| = 2 \cdot |MF|$. Dus is *CHX* een vergroting met factor 2 van driehoek *FMX*.
X verdeelt de zwaartelijn dus in de verhouding 1 : 2, en *X* moet dus het zwaartepunt zijn van *ABC*.

13

a. *BP* is hoogtelijn op *AH*. Voetpunt *P*.
AQ is hoogtelijn op *BH*. Voetpunt *Q*.
CR is hoogtelijn op *AB*. Voetpunt *R*.
C is het hoogtepunt van en *PQR* is de voetpuntsdriehoek van *C* op *ABH*.

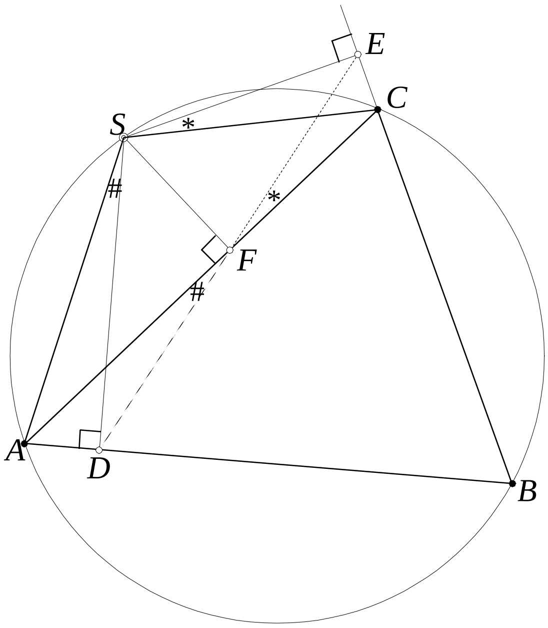
b. Dat is dus ook *n*. *n* gaat dus door de middens van *AH*, *HB* en -uiteraard- *AB*.
Want het middelpunt van de omgeschreven cirkel van *AHB* is bevriend met het hoogtepunt *C* van *AHB*. Dit is toepassen van opgave **7c** op driehoek AHB,

c. Neem *ACH* als uitgangsdriehoek.

14

a. In de figuur op de vorige bladzijde is *M* het hoogtepunt van driehoek *DEF*. Van deze driehoek zijn alle maten de helft van de overeenkomstige maten in *ABC*. Omdat *H* het hoogtepunt van *ABC* is, geldt dus: $|CH| = 2\,|MF|$.

b. $\angle CBH = 90 - \angle C$.
Nu brengen we de andere hoek in verband met hoek *C*.
Voeg de omgeschreven cirkel van *ABC* toe aan de figuur.
Er geldt: $\angle AMB = 2\angle C$.
Nu is driehoek *AMB* gelijkbenig. Daaruit volgt: $\angle CBH = \angle CBA = 90 - \frac{1}{2}\angle AMB = 90 - \angle C$.



15

a.

b.

c. De situatie dat *S* het middelpunt van de omgeschreven cirkel is, of het hoogtepunt.

16

a.

b. Op een van de hoekpunten van *ABC*.

c. Ook dan liggen de drie voetpunten op één lijn. De loodlijnen snijden elkaar buiten de driehoek.

d. Dan liggen de voetpunten zeker niet op één lijn.

17

a.

b. *Vermoeden*: als *S* op de omgeschreven cirkel ligt, liggen *D*, *E* en *F* op één lijn.

c.

d.

18

a.

b. Ofwel: de baan bestaat uit een hele serie momentopnamen, ofwel de baan is de kromme waaraan de lijnen steeds raken. Dat hangt van de instelling van CABRI af; zie volgende onderdeel.

c.

19

a. $-EFC = -AFD$.

b. Door steeds twee van de drie punten te kiezen vind je:
E en *D*: Koordenvierhoek *DBES*;
D en *F:* Koordenvierhoek *ADFS*;
E en *F*: Koordenvierhoek *DBES*.

c. *S* ligt op de omgeschreven cirkel. *ABCS* is een koordenvierhoek.

20 *Bewijsplan*: de bewuste hoeken bij *F* 'overschakelen' naar *S*.
Hiervoor worden twee koordenvierhoeken gebruikt: *SFCE* en *ADFS*.
De andere twee koordenvierhoeken hebben *S* en *B* gemeen. Rond *S* kan vast iets gedaan worden ...

Gegevens:

Driehoek *ABC*;
S op omgeschreven cirkel van *ABC*.
D, *E* en *F* zijn voetpunten van S
op ABC.

Te bewijzen:

D, *E* en *F l*iggen op één lijn.

Bewijs:

1: *SFCE* is een koordenvierhoek ($-SFC + -SEC = 180$)

2: $-EFC = -ESC$ (*constante hoekstelling, S, F, C en E liggen op een cirkel, 1*)

3:	$\angle AFD = \angle ASD$	*(Zo'n zelfde redenering, nu met vierhoek ADFS.)*
4:	*SDBE* is een koordenvierhoek	($\angle SDB + \angle SCB = 180^\circ$)
5:	$\angle ESD = 180^\circ - \angle EBD$	(*volgt uit 4*)
6:	*SABC* is een koordenvierhoek	(*gegeven: S op omgeschreven cirkel van ABC*)
7:	$\angle ASC = 180^\circ - \angle ABC$	(*volgt uit 6*)
8:	$\angle ESD = \angle ASC$	(*uit 5 en 7*; $\angle EBD$ *en* $\angle ABC$ *zijn dezelfde hoek*)
9:	$\angle ESC + \angle CSD = \angle CSD + \angle ASD$	(*hoeken splitsen in 8*)
10:	$\angle ESC = \angle ASD$	(*uit 9*)
11:	$\angle EFC = \angle AFD$	(*toepassen van 2 en 3 in 10*)
12:	Dus *D*, *F* en *E* liggen op een rechte lijn.	(*overstaande hoeken*)

Klaar.

Er zijn natuurlijk heel wat varianten op dit bewijs te vinden. Je kunt bijvoorbeeld ook als vertaling ook gekozen hebben voor $\angle FDE = 0^\circ$. Dan ontrolt zich een ander verhaal; vermoedelijk wel met zo'n zelfde structuur.
Er zijn vast nog andere manieren ook.

Overzicht bekende meetkunde

en

Stellingen-lijst

(uit deel A)

Overzicht bekende Meetkunde ....

Hoeken en lijnen

1. De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk; (*overstaande hoeken*).
2a. Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de *F*-hoeken en *Z*-hoeken gelijk; (*F-hoeken, Z-hoeken bij // lijnen*).
2b. Als twee lijnen in twee verschillende snijpunten gesneden worden door een derde lijn, waarbij een paar *F*-hoeken of *Z*-hoeken gelijk zijn, dan zijn die twee lijnen evenwijdig; (*gelijke F-hoeken, gelijke Z-hoeken.*).
3. Een gestrekte hoek is 180 ; (*gestrekte hoek*).
4. De hoeken van een driehoek zijn samen 180 ; (*som hoeken driehoek*).
5. De hoeken van een vierhoek zijn samen 360 ; (*som hoeken vierhoek*).

Gelijke driehoeken [*)]

6. Twee driehoeken zijn gelijk als ze gelijk hebben:
   a. Eén zijde en twee aanliggende hoeken; *HZH*.
   b. Eén zijde, een aanliggende hoek en de overstaande hoek; *ZHH*.
   c. Twee zijden en de ingesloten hoek; *ZHZ*.
   d. Alle zijden; *ZZZ*.
   e. Twee zijden en de rechte hoek tegenover een van die zijden, *ZZR*.

Alternatieve formulering gelijke driehoeken

6*. De gelijkheid van twee driehoeken volgt uit de gelijkheid van drie overeenkomstige elementen (hoeken of zijden), behalve als (*toegestane driehoeksgelijkheid*)
   – het de drie hoeken zijn,
   – als het twee zijden zijn en de niet-ingesloten hoek, en die is niet recht.

Equivalente definities en eigenschappen

7. Equivalente definities en eigenschappen van een *gelijkbenige driehoek:*
   a. Twee zijden van de driehoek zijn gelijk.
   b. Twee hoeken van de driehoek zijn gelijk.
   c. De driehoek heeft een symmetrie-as.
8. Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram*:
   a. Twee paar evenwijdige overstaande zijden.
   b. Twee paar gelijke overstaande zijden.
   c. De diagonalen delen elkaar middendoor.
9. Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit*:
   a. Een parallellogram met vier gelijke zijden.
   b. Een parallellogram, waarvan een diagonaal een hoek middendoor deelt.
   c. Een parallellogram, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan.
10. Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek*:
   a. Een vierhoek met vier rechte hoeken.
   b. Een parallellogram met een rechte hoek.
   c. Een parallellogram met gelijke diagonalen.

[*)] In plaats van '*gelijke driehoeken*' kun je ook de term 'congruente driehoeken' tegenkomen.

.... Overzicht bekende Meetkunde

Lengte en afstand

11a. Eén zijde van een driehoek is altijd kleiner dan de som van beide andere zijden; (*driehoeksongelijkheid*).

11b. Als voor drie punten A, B en C geldt dat $|AB| + |BC| = |AC|$, dan ligt B op het lijnstuk AC; (*omgekeerde van driehoeksongelijkheid)*.

12a. In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de langste zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden; (*de stelling van Pythagoras*).

12b. Is in een driehoek het kwadraat van een zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de andere zijden, dan is die driehoek rechthoekig; (*het omgekeerde van de stelling van Pythagoras*).

13. De afstand, de kortste verbinding, van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn uit dat punt, neergelaten op de lijn; (*afstand tot een lijn*).

Puntverzamelingen

14. De middelloodlijn van het lijnstuk AB is de verzameling van punten die gelijke afstanden tot A en B hebben; (*middelloodlijn*).
    Dat wil zeggen:
    a. De punten van de middelloodlijn liggen evenver van A als van B.
    b. Alle punten, die gelijke afstand hebben tot de eindpunten A en B van lijnstuk AB, liggen op de middelloodlijn van AB.

15. De drie middelloodlijnen van de drie zijden van een driehoek gaan door één punt. Dat punt is het middelpunt van de cirkel die door de drie hoekpunten gaat (*omgeschreven cirkel*).

16. De deellijn*) van een hoek is de verzameling van punten, die gelijke afstand hebben tot de benen van een hoek; (*deellijn*).

17. De cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van punten die de afstand r tot punt M hebben; (*cirkel*).

18. De verzameling van punten, die gelijke afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van die lijnen; (*middenparallel)*.

Lijn- en puntspiegelingen

19. Bij lijnspiegelen blijven onderlinge afstanden en hoeken gelijk; (*lijnspiegelen*).

20. Bij puntspiegelen blijven onderlinge afstanden en hoeken gelijk; (*puntspiegelen*).

Eigenschappen van cirkels

21. De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn van de cirkel*).

22. De loodlijn uit het middelpunt van een cirkel op een koorde van de cirkel, deelt deze koorde middendoor. En omgekeerd, de middelloodlijn van een koorde gaat door het middelpunt van de cirkel (*loodlijn op koorde*).

23. Voor een vierhoek zijn de volgende twee beweringen gelijkwaardig:
    a. De vier punten liggen op een cirkel.
    b. Twee overstaande hoeken zijn samen 180 .

(*stelling van de koordenvierhoek*).

---

*) In plaats van ‘deellijn’ komt ook de term ‘bissectrice’ voor. Meervoud: ‘bissectrices’.

Stellingenlijst uit deel A

Stelling 0 (Bijzondere lijnen in de driehoek)
In elke driehoek
- gaan de *middelloodlijnen* van de drie zijden door één punt; dat is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
- gaan de *deellijnen* van de drie hoeken door één punt; dat is het middelpunt van de ingeschreven cirkel.
- gaan de drie *zwaartelijnen* door één punt; dat punt heet het *zwaartepunt* van de driehoek.
- gaan de drie *hoogtelijnen* door één punt; dat punt heet het *hoogtepunt* van de driehoek.

Stelling 1 (Stelling van Thales)
Als van driehoek ABC hoek B recht is, dan ligt B op de cirkel met middellijn AC.

Stelling 2 (Omkering van de stelling van Thales)
Als AC middellijn van een cirkel is, en B ligt op die cirkel, dan is $\angle ABC$ recht.

Stelling 3 (Stelling van de constante hoek)
Als punt B over een van de cirkelbogen tussen A en C beweegt, verandert de grootte van $\angle ABC$ niet.

Stelling 4 (Omkering van de constante hoek-stelling)
Als punt Q aan dezelfde kant van AC ligt als punt B en $\angle AQC = \angle ABC$, dan ligt Q op de cirkelboog ABC.

Stelling 5 (Stelling van de omtrekshoek)
Als drie (verschillende) punten A, B, C op de cirkel met middelpunt M liggen, dan geldt: de omtrekshoek $\angle ABC$ is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek $\angle AMC$.

Stelling 6 (Hoek tussen raaklijn en koorde)
Gegeven een cirkel met punten A en B erop.
Dan is de hoek tussen de raaklijn in A en de koorde AB gelijk aan de halve middelpuntshoek op boog AB.
Hierbij moet de hoek aan dezelfde kant als de koorde gekozen worden.

Stelling 7 (Stelling van de gelijke bogen)
Bij gelijke bogen op een cirkel horen gelijke omtrekshoeken en andersom.