

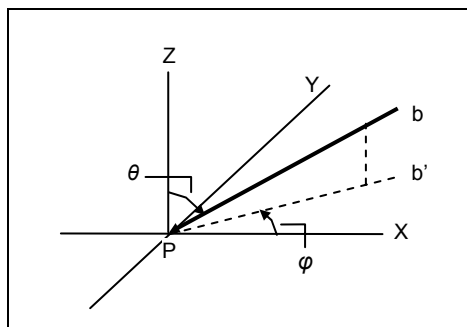
## Detectie van kosmische straling

### 3.7 Richting primair kosmisch deeltje

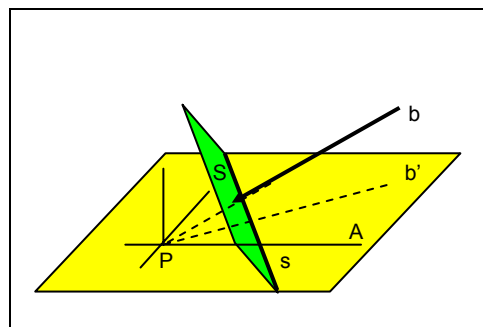
Uit de gemeten aankomsttijden van de airshower bij tenminste drie detectiestations moet de richting van waaruit het primair kosmisch deeltje op de aardatmosfeer inslaat worden bepaald (zie 2.3 Airshowers). De gegevens bestaan dus uit de plaats- en tijdcoördinaten van de detectiestations A, B en C: A  $(x_A, y_A, t_A)$ , B  $(x_B, y_B, t_B)$  en C  $(x_C, y_C, t_C)$ . Hierin zijn  $t_A$ ,  $t_B$  en  $t_C$  de aankomsttijden van de airshower bij de drie detectiestations. De vraag is nu: hoe bepalen we uit deze data de richting van het primair kosmisch deeltje?

Bij het beantwoorden van die vraag beginnen we met de manier waarop we die richting gaan opgeven. De richting van het primair kosmisch deeltje is volledig vast te leggen in de vorm van twee hoeken: de zenit-hoek en de azimut-hoek. We gaan er daarbij van uit dat de banen van het primair kosmisch deeltje en de showerkern recht zijn, en dat de baan van de showerkern in het verlengde ligt van de baan van het primair kosmisch deeltje. We trekken dus de rechte baan  $b$  van het primair kosmisch deeltje door tot aan het aardoppervlak. De zenit-hoek  $\theta$  is dan de hoek tussen de baan  $b$  en de verticale Z-as op het aardoppervlak in het 'inslagpunt' P. De azimut-hoek  $\varphi$  is de hoek tussen de loodrechte projectie  $b'$  van de baan  $b$  in het XY-vlak (het aardoppervlak A) en de horizontale X-as. De richting van deze horizontale X-as is van west naar oost gekozen. De richting van de Y-as is dan van zuid naar noord.

Met deze zenit-hoek  $\theta$  en azimuth-hoek  $\varphi$  zoals weergegeven in figuur 1 is de richting van het primair kosmisch deeltje volledig bepaald.



Figuur 1 – De richting van de baan  $b$  van het primair kosmisch deeltje wordt gegeven door de zenit-hoek  $\theta$  (de hoek tussen de Z-as en  $b$ ) en de azimut-hoek  $\varphi$  (de hoek tussen de X-as en  $b'$ ).



Figuur 2 – Het loodrecht op de baan  $b$  van het primair kosmisch deeltje staande showerfront  $S$  doorsnijdt het aardoppervlak  $A$  met een rechte lijn  $s$ . Deze lijn beweegt over het aardoppervlak naar het inslagpunt P.

- 1 Om uit de aankomsttijden van de muonen in de airshower de richting van het primair kosmisch deeltje te bepalen, moeten we de volgende aannames doen: het showerfront is een plat vlak  $S$  loodrecht op de baan  $b$  van het primaire deeltje, het aardoppervlak is een plat vlak  $A$ , en de detectiestations liggen op dezelfde hoogte.
  - Leg uit waarom dit redelijke aannames zijn, gelet op de eigenschappen van een airshower.

We zullen nu nagaan hoe uit een meting van de aankomsttijden van de airshower op minstens drie detectiestations de zenit-hoek en de azimut-hoek van het primair kosmisch deeltje te bepalen zijn.

**Zenit-hoek** – Het in figuur 2 weergegeven showerfront (het vlak  $S$ ) beweegt zich met vrijwel de lichtsnelheid  $c$  langs de baan  $b$  in de richting van het aardoppervlak (het vlak  $A$ ). Als de airshower bij het aardoppervlak aankomt, doorsnijdt het showerfront  $S$  het aardoppervlak  $A$  met een rechte lijn  $s$ . Bij aankomst van de airshower loopt de lijn  $s$  mee over het aardoppervlak.

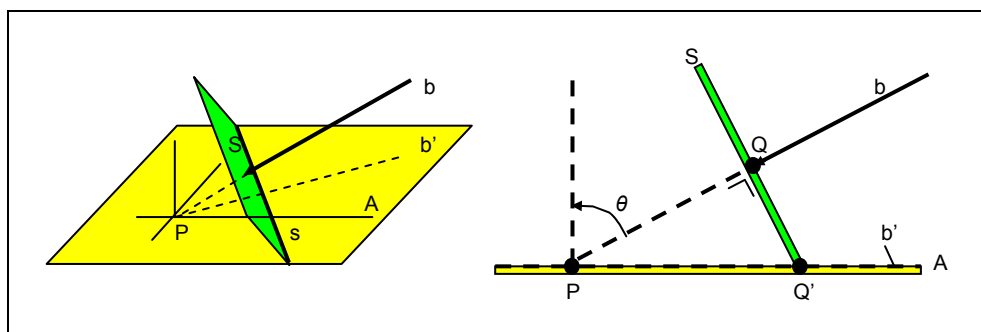
De snelheid  $v$  waarmee dit gebeurt is groter dan de lichtsnelheid  $c$ :

$$v = c/\sin \theta$$

[1]

In deze formule is  $\theta$  de zenit-hoek van het primaire deeltje. Omdat  $\sin \theta \leq 1$  geldt:  $v \geq c$ .

- 2 De afleiding van deze formule gaat als volgt. Bekijk het vlak dat gevormd wordt door de baan  $b$  en zijn projectie  $b'$  op vlak  $A$  zoals weergegeven in figuur 3. Het snijpunt van lijn  $b$  en vlak  $A$  noemen we  $P$ . Kies een punt  $Q$  'hoger' op de lijn  $b$ . Als het showerfront  $S$  in punt  $Q$  is, loopt de lijn  $s$  door het punt  $Q'$  in vlak  $A$ . Een tijdsduur  $\Delta t$  later is het showerfront  $S$  aangekomen in  $P$ . En datzelfde geldt dan voor de lijn  $s$ : deze loopt nu ook door  $P$ .
- Toon nu aan dat de snelheid  $v$  waarmee de lijn  $s$  door vlak  $A$  beweegt gegeven wordt door  $v = c/\sin \theta$



Figuur 3 – De tekening links is een herhaling van figuur 2. In de tekening rechts is het vlak van de baan  $b$  en zijn projectie  $b'$  op het aardoppervlak weergegeven, met daarin ook de zenit-hoek  $\theta$ . Het showerfront  $S$  beweegt in een tijdsduur  $\Delta t$  met de lichtsnelheid  $c$  van  $Q$  naar  $P$ . In diezelfde tijdsduur beweegt de snijlijn  $s$  met een snelheid  $v$  over het aardoppervlak van  $Q'$  naar  $P$ .

Het met een snelheid groter dan de lichtsnelheid bewegen van de snijlijn  $s$  van het showerfront met het aardoppervlak is een voorbeeld van de zogenaamde *superluminale beweging*. Op internet zijn meer voorbeelden van superluminale beweging te vinden. Zoek eens met google:

<http://www.google.nl>

Als we uit een meting van de aankomsttijden van de airshower op minstens drie detectiestations de snelheid  $v$  van de snijlijn  $s$  tussen het showerfront en het aardoppervlak kunnen bepalen, volgt uit formule [1] de zenit-hoek  $\theta$  van het primair kosmisch deeltje.

**Azimut-hoek** – De snijlijn  $s$  tussen het showerfront  $S$  en het aardoppervlak  $A$  heeft niet alleen een snelheid, maar ook een richting. Deze richting wordt gegeven door de hoek  $\xi$  tussen de lijn  $s$  en de  $X$ -as, zoals weergegeven in figuur 4. De hoek  $\xi$  tussen de lijn  $s$  en de  $X$ -as en de azimut-hoek  $\varphi$  van het primair kosmisch deeltje hangen met elkaar samen:

$$\varphi = \xi - 90^\circ$$

[2]

Deze formule volgt uit het feit dat de azimut-hoek  $\varphi$  is gedefinieerd als de hoek tussen de projectie  $b'$  (van de baan  $b$  in het  $XY$ -vlak) en de positieve  $X$ -as, en dat de lijn  $s$  loodrecht staat op deze projectie  $b'$ .

Als we uit een meting van de aankomsttijden van de airshower op minstens drie detectiestations de richting  $\xi$  van de snijlijn  $s$  tussen het showerfront en het aardoppervlak kunnen bepalen, volgt uit formule [2] de azimut-hoek  $\varphi$  van het primair kosmisch deeltje.

**Detectie** – Er is sprake van drie detectiestations  $A$ ,  $B$  en  $C$  in het horizontale  $XY$ -vlak. We nemen aan dat een drievoudige coïncidentie gemeten is, met aankomsttijden  $t_A$ ,  $t_B$  en  $t_C$ . Voor ons gemak ordenen we  $A$ ,  $B$  en  $C$  zodanig dat  $t_C > t_B > t_A$  en kiezen dan een coördinatenstelsel met  $A$  als oorsprong voor zowel de plaats als de tijd. De detectiestations hebben dan de coördinaten  $A(0,0,0)$ ,  $B(B_x, B_y, B_t)$  en  $C(C_x, C_y, C_t)$ , met  $B_x = x_B - x_A$ ,  $B_y = y_B - y_A$ ,  $B_t = t_B - t_A$  en  $C_x = x_C - x_A$ ,  $C_y = y_C - y_A$ ,  $C_t = t_C - t_A$ .

De lijn  $s$  loopt op het tijdstip  $t = 0$  door de oorsprong  $A$ . De vergelijking van deze lijn is dan te schrijven als  $y = m \cdot x$ , waarin de richtingscoëfficiënt  $m$  gegeven wordt door  $m = \tan \xi$  (zie figuur 4).

Voor het bepalen van de afstand tussen een willekeurig punt in het  $XY$ -vlak en deze lijn bestaat een standaardprocedure. Toegepast op de punten  $B$  en  $C$  (zie figuur 5) levert deze

standaardprocedure de afstanden  $d_B$  en  $d_C$  vanuit de punten B en C tot de lijn s:

$$d_B = \frac{B_y - m \cdot B_x}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad [3]$$

$$d_C = \frac{C_y - m \cdot C_x}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad [4]$$

Maar over deze twee afstanden is nog iets meer te zeggen: ze worden namelijk door de lijn s afgelegd in een tijdsduur  $B_t$  resp.  $C_t$  met een snelheid  $v$ , zodat  $d_B = v \cdot B_t$  en  $d_C = v \cdot C_t$ . In combinatie met de formules [3] en [4] levert dit de volgende twee vergelijkingen:

$$\frac{B_y - m \cdot B_x}{\sqrt{m^2 + 1}} = v \cdot B_t \quad [5]$$

$$\frac{C_y - m \cdot C_x}{\sqrt{m^2 + 1}} = v \cdot C_t \quad [6]$$

In de twee vergelijkingen [5] en [6] komen twee onbekenden voor:  $m$  en  $v$ . Het oplossen van dit stelsel vergelijkingen levert dus formules voor  $m$  en  $v$ , uitgedrukt in de bekende plaats- en tijdcoördinaten van de punten B en C:

$$m = \frac{C_y \cdot B_t - B_y \cdot C_t}{C_x \cdot B_t - B_x \cdot C_t} \quad [7]$$

$$v = \frac{C_y - m \cdot C_x}{C_t \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \quad [8]$$

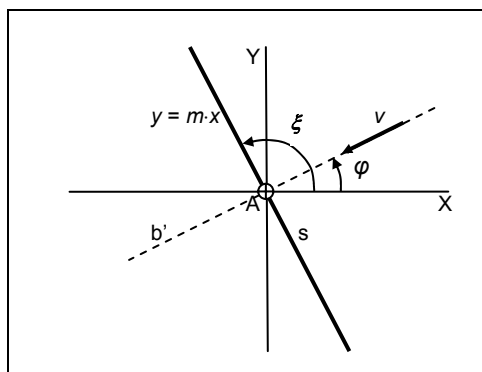
Met formule [7] is de richtingscoëfficiënt  $m$  van de snijlijn tussen het showerfront S en het aardoppervlak A te bepalen uit de plaats- en tijdcoördinaten van de detectiestations B en C. Dan is dus ook de hoek  $\xi$  bekend, want  $m = \tan \xi$  en dus  $\xi = \arctan m$ . En daaruit volgt met formule [2] de azimut-hoek  $\varphi$  van het primair kosmisch deeltje:

$$\varphi = \arctan m - 90^\circ \quad [9]$$

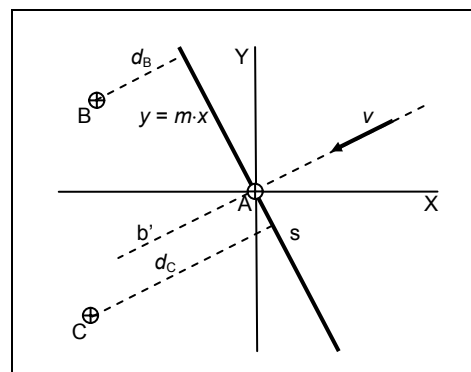
Als de richtingscoëfficiënt  $m$  met formule [7] bepaald is, volgt uit formule [8] de snelheid  $v$  waarmee de snijlijn tussen het showerfront S en het aardoppervlak A zich verplaatst. En daaruit volgt met formule [1] de zenit-hoek  $\theta$  van het primair kosmisch deeltje:

$$\theta = \arcsin(c/v) \quad [10]$$

De zenit-hoek  $\theta$  en de azimut-hoek  $\varphi$  van het primair kosmisch deeltje zijn dus met de formules [7] t/m [10] te bepalen uit de plaats- en tijdcoördinaten van de (drie) detectiestations. Daarmee is de richting van het primair kosmisch deeltje bekend.



Figuur 4 – De vergelijking van de lijn s door punt A wordt gegeven door  $y = m \cdot x$ . Voor de richtingscoëfficiënt  $m$  van deze lijn geldt:  $m = \tan \xi$ .



Figuur 5 – Voor het bepalen van de afstanden  $d_B$  en  $d_C$  van de punten B en C tot de lijn s bestaat een standaardprocedure.

- 3 De formules [3] en [4] geven de afstanden  $d_B$  en  $d_C$  van de punten B en C tot de lijn s. Deze formules zijn het resultaat van de standaardprocedure voor het bepalen van de afstand van een punt in het XY-vlak tot een lijn door de oorsprong A.
- Geef de afleiding van deze formules. Gebruik daarbij zo nodig de volgende aanwijzing (de standaardprocedure): ga uit van de vergelijking voor de lijn s ( $y = m \cdot x$ ), stel de vergelijking op van de lijn door B of C loodrecht op de lijn s, bepaal de coördinaten van het snijpunt D van deze twee lijnen en bepaal daarmee de afstand BD of CD.

- 4 De formules [7] en [8] voor de grootheden  $m$  en  $v$  geven de oplossing van het stelsel vergelijkingen [5] en [6].
- Controleer of deze oplossing juist is.
- 5 De richting (zenit-hoek  $\theta$  en azimut-hoek  $\varphi$ ) van het primair kosmisch deeltje is uiteindelijk te bepalen met de formules [7] t/m [10]. In de tabel hieronder staan de data van een gesimuleerde coincidentie op een drietal detectiestations. De plaatscoördinaten ( $x$  en  $y$ ) zijn gegeven ten opzichte van een willekeurig punt. De aankomsttijd  $t$  van de airshower is gegeven ten opzichte van een willekeurig tijdstip.
- Bepaal uit deze data de richting van het primair kosmisch deeltje. Gebruik daarbij zo nodig de volgende aanwijzingen:
    - Bepaal eerst wat in dit geval de detectiestations A, B en C zijn. Pas het coördinatenstelsel daarop aan.
    - Maak een schets van de ligging van de detectiestations A, B en C in het XY-vlak. Schets daarin ook de geschatte ligging van de lijn  $s$  door detectiestation A op grond van de aankomsttijden van het showerfront bij de detectiestations B en C. Dit helpt bij het bepalen van de juiste waarden van de hoeken  $\xi$  en  $\varphi$  op grond van het resultaat van het rekenwerk met de formules [7] en [9]. Deze formules kunnen namelijk een negatieve waarde van een hoek opleveren: een hoek tussen de positieve X-as en de lijn  $s$  'met de klok mee'. Een dergelijke negatieve hoek moet worden omgerekend naar een hoek tussen de positieve X-as en de lijn  $s$  'tegen de klok in' zoals gedefinieerd in figuur 4.
    - Het rekenwerk met formule [8] kan een negatieve waarde van de snelheid  $v$  van het showerfront opleveren. Dat heeft te maken met de bewegingsrichting van het showerfront. Voor het bepalen van de hoek  $\theta$  met formule [10] is deze bewegingsrichting niet relevant. Werk in die formule dus met de absolute waarde van de snelheid  $v$ .

detectiestation	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	aankomsttijd $t$ ( $\mu\text{s}$ )
1	400	150	11,01
2	500	- 400	11,14
3	800	100	10,72

- 6 In de avond van 18 juli 2004 is door het HiSPARC-cluster Nijmegen de eerste coincidentie tussen drie detectiestations gemeten. In de tabel hieronder staan de data van deze drievoudige coincidentie, waarbij het coördinatenstelsel en de volgorde van de detectiestations al zijn aangepast.
- Bepaal uit deze data de richting van het primair kosmisch deeltje.

detectiestation	x-coördinaat (m)	y-coördinaat (m)	aankomsttijd $t$ ( $\mu\text{s}$ )
A	0,0	0,0	52,7
B	438,8	277,6	52,8
C	282,1	- 749,4	53,9