
Differentiaal- en Integraalrekening

deel 6

trillingspatronen

Foto Freeman



De afbeelding op de kaft komt uit een oud boek 'Fun with Geometry' van M. en I. Freeman (eerste uitgave 1946). Robert, de jongen op de foto, heeft een opstelling gemaakt om Lissajous-figuren (zie hoofdstuk 3) te produceren. Van papier heeft hij een kegel gevouwen, die met touw aan een balk is opgehangen. De kegel is gevuld met zout, en het onderste puntje is er afgeknipt, zodat het zout eruit kan stromen. Door nu dit 'zoutloperkje' een uitwijking en een snelheid te geven, gaat de kegel slingeren, en strooit het zout mooie krommen op het bord eronder.

Differentiaal- en Integraalrekening (deel 6: Trillingspatronen)

Project: Wiskunde voor de tweede fase
Profiel: N&T en N&G
Klas: vwo 6
Staat: Eerste herziene versie
Ontwerp: Paul Drijvers en Martin Kindt

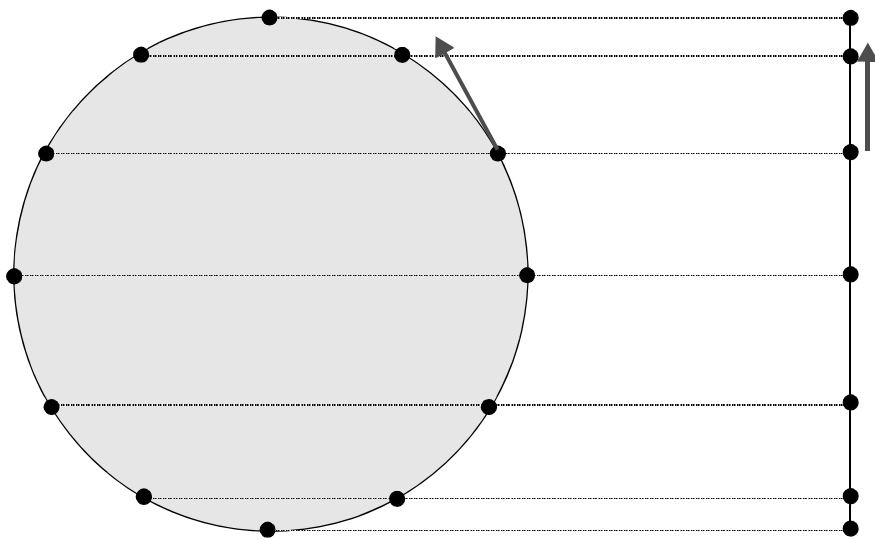
Freudenthal instituut, mei 1998

inhoud

1 Bewegingen en sinusoiden	1
2 Trillingspatronen	5
3 Figuren van Lissajous	33
4 Over de functie tan en over zeer kleine hoeken	19
5 Onderzoeksopdrachten	24
Zelftoets	26
Tips	27
Antwoorden	29

cirkelbeweging

*harmonische
beweging*



1 Bewegingen en sinusoiden

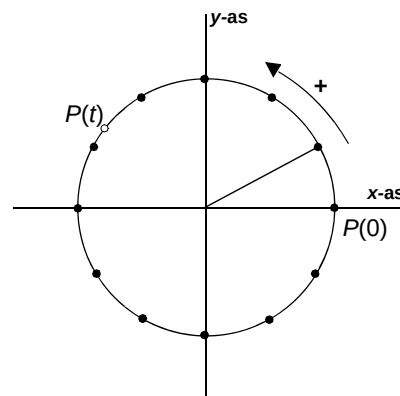
Aan de hand van bewegingen van onder andere een waterrad en een schildwacht heb je in deel 4 ‘Cirkelbewegingen’ kennism gemaakt met de functies sinus en cosinus.

Je hebt gezien hoe je de *snelheid* bij een cirkelbeweging kunt berekenen met behulp van afgeleide functies. Een belangrijke rol was weggelegd voor de begrippen *periode*, *frequentie* en *amplitude*.

We pakken deze draad nu weer op en bekijken de eenparige beweging op de eenheidscirkel.

De positie van een punt P op de eenheidscirkel op tijdstip t (in sec) wordt voorgesteld door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$



- 1 De eenheidscirkel hierboven is verdeeld in 12 gelijke boogjes. Eén van de deelpunten is het punt $(1, 0)$ het startpunt van de beweging.
 - a. Noem van elk van de deelpunten de exacte coördinaten.
Op welke tijdstippen tussen 0 en 2π worden die deelpunten bereikt?
 - b. Voor welke t -waarden heeft $P(t)$ gelijke afstanden tot de x -as en de y -as?
Hoe groot is die afstand?
 - c. Het punt Q doorloopt de eenheidscirkel met dezelfde snelheid als P , maar ligt $\frac{1}{12}$ van de cirkelomtrek voor. Wat zijn de bewegingsformules van Q ?
 - d. Laat de beweging van P op het scherm van de GR tekenen; kies daarbij een vierkant assenstelsel (de cirkel wordt dan redelijk ‘rond’).
 - e. Doe hetzelfde voor de beweging van Q .
 - f. De deelpunten in bovenstaande figuur zijn de hoekpunten van een regelmatige 12-hoek. Hoe kun je het regelen dat de GR juist deze 12-hoek tekent?
- 2 Een periode van 2π is in de wiskunde heel natuurlijk, maar in termen van tijd doet het wat onwennig aan: één rondje in 2π seconden.
 - a. Hoe moet je de bovenstaande bewegingsformules veranderen zó dat het punt precies 1 sec over een rondje doet?
 - b. Hoe groot is de snelheid van het punt nu?
 - c. Hoe veranderen de bewegingsformules als één rondje in 2 sec gaat en de straal van de cirkel gelijk is aan 3?
- 3 Een punt doorloopt met constante snelheid en in positieve richting de eenheidscirkel. De periode is 4π en het startpunt is $(0, 1)$.
 - a. Maak deze beweging op de GR. Welke bewegingsformules gebruik je?
 - b. Maak een tekening van de snelheidsvector met zijn horizontale en verticale component op het tijdstip $t = \frac{1}{3}\pi$.
 - c. Hoe groot zijn die componenten en hoe zijn ze gericht?
 - d. Hoe veranderen de antwoorden van a, b en c als het startpunt $(0, 1)$ is en de draairichting negatief?

ellips in plaats
van cirkel

Als je de cirkelbeweging op de GR tekent en je vergeet op Zsquare in te stellen, krijg je geen cirkel te zien maar een in één richting opgerekte cirkel. Die kromme heeft de vorm van een *ellips*. Je kunt zo'n vorm ook maken als je wél in een vierkant assenstelsel werkt, maar dan moet je de bewegingsformules aanpassen.

Bijvoorbeeld zó:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}$$

- 4 a. Teken deze beweging met de GR in een vierkant assenstelsel.
b. Onderzoek met TRACE de snelheid van deze beweging. Deze is niet zoals bij de eenparige beweging constant!
Toon aan dat de snelheid op het tijdstip t gelijk is aan: $\sqrt{1 + 3\cos^2 t}$.
c. Op welk moment is de snelheid maximaal en op welk moment minimaal?

tip

- 5 a. Uit de bewegingsformules van opgave 4 is een vergelijking van de ellipsvormige baan af te leiden, namelijk: $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.
Toon aan dat dit een vergelijking van die ellips is.
b. Welke vergelijking heeft een ellips die beschreven wordt door $\begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$
c. Dezelfde vraag voor: $\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 10 \sin t \end{cases}$

formules
gebruiken

Op de pagina 4 staat een overzicht van de belangrijkste formules en regels die je in het boekje *Cirkelbewegingen* bent tegengekomen. Bekijk dit overzicht.
Bij de volgende opgaven zal je die regels kunnen gebruiken.

- 6 Gegeven zijn de bewegingsformules:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \sin t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}$$

- a. Teken op de GR de baan van het punt op het tijdsinterval $[0, 2\pi]$. Wat zijn de coördinaten van het startpunt van de beweging?
b. De baan lijkt een cirkel te zijn. Bewijs dat dit inderdaad het geval is.

tip

- 7 Gegeven de bewegingsformules:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \cos t \\ y(t) = \cos^2 t - \sin^2 t \end{cases}$$

- a. Teken de krommen op de GR in een vierkant assenstelsel.
b. Het lijkt op een ellips. Gebruik de verdubbelingsformules (zie bladzij 4) om dit te verklaren.

sinusoïde,
cirkel, ellips

Bij een eenparige cirkelbeweging kun je ook de grafieken van x en y als functie van t beschouwen. Die beide grafieken zijn dan sinusoiden met dezelfde periode en dezelfde amplitude. Bovendien verschillen ze een kwart-periode in *fase*.
In het geval dat die sinusoiden verschillen in amplitude, maar wél dezelfde periode hebben en precies een kwart-periode in fase verschillen, beschrijft het bewegende punt geen cirkel maar een ellips.

8 Bekijk de functies die de cirkelbeweging van opgave 6 bepalen.

Op de GR kun je via de formules $y_1 = \cos x + \sin x$ en $y_2 = \cos x - \sin x$ de grafieken hiervan tekenen. Het lijken sinusoiden te zijn met dezelfde amplitude, met periode 2π en met een fase-verschil van een kwart-periode ($= \frac{1}{2}\pi$).

Kortom het lijkt erop dat: $y_1 = r \sin(x + j)$ en $y_2 = r \cos(x + j)$

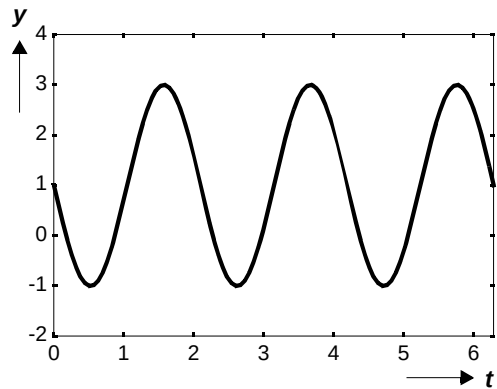
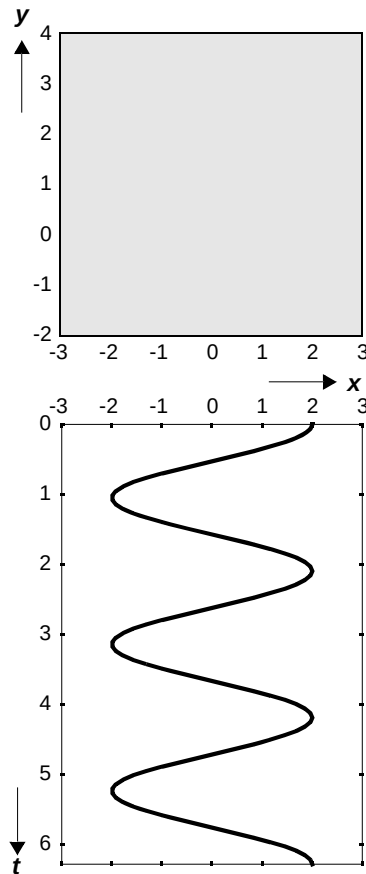
- Welke waarden zouden r en j volgens opgave 6 moeten hebben? Klopt dat ook met wat je op de GR ziet?
- Vul deze waarden in en gebruik de somformules van pagina 4 om aan te tonen dat de schijn hier niet bedriegt.

9 Nu de functies bij opgave 7.

- Teken de grafieken op de GR.
- Hoe kun je zeker weten dat het sinusoiden zijn?
- Welke periode en welke amplitude hebben die sinusoiden?

10 Hieronder zie je grafieken van x en y als functies van t op het t -interval $[0, 2\pi]$.

- Geef een formule voor beide functies.
- Deze functies bepalen een cirkelbeweging in het Oxy -vlak.
Wat zijn de coördinaten van het middelpunt en hoe groot is de straal van de cirkel?



Overzicht van gonio-formules uit deel 4

kwadraten-
formule

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

transformaties

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t$$

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t$$

$$\sin(t + \frac{1}{2}\pi) = \cos t$$

$$\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = -\sin t$$

$$\sin(t + \pi) = -\sin t$$

$$\cos(t + \pi) = -\cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

vergelijkingen

met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\sin t = \sin u$$

$$\cos t = \cos u$$

$$t = u + k \cdot 2\pi \quad \text{óf} \quad t + u = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = u + k \cdot 2\pi \quad \text{óf} \quad t + u = k \cdot 2\pi$$

somformules

$$\cos(t + u) = \cos u \cos t - \sin u \sin t$$

$$\sin(t + u) = \cos u \sin t + \sin u \cos t$$

$$\cos(t - u) = \cos u \cos t + \sin u \sin t$$

$$\sin(t - u) = \cos u \sin t - \sin u \cos t$$

verdubbelings
formules

$$\sin(2t) = 2 \cos t \sin t$$

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1$$

$$\cos(2t) = 1 - 2 \sin^2 t$$

afgeleide van
sin en cos

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

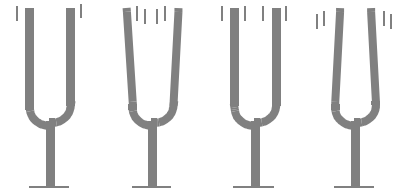
$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$$

snelheid van
beweging:
 $x = x(t), y = y(t)$

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

2 Trillingspatronen

Als een stemvork wordt aangeslagen, maken de benen van de vork een heen-en-weergaande beweging. Hoe groter de uitwijking van de benen, hoe meer de vork wordt vervormd. Door de veerkracht van het staal wordt de vervorming tegengegaan. De veerkracht wordt groter



naarmate de uitwijking groter is en daardoor remt de beweging steeds sterker af. De snelheid neemt af tot nul in de uiterste stand en daarna zorgt de veerkracht voor een steeds snellere beweging naar de evenwichtsstand. Door de vaart die de benen dan hebben, schieten ze door de evenwichtsstand heen en worden ze vervolgens weer afgeremd door de veerkracht. Enzovoort. Zo ontstaat een *trilling* die als de stemvork niet steeds opnieuw wordt aangeslagen na verloop van tijd uitdooft.

Je kunt bij de beweging van een stemvorkbeen een *trillingspatroon* zichtbaar maken via het volgende experiment. Bevestig een fijne stift aan één van de stemvorkbenen en beweeg de stemvork met constante snelheid over een carbonpapiertje of een beroete glasplaat. Er ontstaat dan een kromme die in het begin vrijwel een sinusoïde is.

- 1 a. Hoe verandert de sinusoïde als de stemvork harder wordt aangeslagen?
- b. Een dunnere stemvork veroorzaakt een hogere toon. Hoe zal dat zichtbaar worden in het trillingspatroon?

harmonische
trilling

Wiskundig gezien is de harmonische trilling de loodrechte projectie van een eenparige cirkelbeweging op een middellijn. Als je het makkelijk vindt, kun je daarbij denken aan de schaduw van de schildwacht (zie deel 4). De tijd-plaats-functie van een harmonische trilling kan worden geschreven in de vorm:

$$y(t) = a \sin_w(t + j) + c$$

Hierin stelt a een positieve constante voor die de *amplitude* wordt genoemd. De amplitude geeft de maximale uitwijking ten opzichte van de *evenwichtsstand* c . Bij een geluidstrilling is de amplitude een maat voor de geluidssterkte.

periode,
trillingstijd,
frequentie

De constante w staat voor de hoeksnelheid van de cirkelbeweging waarmee de harmonische trilling correspondeert en hangt ten nauwste samen met de *periode*. Er geldt:

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{w}$$

In plaats van ‘periode’ spreekt men in de natuurkunde meestal van *trillingstijd*. In dit boekje gebruiken we verder de term periode.

Voor een geluidstrilling geldt: hoe korter de periode, hoe hoger de toon.

Of: hoe hoger de *frequentie* (= aantal trillingen per tijdseenheid), hoe hoger de toon.

Frequentie en periode zijn precies elkaars omgekeerde.

2 In de formule:

$$y(t) = a \sin w(t + j) + c$$

komt nog een vierde constante voor, namelijk j (spreek uit ϕ).

Wat gebeurt er met het trillingspatroon als de waarde van j verandert?

Opmerking: de verhouding tussen j en de periode wordt de *fase* genoemd.

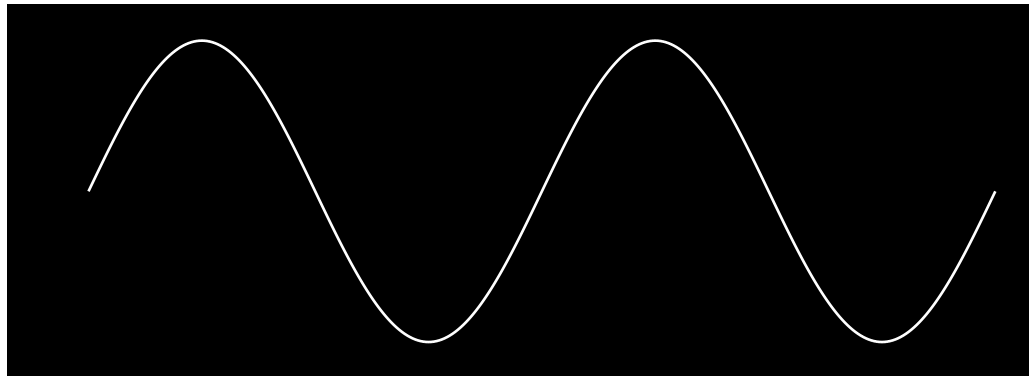
3 Een harmonische trilling wordt beschreven door de formule:

$$y(t) = 4 \sin(0,4\pi t)$$

a. Hoe groot zijn de amplitude, de periode en de frequentie?

b. Een tweede trilling heeft dezelfde amplitude en dezelfde frequentie, maar passeert de evenwichtsstand 0 steeds 1 tijdseenheid later. Door welke formule wordt die trilling beschreven?

4 Hiermee zie je in één figuur twee patronen van harmonische trillingen.



I heeft een 2 keer zo grote amplitude als II.

II heeft een 2 keer zo grote frequentie als I (ofwel een 2 keer zo kleine periode).

a. Geef formules bij beide patronen (noem de tijd t en de uitwijking y).

b. Als je de beide trillingen tegelijkertijd waarneemt, wordt het patroon van de resulterende trilling gevonden door de beide grafieken 'op te tellen' (men spreekt ook van 'superponeren'). Maak met de GR de resultante van de beide trillingen.

tip

c. Je ziet dat de resultante gedurende één trilling drie rustpunten (snelheid = 0) heeft.

Toon aan dat deze rustpunten zich voordoen voor $t = p, 2p, 3p, \text{enz.}$

d. De resultante is niet harmonisch. Toch kun je ook hier wel spreken van een amplitude. Toon aan dat die gelijk is aan $\dots$.

5 Bekijk de trillingen I en II van opgave 2.

Halveer de amplitude van I en bekijk de resultante van II en de nieuwe I op de GR.

tip

a. Bewijs dat de resultante ook beschreven kan worden met de formule:

tip

b. Bereken hieruit de momenten in het interval $[0, 2p]$, waarop de evenwichtsstand wordt gepasseerd.

6 Ontwerp zelf een mooi trillingspatroon.

Maak een tekening van tenminste één periode.

Zijn er bijzonderheden die je uit de formule kunt afleiden?

$$\frac{1}{3} \qquad 1\frac{2}{3}$$

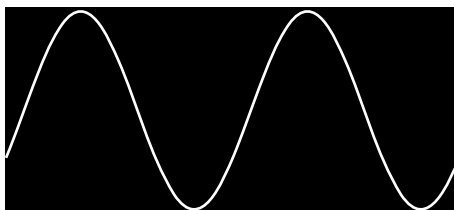
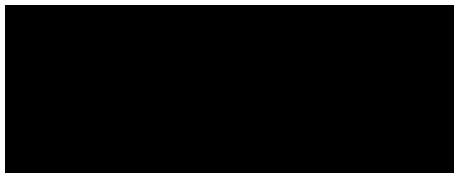
$$1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$y\left(t \right) = \sin t\left(1 + 2\cos t \right)$$

-
- 7 Twee stemvorken worden in trilling gebracht, zodanig dat de trillingen dezelfde frequentie en amplitude hebben, maar verschillen in *fase*.

Bijvoorbeeld: trilling I: $y_1 = \sin t$; trilling II: $y_2 = \sin(t - 1)$; het faseverschil tussen I en II is $1/2\pi$.

Hieronder zie je de trillingspatronen van I, II en van de resultante I + II, zoals die bijvoorbeeld op een zogenaamde *oscilloscoop* kunnen worden waargenomen.



tip

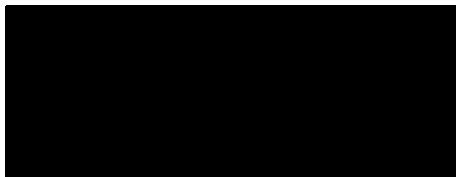
- a. In welke tijdsintervallen tussen 0 en 2π versterken I en II elkaar?
- b. Het trillingspatroon I + II lijkt weer harmonisch te zijn. Dat kan worden bewezen, maar maak voor je dat gaat doen, eerst een voorspelling. Maak de drie trillingspatronen op de GR; schat het faseverschil tussen de resultante en de beide grondpatronen; schat ook de amplitude van de resultante.

In de volgende opgaven ga je bewijzen dat de resultante een harmonische trilling is. Daarbij zal je een beetje meetkunde gebruiken. Het grondprincipe is de cirkelbeweging die immers de wiskundige basis is voor kennis over de harmonische beweging. We nemen daarvoor nu twee bewegingen (van de punten *P* en *Q*) onder de loep:

Het combineren van de twee bewegingen geschiedt door optelling van de *x*- en van de *y*-formules. Dat resulteert in de beweging van een punt *R*.

- 8 a. Maak de beweging van *R* op de GR (voer in: $X_{3T} = X_{1T} + X_{2T}$, $Y_{3T} = Y_{1T} + Y_{2T}$).
- b. Verklaar op meetkundig wijze waarom *R* ook over een cirkel beweegt en dezelfde hoeksnelheid heeft als *P* en *Q*.

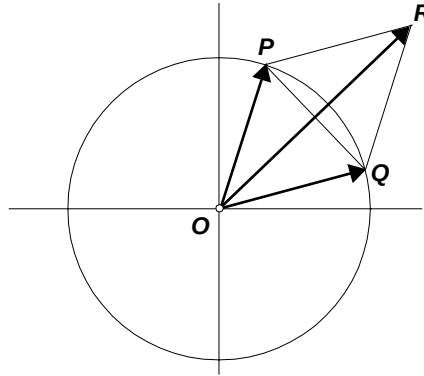
tip



$$\text{Bewegung } P: \begin{cases} x_1(t) = \cos t \\ y_1(t) = \sin t \end{cases}$$

$$\text{Bewegung } Q: \begin{cases} x_2(t) = \cos(t-1) \\ y_2(t) = \sin(t-1) \end{cases}$$

9 In de figuur geldt: $P = (\cos t, \sin t)$ en $Q = (\cos(t - 1), \sin(t - 1))$.



a. Hoe groot is de hoek tussen de vectoren $\vec{OP}$ en $\vec{OQ}$ (in radialen)?

b. $\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$. Wat voor een speciale vierhoek is $OPRQ$?

c. Stel de lengte van $\vec{OR}$ is gelijk aan r . Toon aan: $r = 2\cos \frac{1}{2}$.

tip

d. Bewijs, via de verticale componenten van $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ en $\vec{OR}$, dat geldt:

$$\sin t + \sin(t - 1) = 2\cos \frac{1}{2} \sin(t - \frac{1}{2})$$

e. Controleer of deze formule in overeenstemming is met je antwoord bij 7b.

f. Maak een soortgelijke formule voor $\cos t + \cos(t - 1)$.

De formule van 9d geeft een bewijs dat de resultante van de slechts in fase verschillende harmonische trillingen $y_1(t) = \sin t$ en $y_2(t) = \sin(t - 1)$ zelf ook harmonisch is.

De formule die hierbij optreedt, is van een type dat in de trillingsleer nogal eens wordt benut. Kijk eerst even terug naar de somformules van hoofdstuk 4. Die gaan over de sinus (of cosinus) van de som van twee getallen. Je hebt toen gezien dat het leven soms minder mooi is, dan je zou wensen. Er geldt immers **niet**: $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$. Waaraan $\sin(a + b)$ dan wél gelijk is, staat in hoofdstuk 4.

formules van
Simpson

Er bestaat ook een formule voor $\sin a + \sin b$.

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a - b) \sin \frac{1}{2}(a + b)$$

En natuurlijk is er ook een 'compagnon'-formule:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}(a + b)$$

10 De formule bij 9d is een speciaal geval van de eerste formule van Simpson; ga dit na. Opmerking: het bewijs van de formules van Simpson gaat net zo als de afleiding in 9.

11 Formules kun je vaak testen op bijzondere gevallen.

a. Een bijzonder geval voor de formules van Simpson is: $a = b$. Wat krijg je dan?

tip

b. Dezelfde vraag voor het geval $b = 0$.

12 Het zal je niet verbazen dat er nog twee formules van Simpson bestaan:

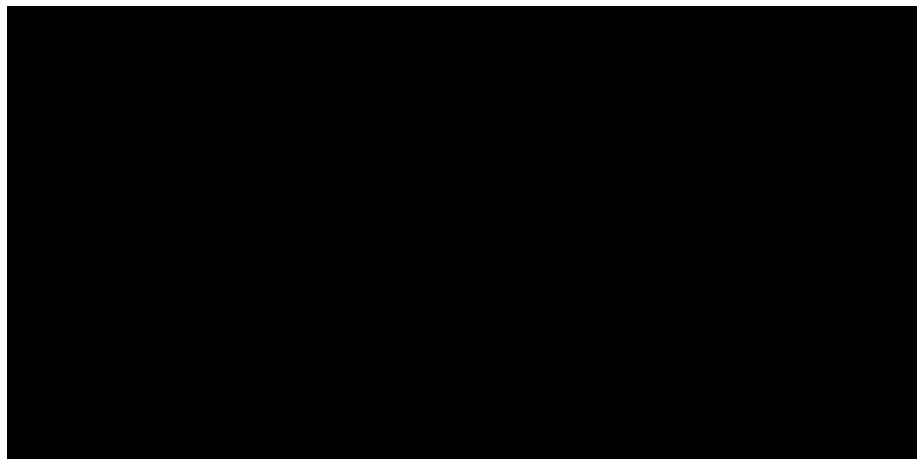
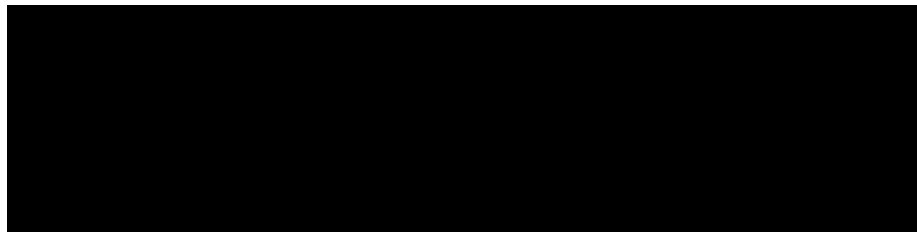
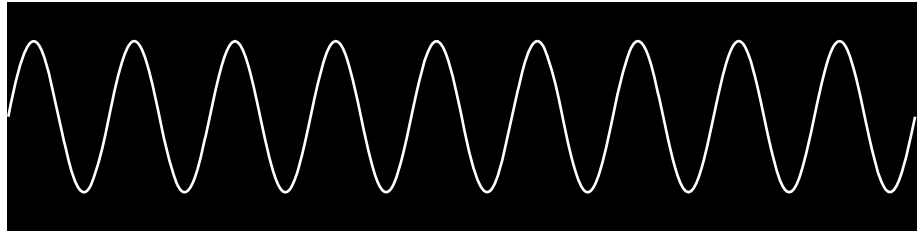
$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

tip

Deze twee volgen uit de eerste twee. Hoe?

-
- 13 Gegeven zijn de trillingen I: $u = \sin 9t$ en II: $u = \sin 10t$. (t in sec.)
De resultante (I + II) is duidelijk niet harmonisch.



- Hoe groot is het verschil in frequentie van I en II?
- Hoe groot is de periode van de resultante?
- Gebruik een formule van Simpson om $\sin 10t + \sin 9t$ te herleiden.

zweving

Het trillingspatroon van I + II kenmerkt zich door een variabele amplitude. Voor het geluid betekent dit een afwisselende versterking en verzwakking. Dit verschijnsel wordt *zweving* genoemd.

I

0

$\frac{1}{2}p$

p

$1\frac{1}{2}p$

2p

II

0

$\frac{1}{2}p$

p

$1\frac{1}{2}p$

2p

I + II

0

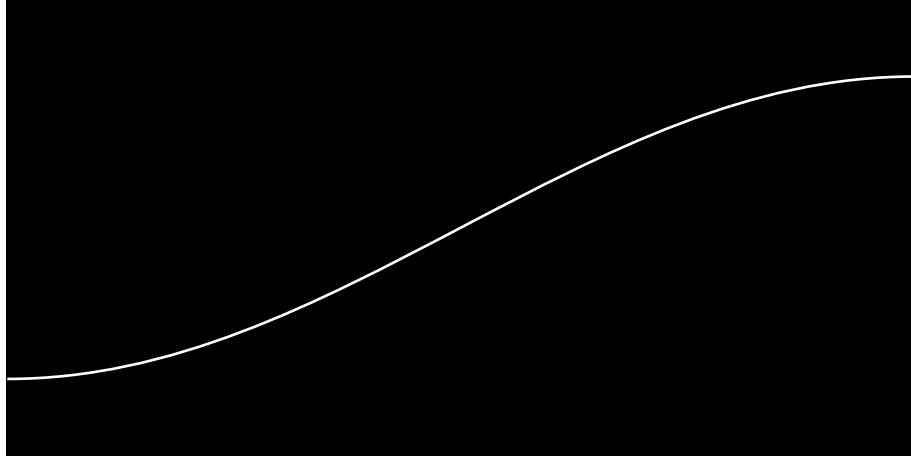
$\frac{1}{2}p$

p

$1\frac{1}{2}p$

2p

-
- d. Het lijkt er in onderstaande figuur op dat het trillingspatroon $I + II$ ingeklemd zit tussen twee sinusoiden.
Welke formules horen bij deze sinusoiden?



- 14 a.** Bekijk op de GR de trillingsgrafiek bij $y(t) = \sin t + \sin 3t$.
b. Maak een andere formule voor y met behulp van een formule van Simpson.
c. Toon aan dat de trillingsgrafiek raakt aan de t -as.
- 15** Gegeven het trillingspatroon $y(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 3t$.
tip **a.** Toon aan: $y(t) = \sin 2t(2\cos t + 1)$
tip **b.** Op welke tijdstippen, gelegen in het interval $[0, 2\pi]$, wordt de evenwichtsstand gepasseerd?
- 16** Gegeven het trillingspatroon: $y(t) = e^{-at}\sin bt$
a. Maak dit patroon zichtbaar voor $a = 0.2$ en $b = 5$. Waarom wordt dit een gedempte trilling genoemd?
b. Neem $a = 1$ en $b = 1$. De beweging bereikt regelmatig een rustpunt. Op welke momenten gebeurt dat?
- 17** Bekijk de serie trillingspatronen op bladzijde 11.
Hoe ziet het volgende patroon eruit?
Met welke formules kun je die patronen maken?
- extra opgave** **18** Er is een verband tussen de som- en verschilformules zoals die in het overzicht van hoofdstuk 1 zijn te vinden en de formules van Simpson.
tip Tel de eerste en de derde formule van Simpson op en er ontstaat een formule die je rechtstreeks uit één van de som- en verschilformules kunt afleiden.
Laat dit zien.

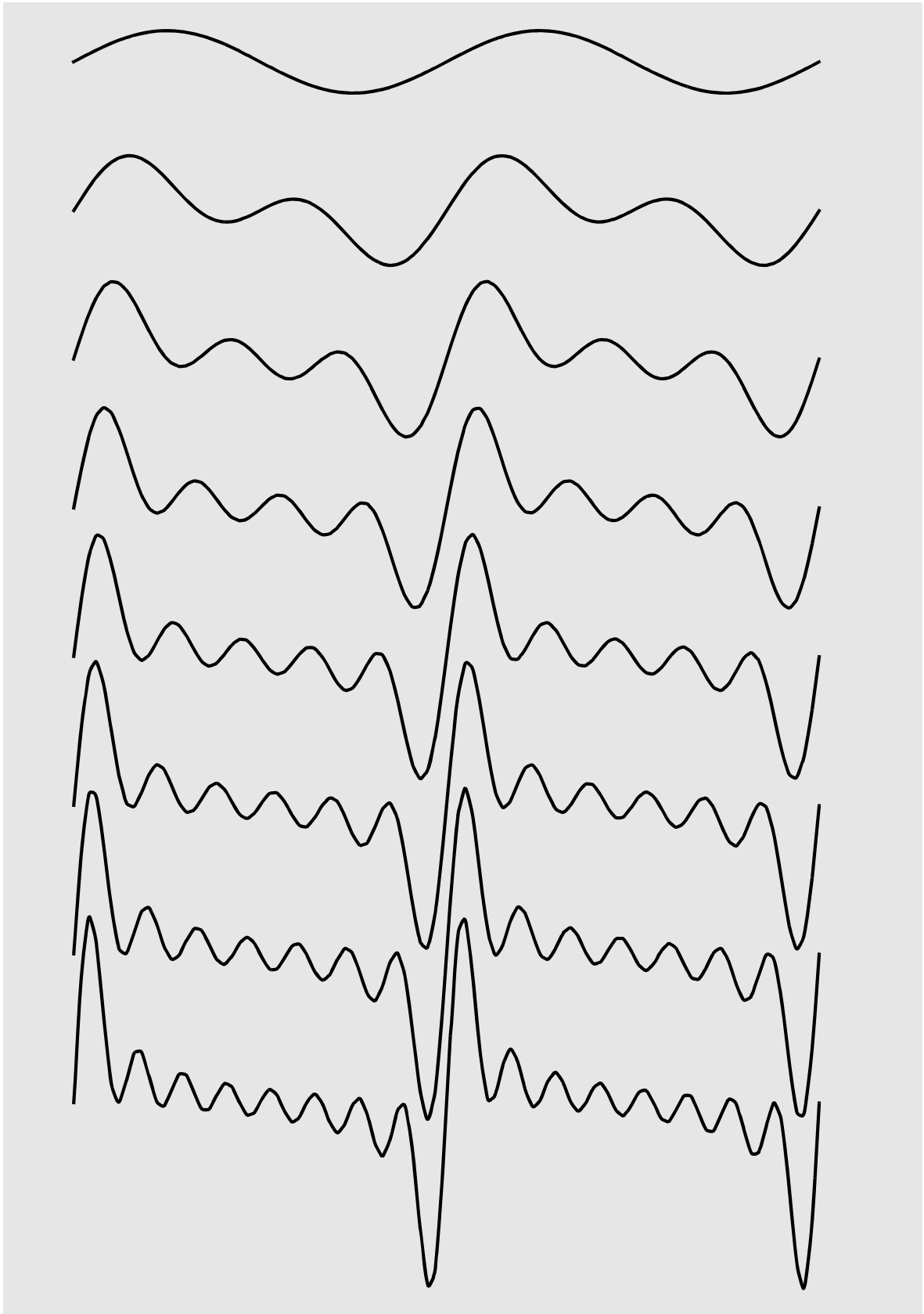
0

$\frac{1}{2}p$

p

$1\frac{1}{2}p$

2p



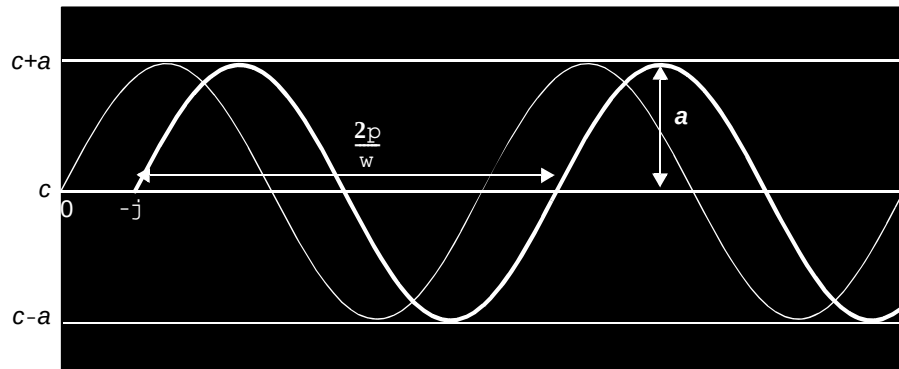
Samenvatting

harmonische beweging

Een harmonische beweging langs een rechte lijn wordt beschreven door een formule van de vorm:

$$y(t) = a \sin_w(t + j) + c$$

Hierbij wordt verondersteld: $a > 0$.



De grafiek van y als functie van t is een sinusöide met:

a = amplitude

c = evenwichtsstand

$$\frac{2p}{w} = \text{periode} = \frac{1}{\text{frequentie}}$$

j = fase · periode

formules van Simpson

Bij het optellen van twee harmonische trillingen die alleen in fase verschillen, kun je de resultante beschrijven via een van de formules van Simpson:

$$\sin a + \sin b = 2 \cos \left(\frac{1}{2}(a - b) \right) \sin \frac{1}{2}(a + b)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{1}{2}(a - b) \right) \cos \frac{1}{2}(a + b)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{1}{2}(a + b) \right) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

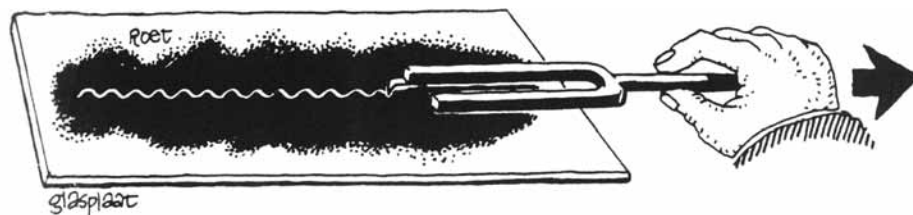
$$\cos a - \cos b = -2 \sin \left(\frac{1}{2}(a + b) \right) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

3 Figuren van Lissajous

In het vorige hoofdstuk heb je gezien hoe trillingen die in dezelfde richting werken, kunnen worden gecombineerd (men spreekt ook wel van *superponeren*). Als twee trillingen die in onderling loodrechte richtingen werken, worden gecombineerd, ontstaat als resultante soms een interessant patroon. Men spreekt van een *figuur van Lissajous*, naar de Fransman Lissajous die zulke patronen rond 1850 bestudeerde bij zijn onderzoek naar geluidsgolven.

Voordat we de figuren van Lissajous wiskundig gaan onderzoeken, kun je eerst proberen via een experiment zo'n figuur te realiseren.

- 1 De eerste mogelijkheid is met twee spiegeltjes door middel van elastiekjes een trillende beweging kunnen uitvoeren (zie onderstaande figuur).

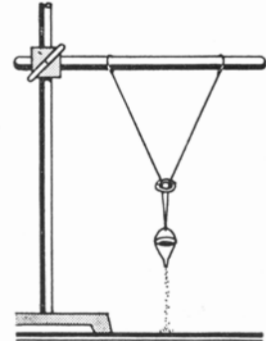


Een lichtstraal wordt via het ene spiegeltje op het andere gekaatsd en daarna op de muur. Als de spiegeltjes een verende beweging maken (met verschillende frequenties) in onderling loodrechte richtingen, beschrijft de lichtstraal op de muur een mooie figuur.

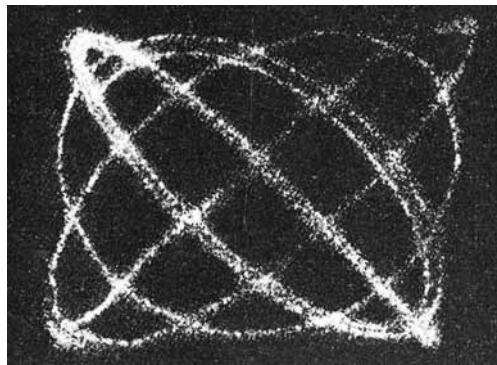
- 2 Je kunt een figuur van Lissajous ook maken met een zandstrooier (zoals op de voorplaat van dit boekje wordt gesuggereerd).

Neem een busje waarin een klein gaatje is gemaakt (of bijvoorbeeld een pepervaatje) en hang dit op aan twee touwtjes zoals in de figuur is aangegeven.

Geef nu de bus een duwtje in schuine richting en een Lissajous-figuur wordt met zand beschreven...

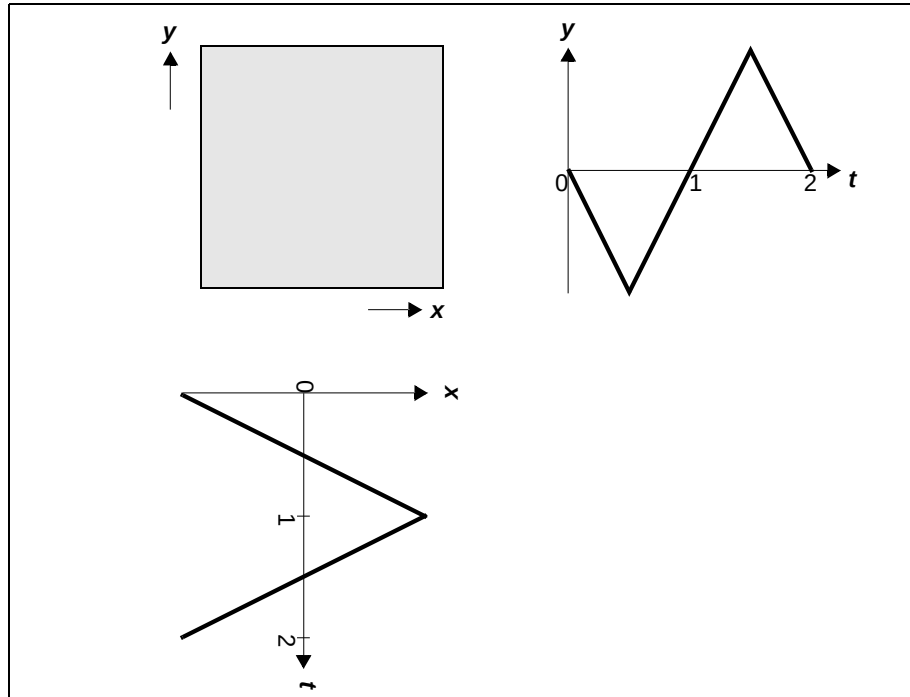


Een mogelijke zandfiguur zie je hieronder:

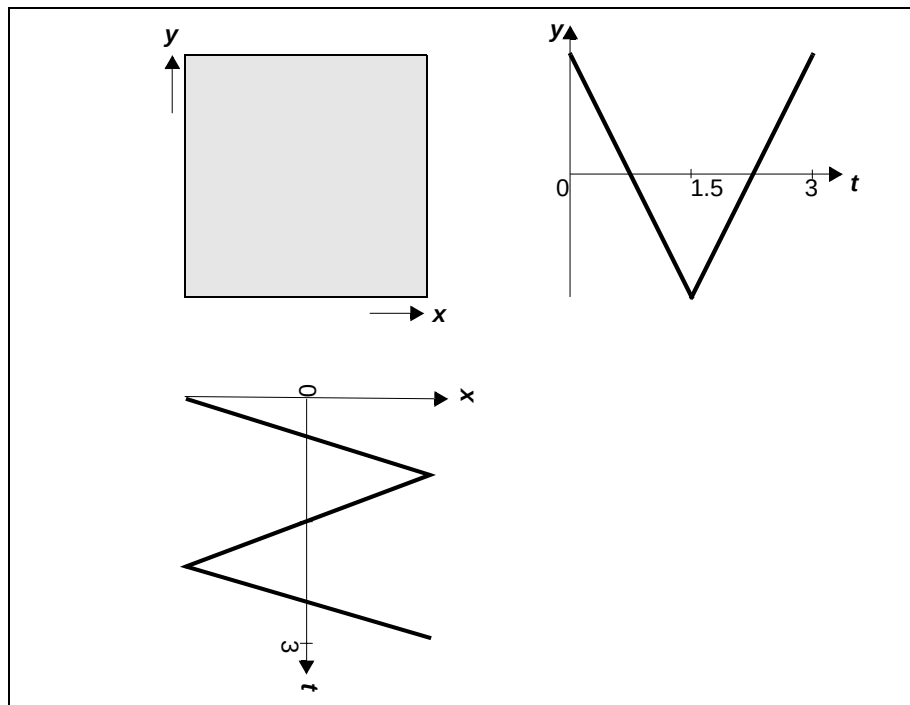


We gaan nu een wiskundige verkenning doen naar enige bijzonderheden van de Lissajous-figures. Vooraf bekijken we eerst een paar voorbeelden van ‘hoekige’ trillingen.

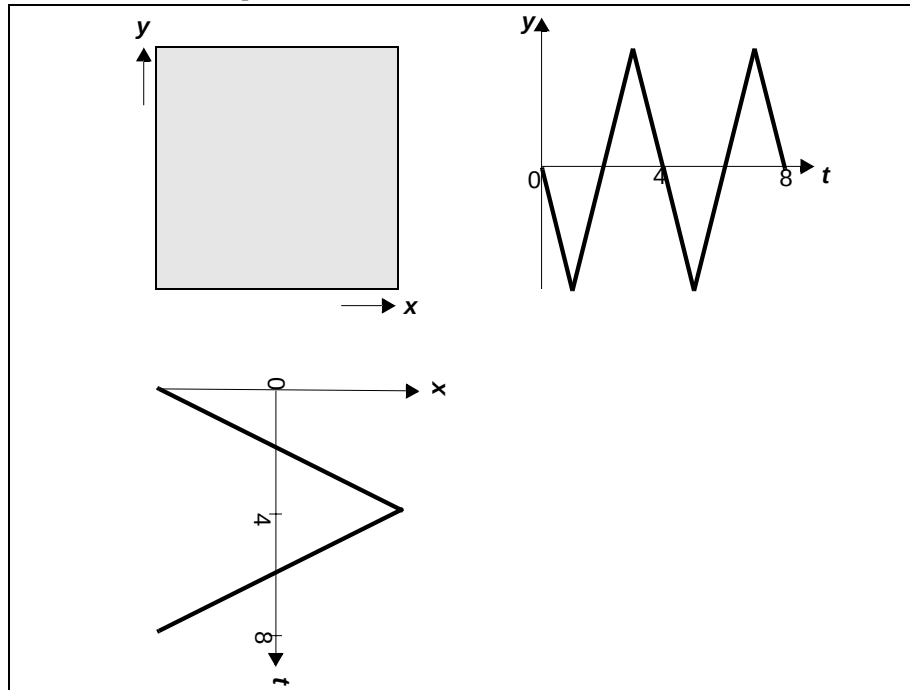
- 3 a. Hieronder zie je een vierkant met zijde 2, waarin zich een punt beweegt. De horizontale positie van het punt op tijdstip t kun je aflezen uit de grafiek onder het vierkant, en de verticale uit de grafiek rechts ervan. Teken de baan van het punt in het vierkant.



- b. Dezelfde opdracht voor:



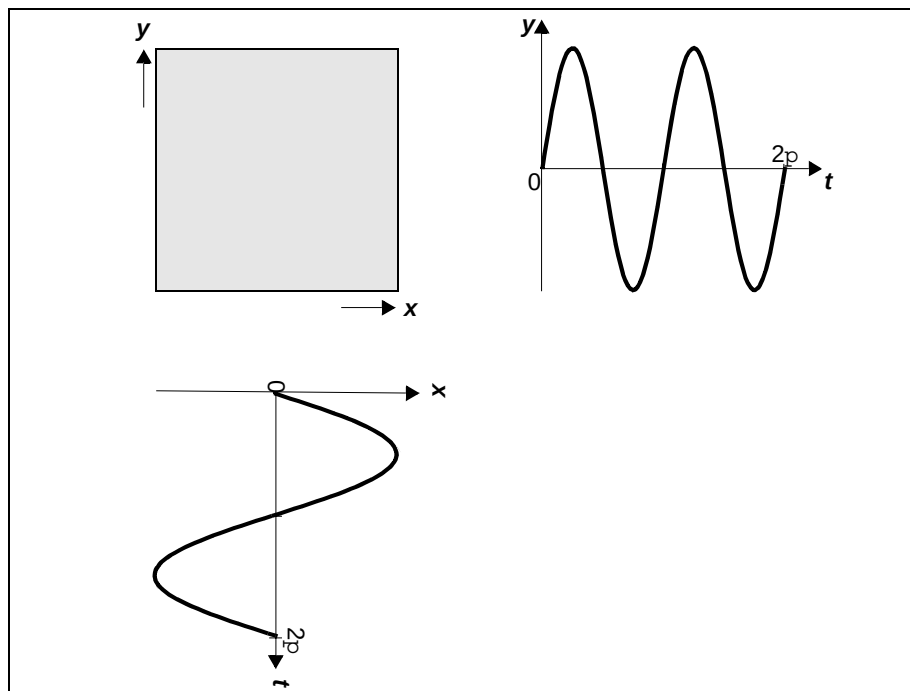
- 4 In het vierkant hieronder heeft de beweging in de verticale richting een frequentie die twee keer zo groot is als die in de horizontale richting. Maak weer een schets van de kromme die door het punt in het vierkant wordt beschreven.



krommen van
Lissajous

In de twee voorgaande opgaven is sprake van – nogal hoekig verlopende – trillingen in zowel horizontale als verticale richting. Je hebt gezien dat bij een verschil in frequentie, al een aardige figuur ontstaat. In het vervolg werken we met meer natuurlijke, vloeiend verlopende trillingen met als trillingspatroon een sinusoïde.

- 5 a. Schets de kromme van Lissajous bij de gegeven trillingen hieronder.
b. Controleer je plaatje met de GR (daarvoor heb je geschikte formules nodig.)



- 6 In opgave 5 is de frequentie in de y -richting 2 keer zo groot is als die in de x -richting. Als formules kun je nemen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

- Zet de GR op puntsgewijs tekenen (MODE DOT) om een indruk van de snelheid van de beweging te krijgen.
- Bereken de snelheidsvector op tijdstip t . Met welke snelheid vertrekt het punt vanuit de oorsprong?
- Hoe kun je zien dat de bij **b** gevonden snelheid tevens de maximale snelheid is?

- 7 Veronderstel dat de beweging in de y -richting een frequentie heeft die 3 keer zo groot is als die in de x -richting.

- Bedenk geschikte bewegingsformules.
- Teken de bijbehorende Lissajous-figuur.
- Als je de baan van het punt op de GR volgt, dan zie je dat er twee ‘keerpunten’ zijn. Hoe groot is de snelheid in die ‘keerpunten’?

tip

- 8 We gaan nog even nader in op de bewegingsformules:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

De vraag is of de baan van het punt een eenvoudige vergelijking (in x en y) heeft.

- Schrijf $\sin(3t)$ als $\sin(2t+t)$ en werk dit uit.
- Gebruik de formules voor $\sin(2t)$ en $\cos(2t)$ en ga na:

$$y(t) = -4\sin^3(t) + 3\sin t.$$

- Welke vergelijking (in x en y) heeft dus de kromme?
- Hoe kun je het antwoord controleren met de grafische rekenmachine?

- 9 Vervang in de bewegingsformules van opgave 8 de beide sinussen door cosinus. Op de GR lijkt de baan nu precies het spiegelbeeld (ten opzichte van de x -as) te zijn van de kromme uit opgave 8. Je kunt dat bewijzen door de x,y -vergelijking te maken. Probeer maar.

- 10 Stel nu dat de beweging in de y -richting $1\frac{1}{2}$ keer zo snel gaat als die in de x -richting. Bedenk geschikte bewegingsformules en teken de kromme.

- 11 Gegeven zijn de bewegingsformules:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(5t) \end{cases}$$

- Teken de bijbehorende Lissajous-figuur.
- Welke periode heeft de beweging?
- Vervang beide sinussen door cosinus en teken de nieuwe Lissajous-figuur op de GR. In tegenstelling tot de figuur van **a**. is deze kromme niet gesloten. Hoe is dat te verklaren?

extra

- 12 Onderzoek voor verschillende gehele waarden van a en b de periode van de beweging die gegeven is door:

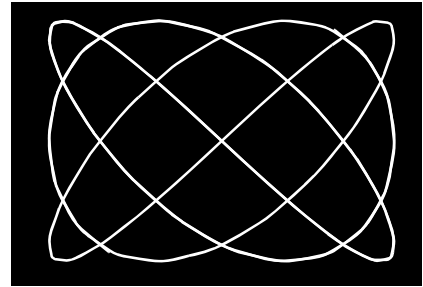
$$x(t) = \sin(at)$$

$$y(t) = \sin(bt)$$

Hoe kun je in het algemeen de periode van deze beweging vinden?

tip

13 De Lissajous-figuur hiernaast lijkt als twee druppels water op de zandfiguur onderaan pagina 13. Probeer deze figuur nu zelf op de GR te maken.



faseverschil

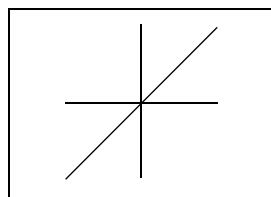
Interessante Lissajous-figuren ontstaan dus doordat er een frequentieverschil is tussen de beweging in de x -richting en die in de y -richting. Variaties krijg je door één van de bewegingen als het ware te laten ‘achterlopen’, zoals gebeurt in de volgende opgave. Meer hierover in de onderzoeksopdracht ‘Lissajous-figuren’ in hoofdstuk 5.

14 Veronderstel nu dat de beweging in de y -richting 0.3 seconden achterloopt op die in de x -richting. De bewegingsformules worden dan:

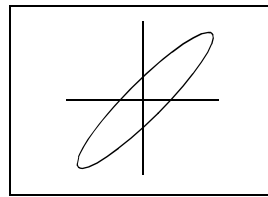
$$x(t) = \sin t$$

$$y(t) = \sin(t - 0.3)$$

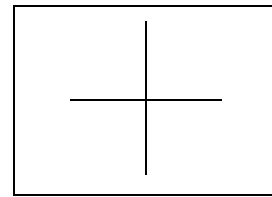
- Welke vorm krijgt dan de baan van het punt?
- Laat de achterstand in de y -richting, zeg a , verder toenemen met stapjes van 0.3. Maak het ‘stripverhaal’, dat hieronder begint, verder af.



$a = 0$



$a = 0.3$



$a = 0.6$

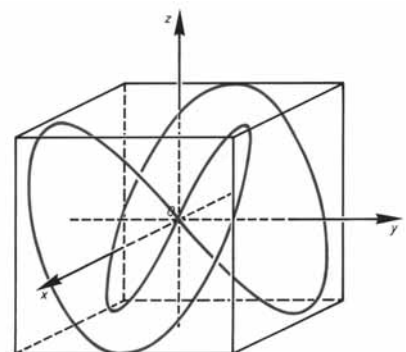
Lissajous in de ruimte

15 In een rechthoekig 3-dimensionaal assenstelsel ($Oxyz$) wordt de beweging van een punt in de ruimte gegeven door:

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \\ z = \sin 3t \end{cases}$$

Hiernaast zie je een tekening van de baan die hierbij hoort.

- Probeer je voor te stellen hoe de zij-aanzichten in de drie asrichtingen eruit zien. Controleer je vermoeden op de GR.
- Bereken de snelheid van het punt op het tijdstip $t = 0$.



tip

- Het punt treft bij één complete rondgang 10 keer het buitenoppervlak van de kubus. Bereken de coördinaten van die trefpunten.

Samenvatting

Een Lissajous-figuur is een trillingspatroon dat ontstaat als resultante van twee harmonische trillingen die in onderling loodrechte richtingen werken.

Als de beide trillingen dezelfde amplitude hebben, kan zo'n patroon wiskundig worden beschreven door:

$$\begin{cases} x(t) = \sin m(t + a) \\ y(t) = \sin n(t + b) \end{cases}$$

Hierbij beschouwen we m, n geheel en positief.

De baan van het bewegende punt past precies in het vierkant gebied dat kan worden beschreven door: $-1 \leq x \leq 1$ en $-1 \leq y \leq 1$.

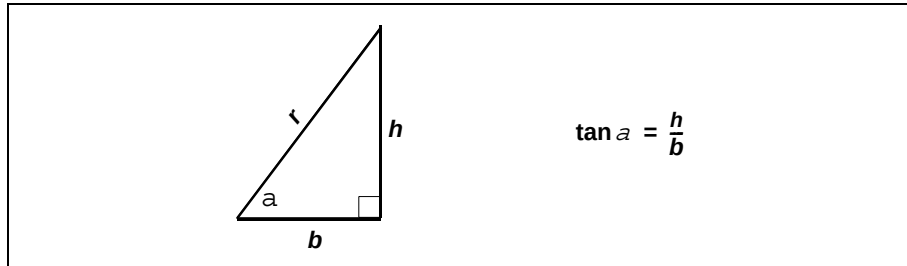
Opmerking:

als de beide trillingen verschillen in amplitude, ontstaat er een in één richting opgerekte Lissajous-figuur.

4 Over de functie tan en over zeer kleine hoeken

tangens

Naast de functies sinus en cosinus is er nog een derde goniometrische standaardfunctie, de zogeheten *tangens* (= tan). Net als sin en cos ben je tan het eerst tegengekomen in een rechthoekige driehoek. Neem zo'n driehoek met basis b , hoogte h en schuine zijde r . Dan geldt:



- 1 Bewijs dat uit de definities van sin, cos en tan in een rechthoekige driehoek volgt:

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

- 2 sin t en cos t zijn alle reële waarden van t gedefinieerd met behulp van een cirkelbeweging. De functie tangens kan nu (overeenkomstig bovenstaande formule) uit de functies sin en cos worden gedefinieerd, dat wil zeggen als: $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$.

tip

- a. Voor welke waarden van t is tan t niet gedefinieerd?

tip

- b. Leg uit waarom de grafiek van $y = \tan t$ verticale asymptoten moet hebben.

- c. Bekijk op de GR (venster $[0, 2\pi]$ bij $[-8, 8]$) de grafiek van $y = \tan t$. Het lijkt erop of de GR verticale asymptoten tekent. Wat er in feite gebeurt is dat bij een stap van een punt (net vóór een asymptoot) naar een volgend punt (net voorbij die asymptoot) een nagenoeg verticale verbindingslijn wordt getekend.

- d. De functie tan is periodiek. Hoe groot is de periode?

afgeleide van tan

- 3 a. Laat zien hoe uit de definitie in opgave 2 volgt:

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

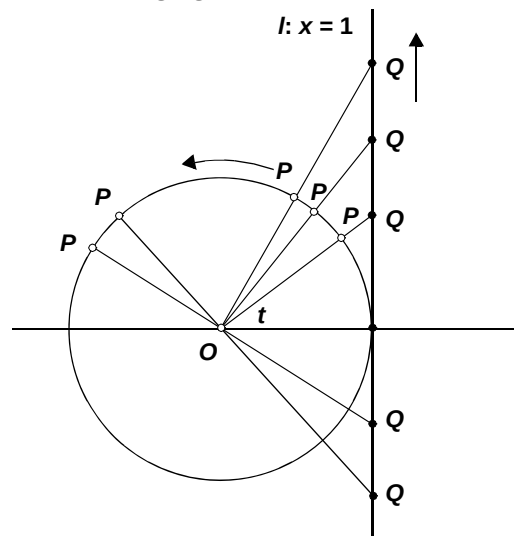
- b. Laat ook zien dat:

$$\frac{d}{dt} \tan t = 1 + \tan^2 t$$

- c. In welke punten van de grafiek van de tangensfunctie is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn minimaal?
- d. Geef een lineaire benadering van tan t in de buurt van $t = 0$.
- 4 a. Druk de afgeleide van de functie $y(x) = \tan x - x$ uit in tan x .
- b. Bekijk met de GR op het venster $[0, 4\pi]$ bij $[-12, 4]$ de grafiek van y .
- c. De buigpunten van die grafiek liggen op één rechte lijn. Welke lijn is dat?

**tangens als
beweging**

Er bestaat ook een manier om de tangensfunctie meer dynamisch in te voeren, namelijk via de projectie van een cirkelbeweging.



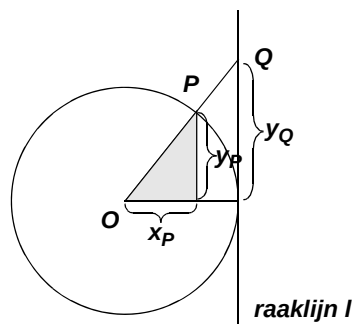
In het punt (1,0) van de eenheidscirkel trekken we de raaklijn l aan deze cirkel (de lijn $x = 1$). Het punt P beweegt weer in positieve richting over de eenheidscirkel en wordt daarbij steeds vanuit O op de lijn l geprojecteerd. Die projectie noemen we Q . De plaats van P en dus ook die van Q wordt bepaald door de draaihoek t die de voorstraal OP maakt met de positieve x -as.

Er geldt:

$x_P = \cos t$	$x_Q = 1$
$y_P = \sin t$	$y_Q = \tan t$

tip

5 Verklaar $y_Q = \frac{\sin t}{\cos t}$ met behulp van onderstaande figuur:



Je ziet dat ' $\tan t = y_Q$ ' een goede manier is om de tangens te definiëren. In feite heeft de tangens daar ook zijn naam aan te danken; het Latijnse werkwoord 'tangere' betekent 'raken'. De waarden die de tangens voor verschillende hoeken bereikt, zijn dus afstanden op de raaklijn l (boven de x -as positief, beneden de x -as negatief gerekend).

tip

- 6 a. Hoe kun je in de bovenste figuur zien dat de tangensfunctie, in tegenstelling tot sin en cos, een onbeperkt bereik heeft?
- b. Verklaar dat $\tan t$ niet gedefinieerd is voor $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0, -1, -2, \dots$).
- c. Verklaar ook dat de tangensfunctie de periode π heeft.

- 7 Als P met constante snelheid de eenheidscirkel doorloopt, dan doorloopt Q met veranderende snelheid de verticale lijn l .

In welk punt van l is de snelheid van Q het kleinst?

kleine hoeken

In opgave 3d heb je gezien dat de lineaire benadering van $\tan t$ in de buurt van $t = 0$ gelijk is aan t . Met andere woorden:

$$\tan t \approx t \quad \text{voor} \quad t \approx 0$$

In hoofdstuk 5 (opgave 9) heb je ontdekt:

$$\sin t \approx t \quad \text{voor} \quad t \approx 0$$

In woorden: voor kleine hoeken, gemeten in radialen, geldt dat de sinus zowel als de tangens ongeveer gelijk zijn aan de hoekwaarde. Bij natuurkundige en sterrenkundige berekening maakt men vaak gebruik van deze regels.

tip

- 8 Controleer dit op de GR (bijvoorbeeld met een tabel van sin- en tan-waarden).

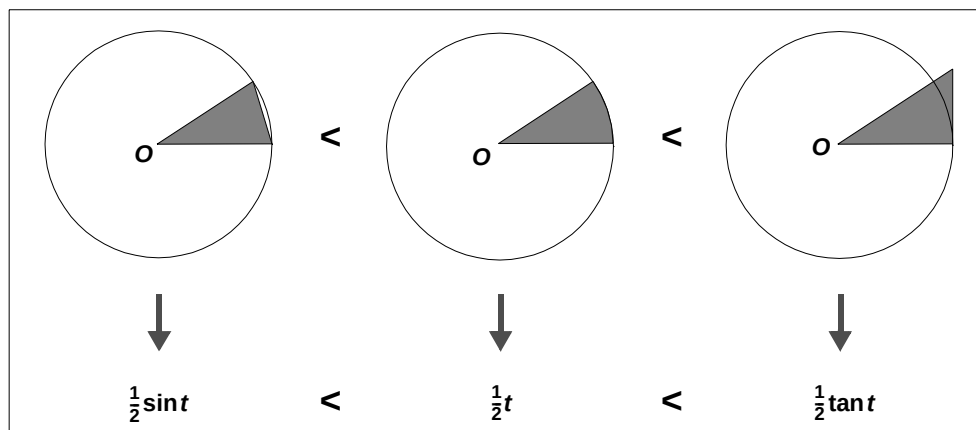
Bovenstaande regels zijn gevonden met behulp van de afgeleide functies van sin en tan. Die regels worden vaak ook wel zó opgeschreven:

$$\frac{\sin t}{t} \approx 1 \quad \text{en} \quad \frac{\tan t}{t} \approx 1$$

Deze laatste regels zijn ook meetkundig te begrijpen, zonder gebruik te maken van de afgeleide.

tip

- 9 Bekijk onderstaande figuur. Daarin zie je drie keer de eenheidscirkel. In de eerste cirkel is een gelijkbenige driehoek getekend met twee hoekpunten op de cirkel en het derde hoekpunt in O . In de tweede figuur is een sector van de cirkel te zien. In de derde figuur zie je een rechthoekige driehoek met O als hoekpunt en waarvan één zijde langs de raaklijn $x = 1$ valt. De middelpuntshoek is in alle drie de gevallen gelijk aan t radialen.



Verklaar de ongelijkheid in het kader met behulp van oppervlakten.

tip

- 10 a. Verklaar uit de ongelijkheid in opgave 9 dat voor $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ geldt:

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1$$

tip

- b. Geldt deze ongelijkheid ook voor $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$?

een befaamde
limiet

Als je in de ongelijkheid:

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1$$

de waarde van t zeer dicht bij 0 neemt, dan komt de waarde van $\cos t$ dicht bij $\cos 0 (= 1)$.
Automatisch geldt dat dan ook voor $\frac{\sin t}{t}$ waarvan de waarde dan immers ingeklemd zit tussen 1 en een getal dat iets kleiner is dan 1.
Omdat $\cos t$ onbeperkt dicht bij 1 kan komen, gebeurt dit ook met $\frac{\sin t}{t}$.
Er geldt blijkbaar:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Deze ‘beroemde’ limiet hangt ten nauwste samen met de regels voor het differentiëren van $\sin$ en $\cos$, zoals zal blijken uit opgave 13.

11 a. Verklaar uit 9 de ongelijkheid:

$$1 < \frac{\tan t}{t} < \frac{1}{\cos t}$$

b. Welke conclusie kun je nu trekken over het gedrag van $\frac{\tan t}{t}$ voor t nadert tot 0?

tip

12 a. Tot welk getal zal $\frac{\sin wt}{t}$ naderen, als t tot 0 nadert?

b. Verklaar dat uit a volgt dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $y = \sin wt$ in het punt (0,0) gelijk is aan w .

extra: nieuw
bewijs van
 $\sin' = \cos$

In hoofdstuk 5 heb je gezien hoe de regel $\sin' = \cos$ verklaard werd met de snelheid van de cirkelbeweging en de beweging van de loodrechte projectie op de y -as.
Er volgt nu een tweede bewijs van deze regel, uitgaande van het begrip differentiequotiënt.

13 a. Toon aan met een regel van Simpson dat voor $x_* \neq x$ geldt:

$$\frac{\sin x_* - \sin x}{x_* - x} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x_* - x)}{\frac{1}{2}(x_* - x)} \cdot \cos \frac{1}{2}(x_* + x)$$

tip

b. Verklaar hieruit: $\lim_{x_* \rightarrow x} \frac{\sin x_* - \sin x}{x_* - x} = \cos x$

En hier staat feitelijk: als $y(x) = \sin x$, dan $y'(x) = \cos x$.

c. Op een soortgelijke manier kun je aantonen: als $y(x) = \cos x$, dan $y'(x) = -\sin x$.
Doe dit.

14 Gegeven is de functie $y(x) = \tan^2 x$.

a. Bekijk de grafiek op het x -interval $[-p, p]$ en verklaar de symmetrie.

b. Welke lijnen zijn asymptoot van de grafiek?

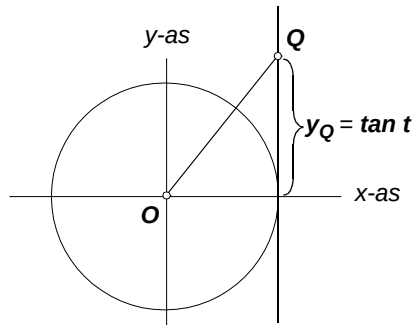
c. Iedere horizontale lijn die niet onder de x -as ligt, wordt door de grafiek van y in oneindig veel lijnstukken verdeeld. Er zijn twee horizontale lijnen waarbij al die lijnstukken even lang zijn. Welke lijnen zijn dat en waarom?

d. Druk de afgeleide van y uit in $\tan x$. Druk die afgeleide ook uit in $\sin x$ en $\cos x$.

Samenvatting

tangens en eenheidscirkel

De tangens van een hoek die een lijn door O maakt met de positieve x -as is gelijk aan de y -coördinaat van het snijpunt van die lijn met de lijn $x = 1$ (de raaklijn aan de eenheidscirkel in het punt $(1, 0)$).



De functie $\tan$ is periodiek met periode p .

$\tan t$ is gedefinieerd voor $t \neq \frac{1}{4}p, \frac{3}{4}p, \frac{5}{4}p, \frac{7}{4}p, \dots$

verband $\sin$, $\cos$ en $\tan$

De volgende formule legt het verband tussen de goniometrische functies $\sin$, $\cos$ en $\tan$:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

limieten

$\sin t$ en $\tan t$ worden in de buurt van $t = 0$ lineair benaderd door t .

Ofwel:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

en

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

afgeleide van $\tan$

De afgeleide van $\tan$ kun je vinden met behulp van de quotiëntregel en de afgeleiden van $\sin$ en $\cos$. Er komt dan:

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$$

5 Onderzoeksopdrachten

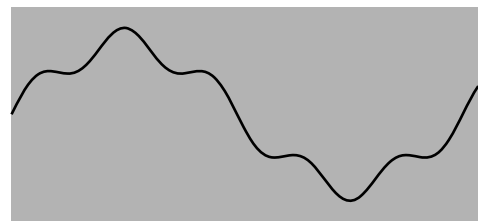
Dit hoofdstuk bevat twee onderzoeksopdrachten.

Net als bij de onderzoeksopdrachten van vorige boekjes wordt samenwerking (met tenminste één klasgenoot) warm aanbevolen. Verder is het is weer de bedoeling dat je een mooi verslag maakt.

1. Harmonische trillingen

Zoals je weet spelen vier grootheden een rol bij een harmonische trilling: de amplitude, de periode (of als je wilt, de frequentie), de fase(hoek) en de evenwichtsstand.

De evenwichtsstand speelt in het volgende geen rol, je kunt deze gewoon 0 nemen.



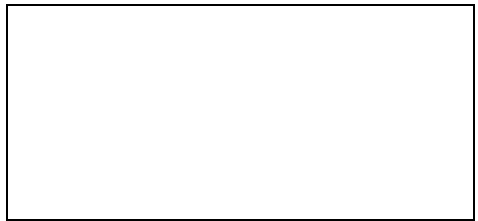
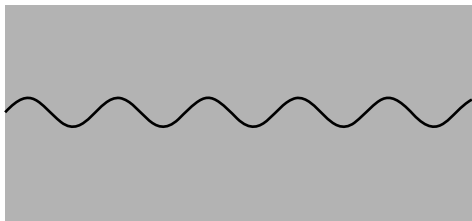
Let nu op de resultante van twee harmonische trillingen. In de figuur zie je links de harmonische trillingen I en II en rechts de resultante I + II.

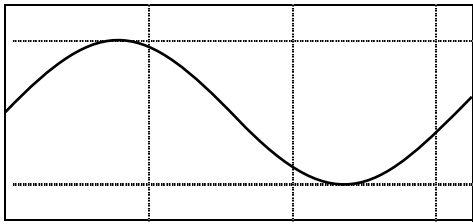
De periode van I is $2p$ en die van II is $0.4p$; de amplitude van I is 1 en die van II = 0.2. De resultante is duidelijk niet harmonisch. Algemeen: als de twee harmonische componenten *verschillen in frequentie*, dan zal de resultante niet harmonisch zijn.

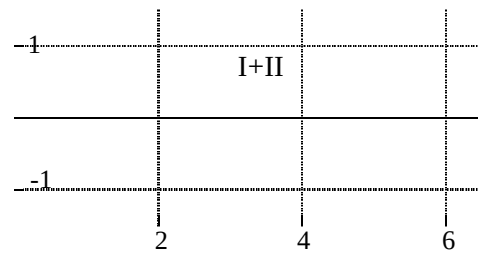
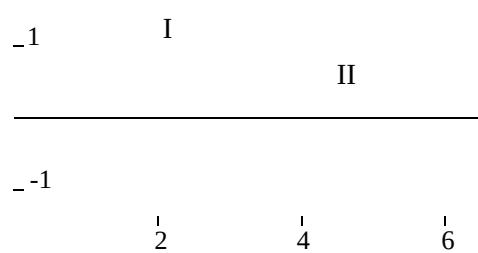
Als de componenten *gelijke frequentie* hebben en *gelijke amplitude*, dus alleen in *fase verschillen*, dan is de resultante wel harmonisch. In hoofdstuk 6 is dit uitgelegd bij één voorbeeld, namelijk $y_1 = \sin t$ en $y_2 = \sin(t - 1)$; een zelfde uitleg kan worden gebruikt voor het algemene geval: $y_1 = a \sin \omega t$ en $y_2 = a \sin \omega(t - j)$.

Je gaat nu onderzoeken hoe het zit bij twee trillingen die zowel in *fase* als in *amplitude verschillen*, maar wel *dezelfde frequentie* hebben.

- 1
 - a. Gebruik de GR om empirisch onderzoek te doen naar de ‘som’ van sinusoiden met dezelfde periode.
 - b. Let speciaal op het geval waarbij het faseverschil precies één kwart periode is. Kun je een wet bedenken die in dat geval de amplitude van de somgrafiek uitdrukt in de amplituden van de componenten?
- 2 Je kunt een heleboel formulewerk gebruiken om meer zekerheid te krijgen over de wetmatigheden bij het ‘superponeren’ van sinusoiden, maar het is veel inzichtelijker om dit meetkundig aan te pakken. De harmonische trilling in verband met de cirkelbeweging! Bedenk wat verschil in amplitude en verschil in fase betekent voor de cirkelbeweging en hoe je twee bewegingen meetkundig optelt.
 - Als je bij **1b** een wet gevonden hebt, kun je die meetkundig waar maken? En als je die wet niet gevonden hebt, kun je die alsnog vinden?
 - Wat lastiger is het om een wet te vinden voor de amplitude van de som bij een willekeurig faseverschil, maar zo’n wet is er wel!
 - Als de perioden verschillen, is de som van harmonische bewegingen niet harmonisch. Ook dat kan via de cirkelbeweging worden verklaard.







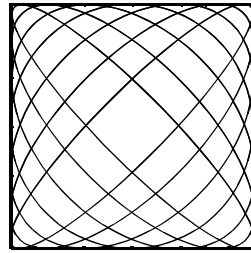
2 Lissajous-figuren

Door een faseverschil tussen de bewegingen bij een Lissajous-patroon te nemen, ontstaan nieuwe patronen. In deze onderzoeksoopdracht ga je hiermee experimenteren.

1 Gegeven zijn de bewegingsformules

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(t - a) \end{cases}$$

Maak hiermee het volgende plaatje na op je grafische rekenmachine.



2 Een punt beweegt zich volgens:

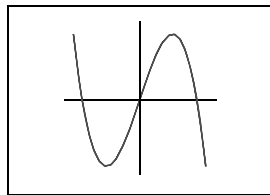
$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t - a) \end{cases}$$

Laat de waarde van a variëren en maak een serie schetsen waaruit blijkt hoe de vorm van de ‘vlinders’ afhangt van de waarde van a .

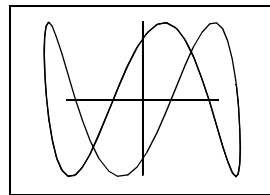
3 a. Onderzoek ook de ‘familie’ krommen die je krijgt met:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(3t - a) \end{cases}$$

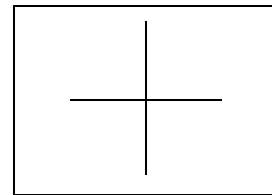
Maak weer een serie schetsen.



$a = 0$



$a = 0.3$



$a = 0.6$

b. Hoeveel keer bereikt de y -waarde een maximum? En een minimum?

Zelftoets

- 1 Bij een eenparige cirkelbeweging is de *versnelling* steeds naar het middelpunt gericht. Dat kun je wiskundig controleren door de tweede afgeleiden van de bewegingsfuncties te berekenen.
 - a. Hoe is dat voor een beweging over de ellips die hoort bij: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$?
 - b. En voor de Lissajous-beweging: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$
- 2 Gegeven het trillingspatroon: $y(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$
 - a. Bekijk een plaatje van dit patroon. Hoe vaak wordt de evenwichtsstand gepasseerd gedurende één periode?
 - b. Bewijs dat geldt: $y(t) = 4 \sin \frac{1}{2}t \cos t \cos \frac{1}{2}t$
 - c. Gebruik deze formule om de momenten te berekenen waarop de evenwichtsstand wordt gepasseerd.
- 3 Een beweging langs een rechte lijn wordt beschreven door:
$$x(t) = \sin 2t \cos(t-1) + \cos 2t \sin(t-1)$$
 - a. Toon aan dat hier sprake is van een harmonische beweging.
 - b. Hoe groot zijn periode en fase van de beweging?
- 4 Bekijk de grafiek van $f(x) = \tan x + \sin x$ in het gebied $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. De grafiek heeft in dit gebied twee buigraaklijnen. Geef een vergelijking van elk van die buigraaklijnen.
- 5 Het punt P beweegt in het Oxy -vlak volgens de formules:
$$\begin{cases} x(t) = \sin t + \sin 2t \\ y(t) = \sin 2t + \sin 3t \end{cases}$$
 - a. Bekijk de baan van het punt P op de GR. Je ziet dat in het tijdsinterval $0 \leq t < 2\pi$ het punt vijf keer de lijn $y = x$ treft. Bij welke t -waarden gebeurt dit?
 - b. Hoe vaak treft het punt de lijn $y = -x$?
 - c. De kromme heeft twee raaklijnen in de oorsprong. Bereken de richtingscoëfficiënten van die raaklijnen.

Tips

Hoofdstuk 1 Bewegingen en sinusoïden

- 5 a. $\frac{1}{2}y(t) = \cos t$
- 6 b. In het plaatje van de GR lijkt de oorsprong het middelpunt te zijn. Probeer te bewijzen dat de punten van de baan op een vaste afstand van $(0, 0)$ liggen.

Hoofdstuk 2 Trillingspatronen

- 4 c. Differentieer de formule die bij I + II past en vul de gegeven tijdstippen in.
- 5 a. Gebruik een van de verdubbelingsformules .
b. $y(t) = 0$ betekent hetzelfde als: $\sin t = 0$ of $\cos t = -\frac{1}{2}$
- 7 a. Ze versterken op de momenten dat y_1 en y_2 beide positief of beide negatief zijn.
- 8 b. Zie figuur bij opgave 9 en bekijk de beweging van het parallellogram $OPRQ$.
- 9 d. De verticale component van een vector $\vec{OR}$ met lengte r die een hoek u maakt met de positieve x -as is gelijk aan $r \sin u$; druk u uit in t , enzovoort.
- 11 b. Voor $b = 0$ zou je kunnen spreken van ‘halveringsformules’; die zijn gelijkwaardig met de verdubbelingsformules.
- 12 $-\sin b = \sin(-b)$ en $-\cos b = \cos(b + \pi)$
- 15 a. Combineer de eerste en de derde term, dus $\sin t$ en $\sin 3t$.
b. Stel $y(t) = 0$ en gebruik de formule uit a.
- 17 Stel $\frac{1}{2}(a + b) = t$ en $\frac{1}{2}(a - b) = u$.

Hoofdstuk 3 Figuren van Lissajous

- 7 c. Bepaal eerst op welke tijdstippen t de keerpunten worden bereikt.
- 8 a. Gebruik de somregel voor de sinus.
- 13 Tel het aantal punten waarin de y -waarde maximaal is. Idem voor de x -waarde.
- 15 c. Voor de zes grensvlakken van de kubus geldt: $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$; bereken nu eerst de tijdstippen waarop het bewegende punt deze zijvlakken treft.

Hoofdstuk 4 Over de functie tan en zeer kleine hoeken

- 2 a. Een breuk met noemer 0 is niet gedefinieerd.
b. Wat gebeurt er met de teller en wat met de noemer als t nadert tot $\frac{1}{2}\pi$?
- 5 Let op twee rechthoekige driehoeken: de grijze driehoek met de hoekpunten O en P en de driehoek met hoekpunten O , Q en $(1, 0)$; die driehoeken zijn gelijkvormig. Dat betekent dat de twee rechthoeks zijden van beide driehoeken dezelfde verhouding hebben.
- 6 a. Laat P over de cirkel bewegen en bekijk het gedrag van Q .

-
- 8** Kies bijvoorbeeld het venster $[0, 1]$ bij $[0, 1]$ en stel in TblSet de stapgrootte 0.01.
- 9** Druk de drie oppervlakten uit in t . Voor de sector heb je eerst de oppervlakte van de eenheidscirkel nodig.
- 10 a.** Let vooral op de middelste vorm; hoe krijg je die uit de middelste vorm van de ongelijkheid binnen het kader?
- b.** Vervang t door $-t$
- 12 a.** Stel $wt = u$ en werk toe naar $\frac{\sin u}{u}$.
- 13 b.** Als x_* nadert tot x , nadert $\frac{1}{2}(x_* - x)$ tot 0 en $\frac{1}{2}(x_* + x)$ tot x .

Antwoorden

Hoofdstuk 1 Bewegingen en sinusoiden

1 a.

t	0	$p/6$	$p/3$	$p/2$	$2p/3$	$5p/6$
$P(t)$	(1,0)	$(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$	(0,1)	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$

t	p	$7p/6$	$4p/3$	$3p/2$	$5p/3$	$11p/6$
$P(t)$	(-1,0)	$(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$	(0,-1)	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

b. $t = \frac{1}{4}p + k \frac{1}{2}p$; de afstand is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c.
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t + \frac{1}{6}p) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{6}p) \end{cases}$$

f. Door T-step = $p/6$ in te stellen.

2 a.
$$\begin{cases} x(t) = \cos(2pt) \\ y(t) = \sin(2pt) \end{cases}$$

b. $2p$ lengte-eenheden per sec.

c.
$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(pt) \\ y(t) = 3\sin(pt) \end{cases}$$

3 a.
$$\begin{cases} x(t) = -\sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

c. Hor. component $\frac{1}{2}$, naar links.

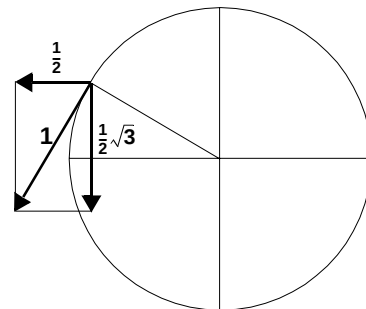
Vert. component $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, naar beneden.

d.
$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Tekening is spiegelbeeld t.o.v. de y-as

Hor. component $\frac{1}{2}$, naar rechts.

Vert. component $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, naar beneden.



4 b. $x'(t) = -\sin t$ en $y'(t) = 2\cos t$ dus de snelheid is $\sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}$ en in verband met $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ dus ook gelijk aan $\sqrt{1 + 3\cos^2 t}$

-
- c. Dit is maximaal 2 voor $\cos t = -1$, dus voor $t = k\pi$ en minimaal 1 voor $\cos t = 0$, dus voor $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$
- 5 a. $x(t)^2 + \frac{1}{4}y(t)^2 = \cos^2 t + \frac{1}{4}4\sin^2 t = 1$ voor iedere waarde van t .
- b. $\frac{1}{9}x^2 + y^2 = 1$
- c. $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{100}y^2 = 1$
- 6 a. Startpunt; (1, 1)
- b. $x(t)^2 + y(t)^2 = (\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = (\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + (\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) = 2$.
De afstand van het bewegende punt tot de oorsprong is dus onafhankelijk van t gelijk aan $\sqrt{2}$.
- 7 a. $x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$ en $y(t) = \cos 2t$.
- b. Als de cirkel $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$ in horizontale richting met factor $\frac{1}{2}$ wordt vermenigvuldigt, krijg je de gegeven kromme (= ellips).
- 8 a. $r = \sqrt{2}$ en $j = \frac{1}{4}\pi$
- b. $\sqrt{2}\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi\sin x + \sin\frac{1}{4}\pi\cos x) = \sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x) = \sin x + \cos x$;
Analoog: $\sqrt{2}\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos x - \sin x$
- 9 b. $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$ en $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$
- c. Periode π en amplituden respectievelijk $\frac{1}{2}$ en 1.
- 10 a. $x = 2\cos 3t$ en $y = 1 - 2\sin 3t$
- b. Middelpunt (0, 1) en straal 2.

Hoofdstuk 1 Trillingspatronen

- 1 a. Maximale uitwijking (amplitude) zal groter zijn.
b. Kleinere periode.
- 2 Verschuift in horizontale richting.
- 3 a. amplitude = 4, periode = 5, frequentie = 1/5.
b. $y(t) = 4\sin 0.4\pi(t - 1)$
- 4 a. $y_I(t) = 2\sin t$ en $y_{II}(t) = \sin 2t$
b.
c. $y_{III}(t) = 2\sin t + \sin 2t$, dus $y_{III}'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t$

$$y_{III}'(\frac{1}{3}p) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$$

$$y_{III}'(p) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0$$

$$y_{III}'(\frac{2}{3}p) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$$

- d. De grootste uitwijking vindt plaats voor $t = \frac{1}{3}p$ en $t = \frac{2}{3}p$

$$y_{III}(\frac{1}{3}p) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}; y_{III}(\frac{2}{3}p) = -1\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

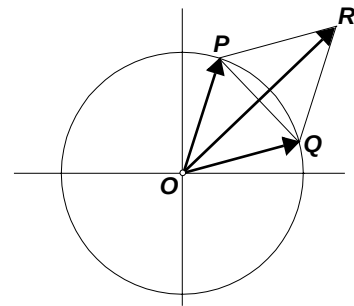
- 5 a. $y(t) = \sin t + \sin 2t = \sin t + 2\sin t \cos t = \sin t(1 + 2\cos t)$

- b. $y(t) = 0$ is gelijkwaardig met $\sin t = 0$ of $\cos t = -\frac{1}{2}$; de eerste vergelijking heeft als oplossingen $0, p, 2p$; de tweede heeft de oplossingen $\frac{2}{3}p$ en $\frac{4}{3}p$

- 7 a. y_1 en y_2 zijn beide positief voor $1 < t < p$ en beide negatief voor $1 + p < t < 2p$

- b. faseverschil met de beide grondtonen lijkt 0.5; amplitude is ongeveer 1.76

- 8 b. P en Q bewegen met gelijke hoeksnelheid (zeg 1 rad/sec) over de eenheidscirkel. R is steeds het hoekpunt van parallellogram $OQRP$ met vaste hoek O (1 radiaal). Het parallellogram $OQRP$ draait in zijn geheel met een constante hoeksnelheid om O en R maakt dus ook een eenparige cirkelbeweging.



- 9 a. 1 radiaal

- b. ruit

- c. $PQ \perp OR$; als S = snijpunt PQ en OR , dan $\cos \angle ROQ = \cos 0.5 = OS/OQ = OS$.
 $r = 2 \cdot OS = 2 \cdot \cos 0.5$

- d. Verticale componenten van resp. $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ en $\vec{OR}$: $\sin t$, $\sin(t-1)$ en $r \sin(t-0.5)$ met $r = 2\cos 0.5$. en vert.comp. $\vec{OR} = \text{vert. comp. } \vec{OP} + \text{vert. comp. } \vec{OQ}$.

- e. $2\cos 0.5 \approx 1.76$

- f. $\cos t + \cos(t-1) = r \cdot \cos(t-0.5) = 2\cos 0.5 \cos(t-0.5)$

- 10 Stel $a = t$, $b = t-1$, dan: $\frac{1}{2}(a+b) = t - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}$

- 11 a. $2\sin a = 2\cos 0 \sin a$ en $2\cos a = 2\cos 0 \cos a$ en dit klopt, want $\cos 0 = 1$

- b. $\sin a = 2\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}a$ en $\cos a + 1 = 2\cos^2 \frac{1}{2}a$

Substitutie van $t = \frac{1}{2}a$ geeft twee verdubbelingsformules.

- 12 $\sin a - \sin b = \sin a + \sin(-b) = 2\cos \frac{1}{2}(a - (-b))\sin \frac{1}{2}(a + (-b)) = 2\cos \frac{1}{2}(a+b)\sin \frac{1}{2}(a-b)$;

$$\cos a - \cos b = \cos a + \cos(b+p) = 2\cos \frac{1}{2}(a-b-p)\sin \frac{1}{2}(a+b+p) =$$

$$= 2\cos \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}p \cos \left(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}p\right) = 2\sin \frac{1}{2}(a-b) \cdot -\sin \frac{1}{2}(a+b) =$$

$$= -2\sin \frac{1}{2}(a+b)\sin \frac{1}{2}(a-b)$$

- 13 a. $1/90$

- b. $2p$

- c. $y = \sin 10t + \sin 9t = 2\sin \frac{9\frac{1}{2}}{2}t \cos \frac{1}{2}t$

- d. $y = \cos \frac{1}{2}t$ en $y = -\cos \frac{1}{2}t$

14 b. $y = 2\sin 2t \cos t$

c. $y(t) = 0 \quad \sin 2t = 0$ of $\cos t = 0$;

de eerste vergelijking heeft de oplossingen $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi$ en de tweede $\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$. De 'dubbele oplossingen' $\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$ horen bij de raakpunten van de trillingsgrafiek aan de t -as; dit blijkt ook na substitutie in de afgeleide functie, dus in:

$$y'(t) = \cos t + 3\cos 3t$$

15 a. $(\sin t + \sin 3t) + \sin 2t = 2\sin 2t \cos t + \sin 2t = \sin 2t (2\cos t + 1)$

b. $\sin 2t = 0$ geeft: $t = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\pi$; $2\cos t + 1 = 0$ geeft: $t = \frac{2}{3}\pi, 1\frac{2}{3}\pi$

16 a. de uitwijking wordt steeds kleiner, zelfs willekeurig klein.

b. $y'(t) = e^{-t}(-\sin t + \cos t) = 0$ voor $t = \frac{1}{4}\pi + k\pi$ met $k = 0, -1, -2, \dots$

17 Het volgende patroon heeft één golfje meer tussen de pieken en dalen; bovendien zijn die pieken (dalen) iets hoger (lager).

De formules waarmee je die patronen kunt maken, zijn van de vorm:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt$$

met $n = 1, 2, 3, \dots, 8$

18 $2\sin a = 2\cos \frac{1}{2}(a - b) \sin \frac{1}{2}(a + b) + 2\cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$

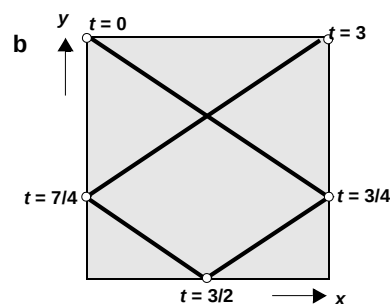
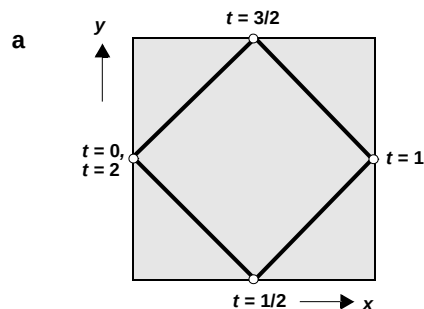
Stel $\frac{1}{2}(a + b) = t$ en $\frac{1}{2}(a - b) = u$, dan $a = t + u$

Substitutie in bovenstaande formule geeft na links en rechts delen door 2:

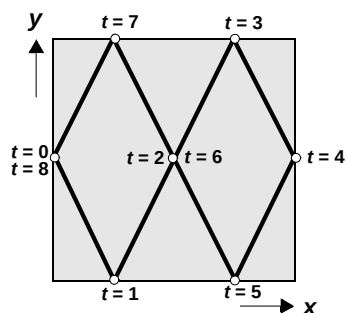
$$\sin(t + u) = \cos u \sin t + \cos t \sin u.$$

Hoofdstuk 2 Figuren van Lissajous

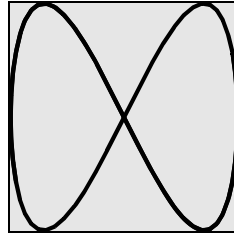
3



4



5 a.



b. Geschikte formules zijn: $x = \sin t$, $y = \sin(2t)$

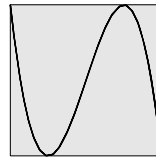
6 b. De snelheidsvector heeft de componenten $(\cos(t), 2\cos(2t))$.

De snelheid is dan gelijk aan $\sqrt{(\cos t)^2 + (2\cos 2t)^2}$. Voor $t = 0$ is de waarde $\sqrt{5}$.

c. Voor $t = 0$ geldt dat zowel x' als y' maximaal zijn, namelijk 1 respectievelijk 2. De totale snelheid is dan ook maximaal.

7 a. De meest eenvoudige formules zijn: $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$

b.



c. De componenten van de snelheidsvector zijn $(\cos(t), 3\cos(3t))$.

De keerpunten worden bereikt voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = \frac{3}{2}\pi$.

Invullen hiervan geeft een snelheidsvector met beide componenten 0.

De snelheid in de keerpunten is dus gelijk aan 0 (in een keerpunt staat het punt als het ware even stil).

8 a. $\sin(3t) = \sin(2t + t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t$

b. Bovenstaande vorm is gelijk aan:

$$2 \sin t \cos^2 t + (1 - 2 \sin^2 t) \sin t$$

Invullen van $1 - \sin^2 t$ voor $\cos^2 t$ en uitwerken geeft het gevraagde.

c. $y = -4x^3 + 3x$.

d. Door na te gaan of de kromme bepaald door: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -4t^3 + 3t \end{cases}$ samenvalt met de eerder getekende Lissajous-figuur.

9

$$\cos 3t = \cos(2t + t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = (2\cos^2 t - 1)\cos t - 2\sin^2 t \cos t$$

Vervanging van $\sin^2 t$ door $1 - \cos^2 t$, levert na uitwerking:

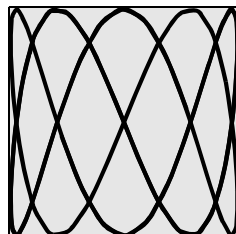
$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

De x, y -vergelijking van de kromme is nu: $y = 4x^3 - 3x$ en dat is het spiegelbeeld t.o.v. de x -as van de kromme $y = -4x^3 + 3x$

- 10 Een paar mogelijkheden zijn: $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin^2 t \end{cases}, \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}, \begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \sin 6t \end{cases}$

Bij geschikte keuze van het t -interval geeft dat steeds dezelfde baan.

11 a.



- b. De periode van x is p , en die van y is $\frac{2}{5}p$.

De periode van de beweging als geheel is dan $2p$.

- c. Het punt bereikt nu twee keer een hoekpunt van het vierkant waarin de Lissajous-figuur past, namelijk de punten $(1, 1)$ en $(1, -1)$; op de momenten dat die punten worden bereikt is de snelheid 0 en is er sprake van een keerpunt.

In het eerste geval worden de hoekpunten van het vierkant niet bereikt en hoeft er ook niet 'gekeerd' te worden.

- 12 Als a en b geen gemeenschappelijke deler hebben, zoals bijvoorbeeld $a=2$ en $b=5$, dan is de periode van de beweging gelijk aan $2p$.

Hebben a en b wel een gemeenschappelijke deler, zoals bijvoorbeeld $a=3$ en $b=6$, dan is de periode gelijk aan $2p$ gedeeld door die gemeenschappelijke factor, in dit geval dus $2p/3$.

- 13 De x -waarde bereikt drie keer een maximum en de y -waarde vier keer.

Met: $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin(4t) \end{cases}$ kan de Lissajous-figuur worden gemaakt.

- 14 a. De vorm is een ellips (die scheef ligt ten opzichte van het assenstelsel).

- b. De ellips wordt steeds ronder, en daarna weer platter 'van linksboven naar rechts-onder'.

- 15 a. De zij-aanzichten zijn de Lissajous-figuren; het bovenaanzicht (in de z -richting) is de figuur van opgave 5; het vooraanzicht (in de x -richting) is de figuur van opgave 10; ten slotte het zijaanzicht in de y -richting is de figuur van opgave 8.

- b. $x'(t) = \cos t$, $y'(t) = 2\cos 2t$, $z'(t) = 3\cos 3t$. Op $t = 0$ heeft de snelheidsvector de componenten 1, 2 en 3 en de grootte van de snelheid is dus: $\sqrt{14}$.

- c. De ontmoetingspunten vind je uit: $\sin t = -1$, $\sin 2t = -1$ en $\sin 3t = -1$. Dit geeft 10 verschillende waarden voor t , namelijk:

$$t = \frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p, \frac{1}{4}p, \frac{3}{4}p, \frac{1}{4}p, \frac{3}{4}p, \frac{1}{6}p, \frac{5}{6}p, \frac{1}{6}p, \frac{5}{6}p$$

Op deze tijdstippen zijn de posities achtereenvolgens:

$$(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, \frac{1}{2}\sqrt{2}), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}),$$

$$(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, -1), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1)$$

Hoofdstuk 3 Over de functie tan en over zeer kleine hoeken

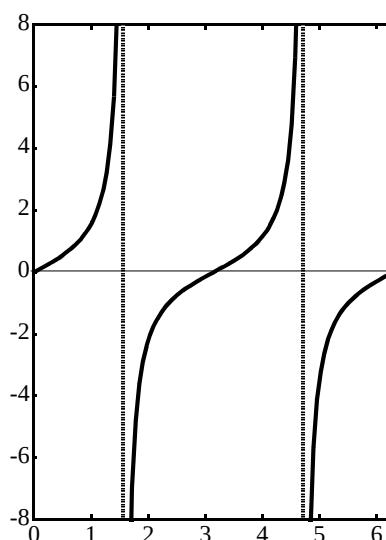
1 $\tan a = \frac{h}{b} = \frac{r \sin a}{r \cos a} = \frac{\sin a}{\cos a}$

2 a. $\frac{\sin t}{\cos t}$ is niet gedefinieerd als $\cos t = 0$, dus als $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, met $k = 0, -1, -2, \dots$

b. Als t tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$ ligt en nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, wordt de waarde van $\frac{\sin t}{\cos t}$ onbeperkt groot; anders gezegd: $\tan t$ nadert tot ∞ (oneindig); daarom is de verticale lijn door het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ een asymptoot van de tangensgrafiek (de grafiek nadert van links naar de bovenkant van de asymptoot).

Als t tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π ligt en nadert tot $\frac{1}{2}\pi$, dan nadert $\tan t$ tot $-\infty$ (min oneindig); de grafiek nadert van rechts naar de onderkant van de asymptoot.

c. Tan-grafiek met asymptoten:



d. De periode is π .

Inderdaad: $\tan(t + \pi) = \frac{\sin(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \tan t$

3 a. $\frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$

b. $\frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

c. In de punten $(k\pi, 0)$ met $k = 0, -1, -2, \dots$

d. $\tan t \gg t$ voor $t \gg 0$

4 a. $y'(x) = \tan^2 x$

c. De punten waarin $y'(x)$ minimaal is, zijn $(k\pi, -k\pi)$ met $k = 0, -1, -2, \dots$ en die punten liggen op de lijn $y = -x$.

- 5 $\frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{1} = y_Q$, dus $y_Q = \frac{\sin t}{\cos t}$
- 6 a. Als P in pos. richting over de eenheidscirkel beweegt van $(1, 0)$ naar $(0, 1)$, wordt y_Q onbeperkt groot (nadert y_Q tot ∞). Het bereik heeft dus geen grens aan de bovenkant. Als P over de cirkel beweegt (in pos. richting) van $(0, 1)$ naar $(-1, 0)$, nadert y_Q tot $-\infty$, het bereik is dus ook aan de onderkant onbegrensd.
- b. Voor $t = \frac{1}{2}p + kp$ loopt de lijn OP evenwijdig met de raaklijn l .
- c. Twee diametraal gelegen punten op de eenheidscirkel leveren hetzelfde punt Q . Dus na een draaiing van de voerstraal OP over p radialen komt er dezelfde tangens-waarde.
- 7 In het punt $(1, 0)$; daar is de afgeleide van $y = \tan t$ minimaal.
- 9 Opp. driehoek $OAP = \frac{1}{2} \cdot y_P \cdot 1 = \frac{1}{2} \sin t$
 Opp. sector $OAP = \frac{t}{2p} \cdot p = \frac{1}{2} t$
 Opp. driehoek $OAQ = \frac{1}{2} \cdot y_Q \cdot 1 = \frac{1}{2} \tan t$
- 10 a. Uit $\sin t < t < \tan t$ volgt na deling door $\sin t$ (is positief!): $1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}$ en daaruit volgt na omkering: $1 > \frac{\sin t}{t} > \cos t$
- b. Ja; dan geldt volgens 10a: $1 > \frac{\sin(-t)}{-t} > \cos(-t)$ en omdat $\sin(-t) = -\sin t$ en $\cos(-t) = \cos t$ krijg je dezelfde ongelijkheid.
- 11 a. Uit $\sin t < t < \tan t$ volgt na deling door $\tan t$ (in het geval $0 < t < \frac{1}{2}p$) dat:
 $\cos t < \frac{t}{\tan t} < 1$ en na omkering komt er de gewenste ongelijkheid.
- b. $\frac{\tan t}{t}$ nadert tot 1 voor t nadert tot 0.
- 12 a. Stel $wt = u$, dan $\frac{\sin wt}{t} = w \cdot \frac{\sin u}{u}$ en die laatste vorm nadert tot w als u nadert tot 0.
- b. $\frac{\sin wt}{t}$ is de richtingscoëff. van de koorde door de punten $(0, 0)$ en $(t, \sin wt)$; omdat deze tot w nadert voor t nadert tot 0, moet w de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek zijn in het punt $(0, 0)$.
- 13 a. $\frac{\sin x^* - \sin x}{x^* - x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(x^* - x) \cos \frac{1}{2}(x^* + x)}{x^* - x} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x^* - x)}{\frac{1}{2}(x^* - x)} \cos \frac{1}{2}(x^* + x)$
- b. Als x^* nadert x , nadert $\frac{1}{2}(x^* - x)$ tot 0, en dus nadert $\frac{\sin \frac{1}{2}(x^* - x)}{\frac{1}{2}(x^* - x)}$ tot 1.
 Bovendien nadert $\cos \frac{1}{2}(x^* + x)$ dan tot $\cos \frac{1}{2}(x + x) = \cos x$.
- c. $\frac{x^* - \cos x}{x^* - x} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(x^* - x) \sin \frac{1}{2}(x^* + x)}{x^* - x} = -\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(x^* - x)}{\frac{1}{2}(x^* - x)} \sin \frac{1}{2}(x^* + x) \right)$ en
 die laatste vorm nadert tot $-\sin x$ als x^* nadert tot x .

- 14 a. $\tan(-x) = -\tan x$ en $(-\tan x)^2 = \tan^2 x$
 b. Dezelfde lijnen als die asymptoot zijn van de tangens-grafiek, dus $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, met $k = 0, -1, -2, \dots$
 c. De x-as en de lijn $y = 1$. De eerste raakt de grafiek van y in de punten $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ en de tweede snijdt de grafiek van y in de punten $(\frac{1}{4}\pi + k\frac{1}{2}\pi, 1)$; $k = 0, -1, -2, \dots$
 d. $y'(x) = 2\tan x (\tan^2 x + 1) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

Zelftoets

- 1 a. De versnelling op het tijdstip t heeft de componenten $-\cos t$ en $-2\sin t$ en de snelheidsvector wijst dus van het punt $(\cos t, \sin 2t)$ naar de oorsprong (het middelpunt van de ellips).
 b. Nu zijn de componenten van de versnelling $-\cos t$ en $-4\sin 2t$ en deze wijst alleen naar het middelpunt op $t = 0, \pi, 2\pi$.
- 2 a. 8 keer
 b. $\sin t + \sin 4t = 2 \cos 1.5t \sin 2.5t$ en $\sin 2t + \sin 3t = 2 \cos 0.5t \sin 2.5t$
 Dus $y(t) = 2\sin 2.5t (\cos 1.5t + \cos 0.5t) = 2\sin 2.5t \cdot 2 \cos 0.5t \cos t = 4\sin 2.5t \cos t \cos 0.5t$
 c. Bekijk de oplossingen van $y(t) = 0$ met $0 \leq t < 2\pi$:
 $\sin 2.5t = 0$ geeft de oplossingen: $0, 0.4\pi, 0.8\pi, 1.2\pi, 1.6\pi$
 $\cos t = 0$ geeft de oplossingen: $0.5\pi, 1.5\pi$
 $\cos 0.5t = 0$ geeft de oplossing π
- 3 a. Uit de eerste optelformule volgt: $x(t) = \sin(2t + t - 1)$
 ofwel $x(t) = \sin(3t - 1)$ en deze formule beschrijft een harmonische beweging.
 b. $\frac{2}{3}\pi$ en $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{2\pi}$
- 4 $y = 2x$ (in het punt $(0, 0)$ en $y = 0$ (in het punt $(\pi, 0)$).
- 5 a. Uit $\sin t + \sin 2t = \sin 2t + \sin 3t$ volgt: $\sin t = \sin 3t$ en deze vergelijking heeft in het genoemde t -interval de oplossingen: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$
 en dat geeft de trefpunten $(0, 0), (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}), (-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}), (0, 0), (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
 b. Drie keer. Uit $\sin t + \sin 2t = -\sin 2t - \sin 3t$ volgt: $\sin t + \sin 3t + 2\sin 2t = 0$
 en dus $2\sin 2t \cos t + 2\sin 2t = 0$ dus: $\sin 2t = 0$ of $\cos t = -1$.
 Kortom: $t = 0, t = \frac{1}{2}\pi, t = \pi, t = 1\frac{1}{2}\pi$.
 Dit levert de trefpunten $(0, 0), (1, -1), (0, 0)$ en $(-1, 1)$.
 c. $x'(t) = \cos t + 2\cos 2t$ en $y'(t) = 2\cos 2t + 3\cos 3t$
 Voor $t = 0$ geeft dat resp. 3 en 5, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan $5/3$.
 Voor $t = \pi$ geeft dat resp. 1 en -1, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dan -1.

