

Use to learn

Naar een zinvolle integratie van ICT in het wiskundeonderwijs

*Eindrapport van de werkgroep ICT
van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO
oktober 2008*



Colofon

uitgave:

commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, Utrecht
oktober 2008

Inhoudsopgave

Samenvatting	5
1. Inleiding	7
2. Visies op ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs	9
3. Kennis over ICT-gebruik in de wiskundeles	13
4. Wiskunde en ICT in de nieuwe examenprogramma's.....	17
5. Wiskunde toetsen en ICT	23
6. Conclusies en aanbevelingen.....	27
7. Referenties.....	29
8. Bijlagen	31
Bijlage A: Taak en samenstelling van de werkgroep.....	31
Bijlage B: The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics	32
Bijlage C: ICT in de nieuwe examenprogramma's.....	33
Bijlage D: ICT in de examenpraktijk in andere landen.....	38
Bijlage E: De GRM in de Nederlandse examenpraktijk	40
Bijlage F: Lijst van afkortingen	49

Samenvatting

Aanleiding voor dit rapport is de ontwikkeling van nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo. Daarin vinden accentverschuivingen plaats die een heroverweging van het gebruik van ICT in de wiskundeles met zich mee brengen. Tevens is de vraag hoe de examenpraktijk in de toekomst gestalte krijgt, nu ook de technologie zelf in ontwikkeling is. Een onderliggende visie op ICT-gebruik is nog niet uitgekristalliseerd. Het rapport richt zich dan ook op de volgende vragen:

- Hoe kan de visie van cTWO op de rol van ICT in de wiskundeles, zoals verwoord in het visiedocument 'Rijk aan betekenis', nader worden uitgewerkt?
- Welke kansen voor ICT-gebruik bieden de nieuwe examenprogramma's die cTWO ontwikkelt?
- Op welke manier kan ICT bij het examen een rol spelen?

Om deze te beantwoorden zijn internationale visiedocumenten geraadpleegd, is bestaand wetenschappelijk onderzoek geïnventariseerd, zijn de wiskundige functionaliteiten en de didactische functies van ICT in de concept-examenprogramma's uitgewerkt, is de rol van de grafische rekenmachines in de huidige examens geanalyseerd en zijn examenpraktijken in ons omringende landen onderzocht.

Een en ander heeft geleid tot de volgende conclusies:

1. Het belang dat cTWO toekent aan ICT voor het leren van wiskunde wordt internationaal breed onderschreven. De zorg voor de mogelijke risico's die daaraan kleven zien we in de publicaties van toonaangevende organisaties als ICMI en NCTM niet terug; wel wordt onderkend dat nog onvoldoende kennis en ervaring beschikbaar is om de potentie van ICT voor het wiskundeonderwijs optimaal te benutten.
2. In de visie van cTWO worden 'learn-to-use' en 'use-to-learn' als tegengesteld gepresenteerd. Een tweede conclusie is echter dat deze twee facetten veelal onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn. Verder verdient het 'learn-when-to-use' aandacht.
3. De conclusie is dat de mogelijke spanning tussen de inzet van ICT in de toetsing en het toetsen van papier-en-pen vaardigheden goed te hanteren is door middel van specifieke formuleringen die pen-en-papier methoden afdwingen. Afspraken hieromtrent verdienen aanscherping en betere verspreiding. Bij het CE wordt de GRM gebruikt, mits 'leeg' bij aanvang van de zitting. Bij minstens één van de onderdelen van het SE wordt de GRM en/of ander ICT-gereedschap gebruikt.
4. cTWO heeft in de nieuwe examenprogramma's terughoudendheid betracht met het benoemen van de wiskundige en didactische functionaliteiten die ICT biedt. De wiskundige functionaliteiten blijven beperkt tot functies, grafieken en tabellen en voor wiskunde AC statistiek. In de didactische functies overheerst het gebruik van ICT als gereedschap, terwijl met name bij wiskunde B aan het met de hand beheersen van basisvaardigheden een groot belang wordt gehecht.
5. Een aantal kansen voor het benutten van wiskundige functionaliteiten van ICT blijft hiermee onbenut. Voorbeelden daarvan zijn software voor Dynamische Grafieken en Meetkunde bij het meetkundeonderwijs in wiskunde B en software voor het modelleren en simuleren van dynamische systemen bij wiskunde D.
6. Tevens blijft een aantal didactische mogelijkheden onderbelicht. De didactische functie van ICT als oefenomgeving voor basisvaardigheden kan bijvoorbeeld worden uitgebuit. Daardoor worden ICT en pen-en-papier geen concurrerende media, maar versterken ze elkaar. ICT-gebruik hoeft niet ten koste te gaan van vaardigheden met pen-en-papier; wel moeten pen-en-papier vaardigheden onderhouden worden en functioneren in het onderwijs om operationeel te blijven.

Hieruit vloeit een dozijn aanbevelingen voort:

1. Neem meer wiskundige ICT-functionaliteiten expliciet op in de examenprogramma's dan wel de toelichtingen daarop. Dit geldt met name voor wiskunde B van havo en vwo.
2. Neem in de toelichtingen op de examenprogramma's meer expliciete verwijzingen op naar het didactisch gebruik van ICT. Denk met name aan het gebruik van ICT als oefenomgeving voor basisvaardigheden en als leermiddel voor de begripsvorming.
3. Leg in de examenprogramma's de nadruk niet exclusief op 'use-to-learn' maar besteed bijvoorbeeld in domein A ook aandacht aan het 'learn-to-use' in de zin van 'learn-when-to-use': maak dat leerlingen kunnen inschatten wanneer het gebruik van ICT in termen van efficiëntie en betrouwbaarheid zinvol is en wanneer niet. Leer leerlingen zelf deze keuze te maken en leer hun met beleid gebruik te maken van (wiskundige) ICT-middelen.
4. Ontwikkel originele ICT-rijke voorbeeldtoetsen en formats voor het schoolexamen voor daarvoor geschikte domeinen.
5. Onderzoek de praktische bruikbaarheid van 'press-to-test' opties van grafische rekenmachines, om ervoor te zorgen dat leerlingen met een lege machine aan het centraal examen beginnen.
6. Creëer duidelijkheid over de formulering van opgaven die leerlingen zonder ICT moeten oplossen.
7. Neem in het CE een aantal (korte-antwoord) vragen op waarin basisvaardigheden met pen-en-papier worden getoetst.
8. Ontwikkel voorbeeldmateriaal voor een ICT-rijke aanpak van onderwijs in de in bijlage C als kansrijk geïdentificeerde domeinen. Laat pilots met dit materiaal uitvoeren.
9. Laat oefenomgevingen zoals DWO verder uitbreiden en vullen met oefeningen die gericht zijn op het verwerven van basisvaardigheden.
10. Start binnen wiskunde D experimenten rond de gebruiksmogelijkheden en didactische mogelijkheden van computeralgebra. Opdrachten kunnen daarbij gericht zijn op het ontwikkelen van wiskundige strategieën en het innemen van een hoger standpunt.
11. Initieer onderzoek naar de mogelijkheden en gevolgen van digitalisering van de wiskundeonderwijsmethoden. Het is belangrijk te weten of deze goed werken voor de bestaande boeken worden vervangen.
12. Zet de ontwikkeling in gang van een informatie-, communicatie- en scholingsprogramma rond ICT-gebruik voor zowel zittende wiskundedocenten als docenten in opleiding. Dit programma moet doelmatig en aantrekkelijk zijn en aansluiten bij de behoeften van docenten en bij bestaande initiatieven. Deelname dient te worden gefaciliteerd.

1. Inleiding

Voor u ligt het rapport van de werkgroep ICT van de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs cTWO, de vernieuwingscommissie wiskunde. Aanleiding voor de instelling van deze werkgroep en de totstandkoming van dit rapport is de levendige discussie die binnen en buiten cTWO wordt gevoerd over de mogelijkheden en beperkingen van het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs. Waar sommigen grote leerpotentie zien in ICT-middelen en ICT-rijk onderwijs als iets van deze tijd beschouwen, staan anderen er juist sceptisch tegenover en wordt verlies van basisvaardigheden gevreesd.

In dit rapport staat een drietal vragen centraal:

1. Hoe kan de visie van cTWO op de rol van ICT in de wiskundeles, zoals verwoord in het visiedocument 'Rijk aan betekenis', nader worden uitgewerkt?
2. Welke kansen voor ICT-gebruik bieden de nieuwe examenprogramma's die cTWO ontwikkelt?
3. Op welke manier kan ICT bij het examen een rol spelen?

De volledige taakstelling en de samenstelling van de ICT-werkgroep vindt u in bijlage A.

Het rapport kent de volgende opbouw.

- In hoofdstuk 2 wordt de visie van cTWO op het gebruik van ICT in de wiskundeles uitgewerkt en in internationaal perspectief geplaatst. Hiermee wordt een aanzet gegeven voor de beantwoording van vraag 1 hierboven.
- Hoofdstuk 3 vat kennis uit relevant wetenschappelijk onderzoek samen en vormt daarmee de basis voor het vervolg.
- Hoofdstuk 4 gaat in op de rol van ICT in het leren en onderwijzen van wiskunde. De huidige stand van zaken wordt geschetst en kansen voor zinvol ICT-gebruik in de nieuwe examenprogramma's worden geïdentificeerd. Daarmee gaan we in op vraag 2.
- In hoofdstuk 5 wordt de rol van ICT in schoolexamen en centraal examen behandeld, waarbij we tevens de examenpraktijk in enkele ons omringende landen beschrijven. Daarmee komt vraag 3 aan de orde.
- Hoofdstuk 6 bevat eindconclusies en aanbevelingen.

De visieontwikkeling in dit rapport richt zich op de middellange termijn. ICT ontwikkelt zich echter snel en deze ontwikkelingen laten zich moeilijk voorspellen. Hoewel de werkgroep heeft gepoogd hierop te anticiperen, kan de concretisering van de visie slechts de korte termijn betreffen en zullen evaluatie en aanpassing hiervan de komende decennia nodig zijn.

2. Visies op ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs

Vanuit welke visies kan men het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs tegemoet treden? In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de visie van de vernieuwingscommissie cTWO, wordt deze in een internationaal perspectief geplaatst en komt een toekomstperspectief aan de orde.

De visie van cTWO

Binnen de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO is uitgebreid gesproken over de visie op ICT in het wiskundeonderwijs. Hoofdstuk 7 van het visiedocument is aan deze discussie gewijd en opent met de volgende constatering:

In samenleving en beroepspraktijk heeft informatie- en communicatietechnologie (ICT) een steeds grotere plaats, die het onderwijs niet kan en mag negeren. Maar wat is de rol van ICT in het leerproces? De inzet van moderne ICT-middelen in de wiskunde en in het wiskundeonderwijs bevindt zich in de beginfase. Hoewel deze nieuwe onderwijsvormen mogelijk maken, is een weloverwogen koers nog niet uitgekristalliseerd. (cTWO, 2007, p. 39)

De conclusies van dat hoofdstuk worden samengevat in de volgende twee standpunten (cTWO, 2007, p. 42-43).

10

Standpunt 10

De rol van educatieve software moet zijn 'use to learn' en niet 'learn to use'. Het gebruik van ICT staat ten dienste van het onderwijsproces, van het leren van wiskunde. Bij het gebruik van ICT als rekengereedschap is het zaak ervoor te zorgen dat dit de ontwikkeling en het onderhoud van de basisvaardigheden niet in de weg staat. In dit licht is een heroverweging van het huidige gebruik van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs gewenst.

11

Standpunt 11

Onderzoek en experimenten op het gebied van een verantwoord gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs zijn noodzakelijk. Het voorgestelde onderzoek moet zich richten op

- a. het ontwikkelen van een ICT-didactiek die zich toespitst op 'use to learn';
- b. het tegengaan van de genoemde neveneffecten van de huidige generatie rekenmachines;
- c. het bestuderen van de mogelijkheden en onmogelijkheden van rekenmachines met faciliteiten voor symbolische manipulatie zoals computeralgebra.

Uit standpunt 10 spreekt een duidelijk primaat voor het vak wiskunde. Vanuit dit vakinhoudelijke perspectief wordt zorg geuit over ontwikkeling en onderhoud van wiskundige basisvaardigheden. Een algemener perspectief, dat van het voorbereiden van de leerling op een plaats in de

informatiemaatschappij, is hieraan ondergeschikt gemaakt. Dit algemenere perspectief komt wel enigszins aan de orde in domein A van de examenprogramma's. In het concept-examenprogramma wiskunde B vwo (versie 8 januari 2008, zie www.ctwo.nl) lezen we bijvoorbeeld:

De kandidaat kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen waaronder de grafische rekenmachine.

Standpunt 11 pleit voor onderzoek en experimenten rond een verantwoorde inzet van ICT in het wiskundeonderwijs. Samengevat is de visie van cTWO op het gebruik van ICT dus enerzijds dat het een plaats verdient in de eindtermen, terwijl het anderzijds de wiskundige ontwikkeling niet in de weg mag staan.

Internationaal perspectief

Hoe verhoudt zich de visie van cTWO tot de standpunten in de internationale gemeenschap van het wiskundeonderwijs? We beperken ons hier tot de posities van twee toonaangevende internationale organisaties rond wiskundeonderwijs, namelijk ICMI en NCTM.

ICMI is de International Commission on Mathematical Instruction¹. Deze organisatie is onderdeel van de wereldorganisatie van wiskundigen, de International Mathematical Union. ICMI organiseert een aantal studies. Eén daarvan, Study 17 (2004 – 2008) is getiteld 'Digital technologies and mathematics teaching and learning: rethinking the terrain'. De keuze voor dit onderwerp geeft aan dat ICMI het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs serieus neemt. In het discussiedocument van deze studie (IPC ICMI 17, 2005) lezen we het volgende:

Through ICMI Study 17, we will seek to identify and analyse some of the challenges in mathematics teaching and learning, practically and theoretically, in the light of the use of digital technologies. Most digital technologies do not make explicit how they work or how they can be used in mathematics education. This means that taking account of their design, particularly in terms of implications for epistemology, is a central challenge. But, as we attempt to incorporate new technological tools into teaching and learning, we also intend to make progress in trying to understand how the related epistemological structures are mediated by learning communities, and reciprocally, how learning communities are shaped by the artefacts and technologies in use.

De uitgangspunten van deze studie, zo blijkt uit het discussiedocument, zijn dat ICT-gebruik potentie heeft voor het leren van wiskunde, maar dat de relatie tussen ICT-gebruik en leren niet triviaal is en nadere studie behoeft.

De tweede internationale organisatie die zich recent over ICT in het wiskundeonderwijs heeft uitgesproken is NCTM, de Amerikaanse National Council for Teachers of Mathematics². NCTM heeft in maart 2008 haar standpunt ten aanzien van ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs geformuleerd. De kern van dit standpunt, dat integraal in bijlage B is opgenomen, luidt:

Technology is an essential tool for learning mathematics in the 21st century, and all schools must ensure that all their students have access to technology. Effective teachers maximize the potential of technology to develop students' understanding, stimulate their interest, and increase their proficiency in mathematics. When technology is used strategically, it can provide access to mathematics for all students.

¹ Zie <http://www.mathunion.org/ICMI/>

² Zie <http://www.nctm.org/>

Net als in de ICMI-positie benadrukt NCTM in haar standpunt het belang en de potentie van ICT. NCTM noemt drie functies van ICT, namelijk het bevorderen van het inzicht van leerlingen, het stimuleren van hun belangstelling en het vergroten van hun vaardigheid. Bij de tweede functie, die van het stimuleren van de belangstelling, kan men denken aan de motiverende werking van uitdagende (onderzoeks-)activiteiten waarin ICT een rol speelt. Bij de ontwikkeling van vaardigheden kan men denken aan docent-onafhankelijke oefening met gepersonaliseerde en adaptieve feedback. Al met al is er in de NCTM-visie geen plaats voor zorgen zoals in de cTWO-visie naar voren komen.

Deze twee positiebepalingen zien ICT als een krachtig medium voor het leren van wiskunde, al vraagt zinvolle integratie nog om onderzoek en ontwikkeling. De standpunten van cTWO staan dus niet op zichzelf, al lijken de cTWO-zorgen over vak en vaardigheid internationaal niet gedeeld te worden.

Toekomstperspectief

Hoe het educatief gebruik van ICT zich in de toekomst zal ontwikkelen, is moeilijk te voorspellen. Op middellange termijn (5 – 10 jaar) lijkt de toenemende rol van ICT in het onderwijs onomkeerbaar. De ‘C’ van communicatie is daarin belangrijk en wellicht zal het verknopen en verbinden van ICT-middelen een cruciale factor zijn op de middellange termijn. Connectiviteit van verschillende ICT-toepassingen, in welk formaat dan ook, zal een belangrijke ontwikkeling worden:

Thinking about the evolution of ICT in education, the key expression that comes to the fore is connectivity. The interest in personal communication strongly drives the need for connectivity. Even more than is the case nowadays, students and their teachers will communicate in oral or written form through the internet, through electronic learning environments, and through classroom connectivity facilities that allow for gathering students’ results from handheld devices and projecting them on an interactive whiteboard. Teachers will monitor students’ progress and students will be able to engage in Computer Supported Collaborative Learning. Computer tools offer options for file transfer between handheld and desktop devices, and between different types of software applications such as Dynamic Geometry Environments and Computer Algebra Systems. Computer tools are integrated into more general mathematical environments that integrate different mathematical topics. (Drijvers et al., in press)

Behalve de toenemende connectiviteit verwachten we dat de papieren schoolmethodes in toenemende mate worden aangevuld of vervangen door digitale methoden, oefenomgevingen en leerlingvolgsystemen. Van dergelijke systemen, en in educatieve software in het algemeen, zullen computeralgebrasystemen in toenemende mate de (onzichtbare) ruggengraat vormen. Of computeralgebra daarmee ook dagelijks gereedschap wordt voor de leerlingen is een onderwijspolitieke keuze, waaraan de commerciële partners zich zullen aanpassen.

Conclusie

De conclusie van dit hoofdstuk over visies op ICT in wiskundeonderwijs is allereerst dat het belang dat cTWO toekent aan ICT voor het leren van wiskunde internationaal breed wordt onderschreven. De zorg voor de mogelijke risico’s die daaraan kleven zien we in de publicaties van ICMI en NCTM niet terug; wel wordt onderkend dat nog onvoldoende kennis en ervaring beschikbaar is om de potentie van ICT voor het wiskundeonderwijs optimaal te benutten.

Om de visie van cTWO op de rol van ICT in de wiskundeles te concretiseren worden in het volgende hoofdstuk resultaten uit wetenschappelijk onderzoek besproken, die de basis vormen voor de voorstellen in de hoofdstukken daarna. De werkgroep heeft hierbij niet alleen de beperkte groep van toekomstige wiskundestudenten voor ogen, maar nadrukkelijk ook de leerlingen die wiskunde in vervolgopleiding en beroepspraktijk zullen toepassen en gebruiken. Tevens denkt de werkgroep, in de lijn van het NCTM-standpunt, niet in een dualiteit ICT-gebruik – vaardigheden, maar ziet zij het als een uitdaging om ICT-gebruik zodanig in het wiskundeonderwijs te integreren dat dit de ontwikkeling van inzicht en vaardigheid bevordert.

3. Kennis over ICT-gebruik in de wiskundeles

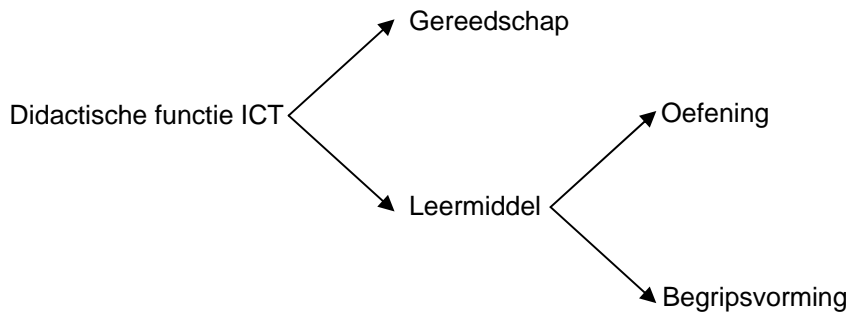
In de afgelopen decennia is veel onderzoek gedaan naar de inzet van ICT in de wiskundeles. Vanwege het feit dat het hier om een nieuw onderzoeksterrein gaat, en dat de ICT-toepassingen zelf aan voortdurende ontwikkeling onderhevig zijn, valt het niet mee om hieruit algemene conclusies te trekken. Toch zullen we proberen de hoofdlijnen van de onderzoeksresultaten weer te geven.

Eerst worden drie didactische functies van ICT in de wiskundeles besproken, die van gereedschap, oefenomgeving en leermiddel voor de begripsvorming. Vervolgens komen de resultaten uit onderzoek aan de orde aan de hand van drie ogenschijnlijke tegenstellingen:

- 'Learn to use' of 'use to learn'?
- ICT of pen-en-papier?
- Knoppentechniek of mentaal schema?

Didactische functies van ICT in het wiskundeonderwijs

Drijvers en Zwaneveld (in druk) onderscheiden drie didactische functies van ICT voor het wiskundeonderwijs: ICT als gereedschap om werk aan uit te besteden, en als leermiddel voor oefening dan wel begripsvorming.



In de eerste didactische functie, die van *gereedschap om werk aan uit te besteden*, wordt ICT gebruikt voor zaken die de leerling zelf zou kunnen uitvoeren, maar die (te) veel tijd in beslag zouden nemen. Men spreekt wel van 'outsourcing'. Denk aan min of meer routineuze handelingen zoals het uitvoeren van numerieke of algebraïsche berekeningen of het tekenen van grafieken of diagrammen. ICT functioneert hierbij als nuttig en praktisch gereedschap, zoals de gewone rekenmachine doet bij elementaire berekeningen. Behalve de gewone rekenmachine functioneert ook de grafische rekenmachine veelal als gereedschap bij het wiskundewerk.

Een tweede didactische functie van ICT is die van de *oefenomgeving*. ICT biedt voor oefening een aantal voordelen: het aantal oefenopgaven is door randomisatie van parameters vrijwel eindeloos, er kan diagnostische feedback worden gegeven die de docent ontlast. De computer is geduldig en consequent. De leerling bepaalt zelf hoeveel en wanneer wordt geoefend. Eventuele fouten daarbij zijn niet zichtbaar voor anderen, tenzij het leerlingewerk wordt opgeslagen en kan worden ingezien door de docent.

Voorbeelden van oefenomgevingen zijn de oefenapplets van het Freudenthal Instituut (www.wisweb.nl). Applets zijn kleine interactieve programmaatjes die vanuit een browser worden gestart en daardoor geen speciale installatie vereisen en altijd en overal toegankelijk zijn. In de oefenapplets worden vaardigheden als het uitwerken van haakjes of het oplossen van vergelijkingen geoefend. Door oefenapplets in serie te zetten, kunnen oefen- en leerlijnen worden vormgegeven.

Een derde didactische functie is dat ICT wordt ingezet ten behoeve van de *wiskundige begripsontwikkeling*. Het doel is dan dat de activiteiten met de ICT een bepaald denkproces op gang brengen. Het kan bijvoorbeeld zijn dat de ICT helpt het concept te visualiseren, waardoor een rijker en veelzijdiger wiskundig begrip ontstaat. Een representatie in de ICT-omgeving kan een bepaald denkmodel

bevorderen, zoals de weegschaal bij het oplossen van vergelijkingen of het rechthoeksmodel bij het uitwerken van haakjes. Een andere insteek is dat de ICT variatie mogelijk maakt, door bijvoorbeeld een invoergetal of parameter te veranderen met een schuifbalk of door een meetkundig object te verslepen. De dynamiek die zo ontstaat, maakt het onderscheid duidelijk tussen kenmerken die aan verandering onderhevig zijn en invariante eigenschappen. Hierdoor kan de leerling de situatie exploreren en patronen ontdekken. Ook kan de ICT-omgeving fungeren als generator van voorbeelden, die de nieuwsgierigheid prikkelen en voor de leerling aanleiding zijn om te generaliseren of om verbanden tussen eigenschappen of begrippen te onderzoeken. Op deze manier wordt een onderzoekende houding bevorderd. Veel ICT-middelen kunnen de rol van leermiddel voor de begripsontwikkeling spelen, mits er geschikte opdrachten en activiteiten voor ontwikkeld worden.

‘Learn to use’ of ‘use to learn’?

De vernieuwingscommissie wiskunde cTWO pleit in haar in hoofdstuk 2 geciteerde standpunt voor ICT-gebruik dat gericht is op het leren van wiskunde. Hoewel het leren gebruiken en toepassen van ICT in de huidige informatiemaatschappij een verdedigbaar onderwijsdoel is, wil dit standpunt uitdrukken dat ICT eerder middel dan doel is in de wiskundeles. Op zichzelf is dit een voor de hand liggend uitgangspunt. Dat neemt niet weg dat de gebruikte ICT-middelen van invloed zijn op het leerproces:

Tools matter: they stand between the user and the phenomenon to be modelled, and shape activity structures. (Hoyles & Noss, 2003, p. 341).

Onderzoek, bijvoorbeeld dat van Bakker (2004), laat zien dat de integratie van ICT in het onderwijs veelal ook leidt tot een aanpassing van onderwijsdoelen en van didactische aanpak. Het ‘learn-to-use’ opent nieuwe wegen voor het ‘use-to-learn’ en op die manier gaan de twee hand in hand. Als leerlingen bijvoorbeeld de intersect-techniek op de grafische rekenmachine leren kennen voor het numeriek oplossen van vergelijkingen (‘learn-to-use’), is dat ook van invloed op de begripsontwikkeling: een oplossing wordt gezien als een snijpunt van twee grafieken (‘use-to-learn’). In veel gevallen kan bij de inzet van ICT geen strikt onderscheid gemaakt worden tussen ‘use-to-learn’ en ‘learn-to-use’, maar zijn deze twee aspecten met elkaar verweven. Daarnaast is ook het ‘learn-when-to-use’ van belang: het vermogen om te kunnen inschatten wanneer het gebruik van ICT in termen van efficiëncy en betrouwbaarheid zinvol is en wanneer niet.

ICT of pen-en-papier?

ICT kan de gebruikelijke didactische aanpak in meer of mindere mate op zijn kop zetten. Daarbij is de vraag of het vertrouwde werk met pen en papier onder het ICT-gebruik lijdt. Onderzoeksresultaten ondersteunen deze vrees niet. Hoewel in Nederland bijvoorbeeld is gesteld dat het gebruik van de grafische rekenmachine de vaardigheden met pen en papier zou ondermijnen, stelt Vos (2007) dat dit niet hard gemaakt kan worden, omdat de invoering van de grafische rekenmachine gepaard ging met andere onderwijsvernieuwingen. Hoewel er dus geen causaal verband is aangetoond tussen ICT-gebruik en afnemende pen-en-papier vaardigheden, moeten pen-en-papier vaardigheden geoefend en onderhouden worden om operationeel te blijven. Wanneer ICT-gebruik ertoe leidt dat dit onderhoud niet meer plaatsvindt, valt een afnemende vaardigheid te verwachten.

Een tweede belangrijke conclusie uit onderzoek is dat ICT-gebruik kan bijdragen aan inzicht en vaardigheid zoals die ook met pen-en-papier van pas komen. Verschillende studies (bijvoorbeeld Heid, 1988; Kieran & Drijvers, 2006; Kieran & Damboise, 2007) suggereren dat een voorbereidende exploratie en begripsontwikkeling waarin ICT-middelen worden gebruikt het mogelijk maken om de basisvaardigheden snel en doeltreffend onder de knie te krijgen.

Knoppentechniek of mentaal schema?

Leren wordt veelal beschouwd als een continu proces van assimilatie en accommodatie van cognitieve, mentale schema’s. Hoe verhoudt zich dit tot het toepassen van technieken met een ICT-tool? Er is een

wisselwerking tussen het denken van de leerling enerzijds en het beschikbare ICT-gereedschap met een repertoire aan mogelijke technieken anderzijds. De mogelijkheden en de beperkingen van het gereedschap sturen het gebruik en daarmee de ontwikkeling van het denken; en andersom bepalen de beelden, strategieën en concepten in het hoofd van de leerling de manier waarop de ICT wordt gebruikt (of niet wordt gebruikt). Daarmee kan het werken met ICT een manier zijn om de schemaontwikkeling te bevorderen. Deze verwevenheid van machinetechniek en cognitief schema is de kern van de zogeheten *instrumentele benadering*³ van ICT-gebruik bij het leren van wiskunde (zie bijvoorbeeld Drijvers, 2007). Essentieel hierin is de samenhang tussen mogelijkheden en beperkingen van het ICT-gereedschap enerzijds, en het daardoor bevorderde of ontmoedigde wiskundig denken anderzijds. Bij cognitief gereedschap voor wiskunde, zoals rekenmachines of computers, zien we een interactie tussen het gereedschap en het type gebruik, samen met de bijbehorende manier van denken. Deze interactie betekent dat bij het werken met ICT een parallelle ontwikkeling plaatsvindt van technieken om het gereedschap te gebruiken en van cognitieve schema's. Het doel van het ICT-gebruik in de wiskundeles is dan ook dat de leerling de beoogde cognitieve schema's ontwikkelt in samenhang met de technieken om het gereedschap te gebruiken. De kunst voor onderwijsontwerpers en docenten bij de inpassing van ICT is dus om na te gaan op welke manier het ICT-gebruik het denken van de leerlingen in de beoogde richting kan bevorderen. Dat is een didactische vraag, waarop het antwoord van geval tot geval verschilt. Het omgaan met deze vraag vereist, zo blijkt uit recente onderzoeksliteratuur, een leerproces van de docent, dat ondersteund kan worden door een professionaliseringsaanbod.

Samengevat

De conclusies van dit hoofdstuk laten zich op de volgende manier samenvatten:

- 'Learn to use' en 'use to learn' zijn veelal niet duidelijk te scheiden. Praktische mogelijkheden en technische kenmerken of beperkingen van het ICT-gereedschap kunnen wiskundig interessante kwesties oproepen. 'Learn-when-to-use' verdient aandacht.
- ICT en pen-en-papier hoeven geen concurrerende media te zijn. Technieken en inzichten die tijdens het werken met ICT ontstaan, kunnen een positief effect hebben op het werken met pen-en-papier. ICT-gebruik hoeft niet ten koste te gaan van vaardigheden met pen-en-papier; wel moeten pen-en-papier vaardigheden onderhouden worden en functioneren in het onderwijs om operationeel te blijven.
- Het gebruik van ICT-gereedschap is een leerproces dat de gelijktijdige en samenhangende ontwikkeling van technieken en cognitieve schema's omvat. Mits ICT op een goede manier wordt ingezet, zal het denken niet stoppen als de machine aan gaat, maar kan het ICT-gebruik het denken juist bevorderen. De instrumentatieschema's die zo ontstaan zijn vruchtbaar voor het leren.

Deze bevindingen vormen een leidraad bij de identificatie van kansen voor zinvol ICT-gebruik, die in het volgende hoofdstuk plaatsvindt.

³ Deze benadering staat bijvoorbeeld centraal in het werk van de theoriegroep van de 17^{de} ICMI Study 'Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain', zie <http://icmistry17.didirem.math.jussieu.fr/>

4. Wiskunde en ICT in de nieuwe examenprogramma's

Welke rol speelt ICT in het wiskundeonderwijs van de huidige Tweede Fase van havo en vwo en welke rol zal ICT in de nieuwe examenprogramma's kunnen spelen? In dit hoofdstuk wordt eerst een aantal wiskundige functionaliteiten van ICT onderscheiden. Na een schets van de huidige situatie worden de toekomstige examenprogramma's wiskunde h/v tegen deze functionaliteiten afgezet. Dit leidt tot enkele aanbevelingen.

Wiskundige functionaliteiten van ICT

In het vorige hoofdstuk zijn drie didactische functies van ICT beschreven: ICT als gereedschap om werk aan uit te besteden, als leermiddel voor oefening en als leermiddel voor begripsvorming. In aanvulling daarop kunnen we ICT voor het wiskundeonderwijs als volgt indelen naar wiskundige functionaliteit:

- **Rekenmachine-functionaliteit (RM)**
Hieronder worden de functies van de wetenschappelijke rekenmachine verstaan, dus de rekenmachine zonder grafische mogelijkheden.
Voorbeeld: Casio fx-82.
- **Formules, grafieken en tabellen (FGT)**
Hieronder wordt verstaan de mogelijkheid om te werken met formules, grafieken en tabellen, en de relaties daartussen. Verder kunnen (numerieke) berekeningen worden uitgevoerd, zoals het bepalen van nulpunten. Eventueel kunnen iteratieve processen worden doorgerekend.
Voorbeelden: grafische rekenmachine, VU-Grafiek.
- **Dynamische Grafieken en Meetkunde (DGM)**
Hierbij wordt de FGT functionaliteit uitgebreid met een tweezijdige koppeling tussen grafieken en formules en dynamische meetkunde. Niet alleen wijzigt de grafiek bij wijzigen van de formule, maar ook wijzigt de formule bij transformatie van de grafiek. Dynamische meetkunde houdt in dat meetkundeobjecten gekoppeld worden aan andere objecten en dat de relatie tussen de objecten blijft gehandhaafd bij veranderingen.
Voorbeelden: Cabri (alleen voor het meetkundedeel), GeoGebra, TI-Nspire.
- **Statistische Gegevensverwerking en Statistische Simulatie (SGSS)**
Onder deze functionaliteit verstaan we de mogelijkheid om gegevens statistisch te verwerken (bijvoorbeeld middels statistische maten, diagrammen, verdelingen) en om door middel van een toevalsgenerator simulaties uit te voeren.
Voorbeelden: Excel, grafische rekenmachine, SPSS, VU-Statistiek.
- **Computeralgebra (CA)**
Onder deze functionaliteit verstaan we de mogelijkheid om symbolisch met formules te werken. Hieronder vallen bijvoorbeeld het bepalen van de afgeleide van een functie, het exact oplossen van vergelijkingen en het exact berekenen van een integraal.
Voorbeelden: Casio ClassPad 330, <http://www.calc101.com/>, Maple, Mupad, TI-Nspire CAS.
- **Modelleren en simuleren van dynamische systemen (MSD)**
Deze functionaliteit betreft de mogelijkheid om het dynamisch gedrag van continue of discrete systemen te analyseren met behulp van wiskundige modellen. Gedacht kan worden aan simulatie van wachtrijen en afkoelingsprocessen.
Voorbeelden: IP-Coach, Powersim.
- **Informatiebronnen (WINFO)**
Hieronder verstaan we alle ICT-bronnen van wiskundige informatie, zoals websites en digitale encyclopedieën. Uitgevers van wiskundemethoden bieden in toenemende mate ook digitale informatie aan. Daarnaast worden momenteel wiskundemethoden ontwikkeld, die uitgaan van intensief gebruik van internet.

Voorbeelden: Onderwijsmethode Getal en Ruimte, www.wolfram.com, Internetmethode MathAdore.

Deze indeling in wiskundige functionaliteiten is een hulpmiddel bij de inventarisatie van het ICT-gebruik in de huidige wiskundeonderwijspraktijk.

ICT-functionaliteiten in de huidige wiskundeonderwijspraktijk

Aan de hand van de hierboven genoemde wiskundige functionaliteiten van ICT brengen we hieronder de huidige praktijk van ICT-gebruik in havo en vwo in kaart.

- **Rekenmachine-functionaliteit (RM)**
In de onderbouw van havo en vwo gebruiken de leerlingen wetenschappelijke rekenmachines voor het gewone rekenwerk.
- **Formules, grafieken en tabellen (FGT)**
In de Tweede Fase van havo en vwo wordt hiervoor vooral de grafische rekenmachine (GRM) gebruikt. Vrijwel alle leerlingen in de Tweede Fase hebben een GRM in het bezit; op een klein aantal scholen wordt al in klas 3 begonnen met het gebruik van de GRM. Het momenteel meest gebruikte model is de TI-84 Plus van Texas Instruments. De meeste overige GRM's zijn van Casio, en dan met name de machines uit de FX-9850 en FX-9860 serie. Voor demonstraties in de klas worden de software-versies van de GRM's gebruikt.
Naast grafische rekenmachines worden ook spreadsheetprogramma's zoals Excel gebruikt, bijvoorbeeld voor het werken met rijen of bij praktische opdrachten. Excel wordt ook gebruikt in het zogeheten Compex-examen wiskunde A, waaraan veel scholen deelnemen.
Verder wordt voor FGT het programma VU-grafiek gebruikt. Practica met VU-grafiek staan in de wiskundemethoden *Moderne Wiskunde* en *Getal en Ruimte*.
- **Dynamische Grafieken en Meetkunde (DGM)**
Dynamische Meetkunde-programma's als Cabri en Geocadabra worden op verschillende scholen gebruikt als verkenningmiddel bij meetkundelessen. De pakketten worden opgevolgd door DGM-programma's als Geogebra (niet: Geocadabra) en mogelijk TI Nspire, die meetkundige en analytische functionaliteiten combineren. Geogebra is freeware.
- **Statistische Gegevensverwerking en Statistische Simulatie (SGSS)**
Van de programma's voor statistische gegevensverwerking wordt overwegend VU-Stat gebruikt. Practica met VU-Stat staan in de wiskundemethoden *Moderne Wiskunde* en *Getal en Ruimte*. Een alternatief is Excel. SPSS is gebruikersvriendelijk geworden, maar de mogelijkheden zijn te uitgebreid voor het voortgezet onderwijs.
- **Computeralgebra (CA)**
CA wordt praktisch niet gebruikt in het Nederlandse voortgezet onderwijs.
- **Modelleren en simuleren van dynamische systemen (MSD)**
MSD werd praktisch niet gebruikt in het Nederlandse voortgezet onderwijs in de wiskunde. Met de komst van wiskunde D kan hierin verandering komen.
- **Informatiebronnen (WINFO)**
De grootste wiskundemethoden leveren ICT mee met hun boeken en/of werkboeken. Van *Getal en Ruimte* is ook een webversie beschikbaar. Ook proefwerken en docentenhandleidingen zijn digitaal beschikbaar. Van *Moderne Wiskunde* en *Netwerk* zijn onder de naam I-Clips ICT-versies van werkboeken beschikbaar. *Matrix* is een relatief nieuwe methode van Malmberg, die beschikbaar is in zowel boekvorm als in de vorm van computerlessen. *Ratio* is een online-methode van de Radboud Universiteit, met materiaal voor de eerste twee klassen van het voortgezet onderwijs. De *Wageningse Methode* is een in eigen beheer uitgegeven methode die ook eigen software levert.
Naast de gangbare methoden zijn er verschillende initiatieven voor de ontwikkeling van digitale

materialen en methoden, zoals Wismaat en Mathadore. Deze methoden zijn in een experimenteel stadium en worden op enkele scholen ingezet.

De conclusie van deze inventarisatie is dat er in principe voldoende software beschikbaar is om in de benodigde wiskundige functionaliteiten te voorzien. De indruk is, dat het gebruik in de praktijk nog slechts op bescheiden schaal plaatsvindt, met uitzondering van de grafische rekenmachine. Daaraan liggen twee oorzaken ten grondslag. Ten eerste is de ervaring van docenten met ICT-gebruik in de les beperkt. Professionalisering van docenten is dan ook een belangrijke factor in het implementatietraject. Ten tweede is de infrastructuur voor ICT-gebruik op school veelal beperkt. Op dit laatste punt gaan we hieronder verder in.

Infrastructuur voor het gebruik van ICT in de huidige wiskundeonderwijspraktijk

Gebruik van de wiskundige en didactische functies van ICT in de onderwijspraktijk is natuurlijk mede afhankelijk van de beschikbaarheid van de technologie. Het merendeel van de VO-scholen beschikt over *computerlokalen*, waarin een groep leerlingen individueel of in duo's gebruik kunnen maken van computers. Deze lokalen kunnen in het algemeen alleen na reservering vooraf worden gebruikt. Lessen in de computerlokalen worden dus gepland en richten zich veelal op onderwerpen waarin ICT veel wordt gebruikt, zoals bijvoorbeeld statistiekprojecten.

Het overgrote deel van de wiskundelessen vindt echter plaats in reguliere *klaslokalen*, die in toenemende mate worden geëquipt met beamers, digitale schoolborden en een of enkele computers. Deze middelen zijn laagdrempelig voor de docent en worden gebruikt voor demonstratie van grafische rekenmachine, applet of andere ICT-toepassingen zoals dynamische meetkunde. De grafische rekenmachine is natuurlijk wel voor elke leerling beschikbaar tijdens lessen in een gewoon lokaal. Sommige scholen hebben laptopkarren, die het gewone klaslokaal kunnen worden binnengereden.

Mediatheken bieden computertoegang *buiten de lessen*. Daarnaast hebben vrijwel alle leerlingen thuis toegang tot internet. Sommige docenten zijn voor hun leerlingen ook buiten de lestijden om bereikbaar via een Messenger programma.

Veel scholen beschikken over een *elektronische leeromgeving* (ELO) zoals Blackboard, Moodle en Teletop. Een ELO helpt het onderwijs te organiseren door faciliteiten voor:

- opslag van informatie
- communicatie tussen leerlingen en docenten
- het volgen van de activiteiten van leerlingen
- het inleveren van werkstukken
- het opbouwen van een portfolio
- het maken en aanbieden van toetsen.

Specifiek wiskundige vullingen van een ELO zijn applets en (delen van) digitale methoden van uitgevers. Door applets te koppelen in een menu kunnen grotere eenheden worden gebouwd. In toenemende mate wordt ook de mogelijkheid ingebouwd om activiteiten van gebruikers te volgen. De Digitale WiskundeOmgeving DWO (<http://www.fi.uu.nl/dwo/>), waarop medio 2008 ruim 200 scholen zijn geabonneerd, ontwikkelt zich tot een wiskunde-specifieke ELO, waarin leerlingactiviteiten met betrekking tot applets geregistreerd en vastgelegd worden en door de docent gevolgd kunnen worden. Ook digitale methoden zoals ontwikkeld door uitgeverijen ontwikkelen zich in de richting van op wiskunde gerichte elektronische leeromgevingen.

ICT in de nieuwe examenprogramma's wiskunde h/v

De door cTWO ontworpen examenprogramma's voor wiskunde in havo en vwo vereisen de inzet van ICT. De werkgroep heeft de wiskundige en didactische positie van ICT in deze programma's nader geanalyseerd. Uitgangspunt van deze analyse, die in bijlage C is uitgewerkt, vormen de concept-programma's van september 2008 (zie www.ctwo.nl).

In tabel 1 zijn de vereiste *wiskundige functionaliteiten* van ICT samengevat die in de concept-examenprogramma's expliciet worden genoemd.

Wiskundige functionaliteit van ICT	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO
Wiskundevak							
havo A	V	V	V				V
havo B	V	V					V
havo D	V	V	V				V
vwo A	V	V	V				V
vwo B	V	V					V
vwo C	V	V	V ⁴				V
vwo D	V	V	V	V		V	V

Tabel 1: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in de nieuwe examenprogramma's

Uit deze tabel blijkt dat

- alle examenprogramma's een beroep doen op RM, FGT en WINFO
- de examenprogramma's wiskunde A en C daarnaast een beroep doen op SGSS
- de functionaliteiten DGM, CA en MSD nauwelijks of niet genoemd worden in de examenprogramma's.

Als het gaat om de *didactische functies* van ICT geeft de analyse het volgende beeld:

- havo A en vwo A
ICT wordt in deze programma's ingezet 'waar nodig'. In het programma voor vwo A wordt dit omschreven: ICT-gebruik wordt nodig geacht in die situaties waarin het rekenwerk 'niet meer in redelijke tijd met de hand gedaan kan worden'. Dit betekent dat ICT didactisch wordt ingezet als gereedschap. De didactische aspecten oefenomgeving en als leermiddel voor de begripsontwikkeling worden niet genoemd.
- havo B en vwo B
ICT-vaardigheden worden in dit programma geëist 'waar het gaat om het uitvoeren van meer complexe of bewerkelijke berekeningen en het verkennen van wiskundige situaties'. In het examenprogramma vwo B wordt 'use-to-learn' genoemd, als het gaat over de toepassing van ICT. Vwo B is overigens vooral gericht op het uitvoeren van wiskundige operaties zonder ICT. Dit betekent dat ICT didactisch wordt ingezet als gereedschap en leermiddel voor de begripsvorming. Inzet als oefenomgeving wordt niet genoemd.
- vwo C
ICT heeft in dit programma een plaats, maar de hier gestelde eisen kunnen ook zonder ICT worden gerealiseerd. Passende ICT-middelen, zoals rekenmachine, grafische en statistische software en spreadsheets, kunnen bij contextproblemen zinvol worden ingezet, omdat in realistische probleemsituaties vaak met benaderende numerieke waarden wordt gewerkt. Dit betekent dat ICT didactisch wordt ingezet als gereedschap (en dat in het kader van contexten). De didactische aspecten oefenomgeving en als leermiddel voor de begripsvorming worden niet genoemd in dit examenprogramma.
- havo D en vwo D
Havo D, als uitbreiding op havo B, is qua ICT vergelijkbaar met havo B. Dit betekent dat ICT didactisch wordt ingezet als gereedschap en leermiddel voor de begripsvorming. Inzet als oefenomgeving wordt niet genoemd.
Vwo D, evenals havo D een uitbreiding op wiskunde B, heeft een extra ICT-component. De bedoeling is dat ICT-middelen in dit domein een belangrijke illustratieve en

⁴ Hier wordt expliciet Excel genoemd

onderzoeksondersteunende rol kunnen spelen bij het onderwijs. Feitelijk worden hier aan toepassing van ICT geen grenzen gesteld.

Samenvattend ligt in de nieuwe programma's wiskundig de nadruk op de functionaliteiten van de rekenmachine, functies, tabellen, grafieken, en op de informatiefunctie van ICT. Voor wiskunde A en C komt daar nog de statistische functionaliteit bij. Qua didactische functies ligt de nadruk op inzet als gereedschap en als (tot verkennen beperkt) leermiddel in de begripsvorming. Alleen in wiskunde D van vwo wordt veel ruimte gegeven voor de inzet van ICT. Kansen voor ICT als oefenomgeving lijken niet te worden benut, wat verbaast, gelet op de nadruk op basisvaardigheden die met name uit de B-programma's spreekt.

Conclusie en aanbevelingen

De conclusie op basis van de analyse van dit hoofdstuk is dat cTWO in de nieuwe examenprogramma's terughoudendheid heeft betracht met het benoemen van de wiskundige en didactische functionaliteiten die ICT biedt. De wiskundige functionaliteiten blijven beperkt tot functies, grafieken en tabellen en voor wiskunde AC statistiek. In de didactische functies overheerst het gebruik van ICT als gereedschap, terwijl met name bij wiskunde B aan het met de hand beheersen van basisvaardigheden een groot belang wordt gehecht.

Op basis van deze analyse doet de werkgroep de volgende drie aanbevelingen ten aanzien van het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs volgens de nieuwe examenprogramma's:

1. Neem meer wiskundige ICT-functionaliteiten expliciet op in de examenprogramma's dan wel de toelichtingen daarop. Dit geldt met name voor wiskunde B van havo en vwo, waar tabel 1 op dit moment slechts weinig ICT-inzet weergeeft. Een functionaliteit die hiervoor in aanmerking komt is Dynamische Grafieken en Meetkunde, bijvoorbeeld voor het domein analytische meetkunde. Binnen wiskunde D van vwo verdient het gebruik van software voor het modelleren en simuleren van dynamische systemen aanbeveling.
2. Neem in de toelichtingen op de examenprogramma's meer expliciete verwijzingen op naar het didactisch gebruik van ICT. Denk met name aan het gebruik van ICT als oefenomgeving voor basisvaardigheden en als leermiddel voor de begripsvorming.
3. Leg in de examenprogramma's de nadruk niet exclusief op 'use-to-learn' maar besteed bijvoorbeeld in domein A ook aandacht aan het 'learn-to-use' in de zin van 'learn-when-to-use': maak dat leerlingen kunnen inschatten wanneer het gebruik van ICT in termen van efficiëntie en betrouwbaarheid zinvol is en wanneer niet. Leer leerlingen zelf deze keuze te maken en leer hun met beleid gebruik te maken van (wiskundige) ICT-middelen.
4. Start experimenten rond de gebruiksmogelijkheden en didactische mogelijkheden van computeralgebra. Opdrachten kunnen daarbij gericht zijn op het ontwikkelen van wiskundige strategieën en het innemen van een hoger standpunt. Omdat computeralgebra in toenemende mate in het buitenlandse wiskundeonderwijs een rol speelt, is het goed de (on-)mogelijkheden hiervan voor de Nederlandse situatie in kaart te brengen. Wiskunde D is voor een dergelijk experiment het meest geschikte vak.

5. Wiskunde toetsen en ICT

Inleiding: de ‘zonder-waaronder’ paradox

In hoofdstuk 2 is de zorg beschreven die cTWO in haar visiedocument uitsprekt ten aanzien van de ontwikkeling en het onderhoud van wiskundige basisvaardigheden in relatie tot de inzet van ICT. Dit leidt tot een ietwat dubbele houding, die we terugzien in de examenprogramma's. Het concept-examenprogramma wiskunde B vwo (versie 8 januari 2008) bevat bij domein A bijvoorbeeld de volgende eindtermen:

10. *Algebraïsche vaardigheden*

*De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige en algebraïsche vaardigheden en formules, heeft daar inzicht in en kan de bewerkingen uitvoeren **zonder** gebruik van ICT-middelen zoals de grafische rekenmachine.*

13. *Technisch-instrumentele vaardigheden*

*De kandidaat kan bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen **waaronder** de grafische rekenmachine.*

Deze dubbele positie, die blijkt uit de woorden ‘zonder’ en ‘waaronder’, heeft gevolgen voor de toetsing. Het feit dat beide eindtermen deel uitmaken van hetzelfde examenprogramma geeft aan dat de rol van ICT bij toetsing niet eenvoudig is af te doen als ‘wel ICT’ of ‘geen ICT’. Er zal onderscheid gemaakt moeten worden tussen de verschillende onderwerpen. Tevens ligt onderscheid tussen schoolexamen (SE) en centraal examen (CE) voor de hand. Immers, het centraal examen kent andere organisatorische voorwaarden dan het schoolexamen. Bovendien heeft het centraal examen een grotere invloed op de onderwijspraktijk dan het schoolexamen. Nu de nieuwe programma's meer nadruk leggen op algebraïsche vaardigheden, moet de rol van ICT op het CE dan ook worden heroverwogen.

In dit hoofdstuk bespreken we de rol van ICT bij toetsing. Uitgangspunt daarbij is dat de huidige structuur van schoolexamen en centraal examen niet ter discussie staat. Aan de orde komt allereerst welke wiskundige functionaliteiten van ICT, zoals in het vorige hoofdstuk geïdentificeerd, op schoolexamen en centraal examen een rol kunnen spelen. Vervolgens wordt ingegaan op de hierboven gesignaleerde spanning tussen ICT-gebruik en pen-en-papier vaardigheden. Hiertoe onderzoeken we de situatie in de huidige buitenlandse en binnenlandse examenpraktijk. Dan stellen we een aanpak voor met betrekking tot de rol van ICT in het schoolexamen en in het centraal examen voor de nieuwe programma's. In een korte paragraaf wordt apart ingegaan op de mogelijkheden van digitaal toetsen. Het hoofdstuk besluit met enkele conclusies.

Wiskundige en didactische functionaliteiten van ICT bij SE en CE

Tabel 1 van het vorige hoofdstuk geeft een overzicht van de wiskundige functionaliteiten van ICT die in de verschillende programma's een rol spelen. In alle wiskundevakken komen de Rekenmachinefunctie (RM), Formules, grafieken en tabellen (FGT) en de informatiefunctie (WINFO) van pas, bij wiskunde A en C tevens Statistische Gegevensverwerking en Statistische Simulatie (SGSS). Bij wiskunde B liggen er mogelijkheden voor Dynamische Grafieken en Meetkunde (DGM) en ComputerAlgebra (CA), en in wiskunde D voor Modeleren en Simuleren van Dynamische Systemen (MSD).

Inzet van de functionaliteiten *RM* en *FGT* bij toetsing ligt voor de hand. Hiervoor kan de grafische rekenmachine (GRM) worden gebruikt, waarmee zowel bij SE als CE inmiddels ruime ervaring bestaat. Voor het SE liggen er ook mogelijkheden voor software als Excel of VU-Grafiek. Het toetsen van algebraïsche vaardigheden met pen-en-papier kan interfereren met de FGT-functionaliteit van ICT. Daarop komen we verderop in dit hoofdstuk terug.

De *WINFO*-functionaliteit is niet zo eenvoudig. ICT-middelen bevatten wiskundige informatie in een of andere vorm, die in sommige gevallen (denk aan de GRM of aan de PC) ook door de leerling zelf kan worden uitgebreid. Sommige onderdelen van het schoolexamen (praktische opdrachten, onderzoeksprojecten) zullen een open-boek karakter hebben. In dat geval speelt de *WINFO*-functie een grote rol. We stellen voor dat de *WINFO*-functie op het CE geen rol speelt. Dat heeft als consequentie dat de grafische rekenmachine in een 'lege' toestand moet zijn aan het begin van het CE, dat wil zeggen in de toestand waarin de machine geleverd wordt, dus zonder programma's of teksten die de leerling daarop heeft opgeslagen.

De *SGSS*-functionaliteit is bij uitstek geschikt om ingezet te worden in zowel schoolexamen als centraal examen. Welke ICT-middelen uit die categorie ingezet worden hangt met name bij het centraal examen af van de organiseerbaarheid. De GRM kan in elk geval zijn diensten bewijzen. Het in het wiskunde C expliciet genoemde programma Excel zal zeker een plaats moeten krijgen in het schoolexamen en eventueel in het centraal examen, waarbij de in paragraaf geformuleerde meerwaarde en haalbaarheid in het oog moet worden gehouden. Bij projecten of praktische opdrachten in het kader van het schoolexamen ligt *VU-Stat* voor de hand.

De *DGM*-functionaliteit zou bij wiskunde B goed kunnen functioneren binnen de analytische meetkunde. Dat kan via software als Geogebra of Nspire, waarbij de laatste ook in GRM-formaat bestaat. Voor het SE zijn dit uitstekende opties; voor het CE stelt de werkgroep dit niet in eerste instantie voor. Wel kan dit op basis van de ervaringen bij het SE worden heroverwogen. Hetzelfde geldt voor de ComputerAlgebra functionaliteit (*CA*). Ook daarvoor is middels Maple, Mupad, Nspire of symbolische rekenmachine plaats in het SE, maar op dit moment niet op het CE.

Het vak wiskunde D kent alleen een schoolexamen. De mate waarin ICT ingezet kan of moet worden bij de toetsing ervan is erg afhankelijk van de keuzes die de school maakt bij het invullen van het vak. Scholing en onderzoek naar de mogelijkheden en gevolgen van inzet van ICT bij toetsing, zijn net als algemener geformuleerd in het vorige hoofdstuk voor het wiskundeonderwijs als geheel, ook in verband met toetsing noodzakelijk. Het domein Dynamische Systemen leent zich goed voor de inzet van de *MSD*-functionaliteit.

Voor wat betreft de didactische functies van ICT constateren we het volgende. Waar ICT in het onderwijs didactisch als oefenomgeving en voor begripontwikkeling ingezet kan worden, zal bij toetsen de functie beperkt zijn tot die van gereedschap. Berekeningen die teveel tijd in beslag zouden nemen, kunnen worden uitbesteed.

ICT en pen-en-papier vaardigheden bij schoolexamen en centraal examen

Om een strategie te ontwikkelen voor het toetsen van papier-en-pen vaardigheden en tegelijk ICT een rol op het examen te geven, is een analyse uitgevoerd van de rol van ICT in de huidige buitenlandse en binnenlandse examenpraktijk.

De resultaten van een analyse van de rol van ICT in centrale eindexamens *in het buitenland* staan in bijlage D. Wat daarin opvalt, is dat ondanks de verschillende strategieën in alle landen maatregelen zijn genomen om het mogelijk te maken pen-en-papier vaardigheden af te vragen. Als alleen de wetenschappelijke rekenmachine is toegestaan, is dit natuurlijk geen probleem. Als krachtiger ICT-gereedschap wordt gebruikt, zijn er twee opties gangbaar. De eerste is om pen-en-papier vaardigheden te toetsen in een apart, technologievrij deel van het examen. Deze strategie wordt bijvoorbeeld in Scandinavische landen gevolgd. Een tweede optie is om de vraag zodanig te formuleren dat inzet van de beschikbare ICT-middelen alleen kan helpen om op ideeën te komen of resultaten te verifiëren. Dat is vergelijkbaar met de huidige situatie in Nederland bij het centraal examen, waar een onderscheid gemaakt wordt tussen "bereken" en "bereken exact". Hoewel dergelijke formuleringsafspraken tot kunstmatig jargon kunnen leiden, lijken beide opties naar tevredenheid te functioneren. De optie van een apart, technologievrij deel van een examen is in praktische zin vrij ingrijpend. De huidige regeling met de speciale formuleringen om papier-en-pen vaardigheden af te dwingen kan in praktijk nog worden aangescherpt maar biedt voldoende mogelijkheden. De huidige examenpraktijk kan dan ook worden voortgezet.

De analyse van de *binnenlandse examenpraktijk* heeft zich gericht op de invloed van het GRM-gebruik op het eindcijfer. De resultaten hiervan staan in bijlage E. De conclusie van deze analyse is dat de invloed van de GRM op het eindcijfer bij wiskunde B niet zo groot is. De GRM-technieken om vergelijkingen numeriek op te lossen komen het meest van pas. Het belang van algebraïsche vaardigheden wordt de afgelopen jaren onderstreept door een tendens om bij centrale examens wiskunde B meer te vragen naar exacte uitwerkingen. Bij wiskunde A is de invloed van de GRM groter, met name door de functie als ‘tabellenboek’ voor het bepalen van binomiale en normale kansen. Dit is geen probleem, aangezien het gebruik van een tabellenboek geen belangrijk leerdoel is dat moet worden getoetst.

ICT in het toekomstige schoolexamen

Voor het toekomstige schoolexamen bij de nieuwe examenprogramma's stelt de werkgroep een voortzetting van de huidige praktijk voor. Dat houdt enerzijds in dat de scholen vrij zijn in de keuze en rol van ICT-middelen die worden gebruikt. Anderzijds is het wel vereist om de ICT-eindtermen uit het domein A van de verschillende examenprogramma's in het SE te toetsen. Dat kan in traditionele toetsvorm, maar ook in de vorm van een praktische opdracht, een project of een mondelinge toets. In het SE kan aandacht aan pen-en-papier vaardigheden worden besteed door de eerder genoemde opties van hetzij een technologie-vrij SE, hetzij het gebruik van specifieke formuleringen om pen-en-papier methoden af te dwingen.

ICT in het toekomstige centrale examen

Ook voor de centrale examinering van de nieuwe programma's stelt de werkgroep geen grote wijzigingen voor. De internationale en nationale analyse maakt duidelijk dat de huidige praktijk voldoet, mits de kwestie van de terminologie voor het vragen naar exacte oplossingen nog wordt aangescherpt en duidelijker wordt gecommuniceerd.

Bij het centraal examen kan de grafische rekenmachine worden gebruikt. In verband met het afschaffen van de formulekaart, dat cTWO voorstelt, ligt het voor de hand de GRM in ‘lege’ toestand mee te brengen naar het examen. De zogeheten ‘press-to-test’ modus van de nieuwe generatie modellen biedt hiervoor mogelijkheden. Voor het toetsen van algebraïsche basisvaardigheden met pen en papier liggen korte-antwoord vragen wellicht voor de hand.

Digitaal toetsen

Het gebruik van digitale toetsen (opvolger Compex) zou wel een rol kunnen spelen in het centraal examen. Daarbij dient dan wel de meerwaarde ervan boven pen-en-papierexamens in het oog gehouden te worden en ook de technische en organisatorische haalbaarheid binnen scholen. Meerwaarde kan bijvoorbeeld gevonden worden in het verlagen van de correctiedruk en het uitbreiden van het aantal examenmomenten.

Minimale voorwaarden voor een omgeving voor digitale toetsen zijn de beschikbaarheid van een formule-editor en een grafiekentool voor leerlingen, onderliggende computeralgebra om leerlingresultaten te kunnen beoordelen, mogelijkheden voor de docent om vragen te ontwerpen, en mogelijkheden om open vragen te stellen. Deze technieken zijn voorhanden, maar integratie daarvan in een robuuste en betrouwbare toetsomgeving is nog onvoldoende gerealiseerd. De ontwikkelingen binnen projecten als NKBW zijn echter veelbelovend.

Conclusie

Aan het begin van dit hoofdstuk is er een spanning geconstateerd tussen de inzet van ICT in de toetsing en het toetsen van papier-en-pen vaardigheden. De conclusie van dit hoofdstuk, gebaseerd op analyse van de huidige examenpraktijk in binnen- en buitenland, is dat dit probleem in de huidige structuur goed is op te lossen. De werkgroep stelt dan ook voor dat de constructie van SE en CE blijft voortbestaan, waarbij de school vrij is in de inrichting van het SE en waarin leerlingen op het CE de grafische rekenmachine gebruiken. Voor het toetsen van papier-en-pen vaardigheden wordt de huidige aanpak van een specifiek

vocabulaire gehandhaafd, waarbij de afspraken hieromtrent aanscherping en betere verspreiding behoeven. De GRM wordt 'leeg' meegebracht naar het examen.

De periode waarin de nieuwe examenprogramma's naar verwachting zullen vigeren is dusdanig lang, dat bij het schetsen van mogelijke ontwikkeling op ICT-gebied een slag om de arm moet worden gehouden. Ontwikkelingen in op het gebied van toetsen en examens dienen gelijke tred te houden met de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Het is dus verstandig deze conclusies na verloop van tijd te evalueren. Alvorens verdergaande veranderingen te implementeren, zijn onderzoeksprojecten en experimenten vereist. In eerste instantie is het schoolexamen de meest geschikte plaats om ervaring met nieuwe toetsvormen en/of ICT-middelen op te doen.

6. Conclusies en aanbevelingen

In dit hoofdstuk worden de conclusies van het rapport op een rij gezet en wordt een aantal aanbevelingen gedaan.

Conclusies

In dit rapport staan drie vragen centraal, die we achtereenvolgens bespreken. De eerste vraag luidt: Hoe kan de *visie* van cTWO op de rol van ICT in de wiskundeles, zoals verwoord in het visiedocument ‘Rijk aan betekenis’, nader worden uitgewerkt?

1. Het belang dat cTWO toekent aan ICT voor het leren van wiskunde wordt internationaal breed onderschreven. De zorg voor de mogelijke risico's die daaraan kleven zien we in de publicaties van toonaangevende organisaties als ICMI en NCTM niet terug; wel wordt onderkend dat nog onvoldoende kennis en ervaring beschikbaar is om de potentie van ICT voor het wiskundeonderwijs optimaal te benutten.
2. In de visie van cTWO worden ‘learn-to-use’ en ‘use-to-learn’ als tegengesteld gepresenteerd. Een tweede conclusie is echter dat deze twee facetten veelal onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn. Verder verdient het ‘learn-when-to-use’ aandacht.

De tweede vraag van dit rapport luidt: Op welke manier kan ICT bij het *examen* een rol spelen?

3. De conclusie is dat de mogelijke spanning tussen de inzet van ICT in de toetsing en het toetsen van papier-en-pen vaardigheden goed te hanteren is door middel van specifieke formuleringen die pen-en-papier methoden afdwingen. Afspraken hieromtrent verdienen aanscherping en betere verspreiding. Bij het CE wordt de GRM gebruikt, mits ‘leeg’ bij aanvang van de zitting. Bij minstens één van de onderdelen van het SE wordt de GRM en/of ander ICT-gereedschap gebruikt.

De derde vraag die de werkgroep zich stelt luidt: Welke *kansen voor ICT-gebruik* bieden de nieuwe examenprogramma's die cTWO ontwikkelt? cTWO streeft naar eigentijds en doorstroomrelevant wiskundeonderwijs. ICT kan daaraan in de ogen van de werkgroep bijdragen door zorgvuldiger denken af te dwingen en te stimuleren, wiskunde uitdagender en afwisselender te maken, wiskundeonderwijs te moderniseren, gerichte feedback te geven aan leerlingen en het onderwijs op maat mogelijk te maken.

4. cTWO heeft in de nieuwe examenprogramma's terughoudendheid betracht met het benoemen van de wiskundige en didactische functionaliteiten die ICT biedt. De wiskundige functionaliteiten blijven beperkt tot functies, grafieken en tabellen en voor wiskunde AC statistiek. In de didactische functies overheerst het gebruik van ICT als gereedschap, terwijl met name bij wiskunde B aan het met de hand beheersen van basisvaardigheden een groot belang wordt gehecht.
5. Een aantal kansen voor het benutten van wiskundige functionaliteiten van ICT blijft hiermee onbenut. Voorbeelden daarvan zijn software voor Dynamische Grafieken en Meetkunde bij het meetkundeonderwijs in wiskunde B en software voor het modelleren en simuleren van dynamische systemen bij wiskunde D.
6. Tevens blijft een aantal didactische mogelijkheden onderbelicht. De didactische functie van ICT als oefenomgeving voor basisvaardigheden kan bijvoorbeeld worden uitgebuit. Daardoor worden ICT en pen-en-papier geen concurrerende media, maar versterken ze elkaar. ICT-gebruik hoeft niet ten koste te gaan van vaardigheden met pen-en-papier; wel moeten pen-en-papier vaardigheden onderhouden worden en functioneren in het onderwijs om operationeel te blijven.

Aanbevelingen

We besluiten dit rapport met aanbevelingen met betrekking tot examenprogramma's, examens, onderwijsontwikkeling, onderzoek en professionalisering.

Aanbevelingen met betrekking tot examenprogramma's

1. Neem meer wiskundige ICT-functionaliteiten expliciet op in de examenprogramma's dan wel de toelichtingen daarop. Dit geldt met name voor wiskunde B van havo en vwo.
2. Neem in de toelichtingen op de examenprogramma's meer expliciete verwijzingen op naar het didactisch gebruik van ICT. Denk met name aan het gebruik van ICT als oefenomgeving voor basisvaardigheden en als leermiddel voor de begripsvorming.
3. Leg in de examenprogramma's de nadruk niet exclusief op 'use-to-learn' maar besteed bijvoorbeeld in domein A ook aandacht aan het 'learn-to-use' in de zin van 'learn-when-to-use': maak dat leerlingen kunnen inschatten wanneer het gebruik van ICT in termen van efficiëntie en betrouwbaarheid zinvol is en wanneer niet. Leer leerlingen zelf deze keuze te maken en leer hun met beleid gebruik te maken van (wiskundige) ICT-middelen.

Aanbevelingen met betrekking tot examens

4. Ontwikkel originele ICT-rijke voorbeeldtoetsen en formats voor het schoolexamen voor daarvoor geschikte domeinen.
5. Onderzoek de praktische bruikbaarheid van 'press-to-test' opties van grafische rekenmachines, om ervoor te zorgen dat leerlingen met een lege machine aan het centraal examen beginnen.
6. Creëer duidelijkheid over de formulering van opgaven die leerlingen zonder ICT moeten oplossen.
7. Neem in het CE een aantal (korte-antwoord) vragen op waarin basisvaardigheden met pen-en-papier worden getoetst.

Aanbevelingen met betrekking tot onderwijsontwikkeling

8. Ontwikkel voorbeeldmateriaal voor een ICT-rijke aanpak van onderwijs in de in bijlage C als kansrijk geïdentificeerde domeinen. Laat pilots met dit materiaal uitvoeren.
9. Laat oefenomgevingen zoals DWO verder uitbreiden en vullen met oefeningen die gericht zijn op het verwerven van basisvaardigheden.
10. Start binnen wiskunde D experimenten rond de gebruiksmogelijkheden en didactische mogelijkheden van computeralgebra. Opdrachten kunnen daarbij gericht zijn op het ontwikkelen van wiskundige strategieën en het innemen van een hoger standpunt.

Aanbevelingen met betrekking tot onderzoek

11. Initieer onderzoek naar de mogelijkheden en gevolgen van digitalisering van de wiskundeonderwijsmethoden. Het is belangrijk te weten of deze goed werken voor de bestaande boeken worden vervangen.

Aanbevelingen met betrekking tot professionalisering

12. Zet de ontwikkeling in gang van een informatie-, communicatie- en scholingsprogramma rond ICT-gebruik voor zowel zittende wiskundedocenten als docenten in opleiding. Dit programma moet doelmatig en aantrekkelijk zijn en aansluiten bij de behoeften van docenten en bij bestaande initiatieven. Deelname dient te worden gefaciliteerd.

7. Referenties

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: CD Beta Press.
- cTWO (2007). *Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.
- Drijvers, P. (2007). Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs. *Pedagogische Studiën*, 84(5), 358-374.
- Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.A. (in press). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (eds.), *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*. New York/Berlin: Springer.
- Drijvers, P. & Zwaneveld, B. (in druk). Van knoppen naar kennis; Naar een functionele inzet van ICT in het wiskundeonderwijs. In: Van Streun, A., Zwaneveld, B. & Drijvers, P. (Red.), *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*.
- Heid, M.K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.
- Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In: Bishop, A.J., Clements, M.A., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F.K.S. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323-349). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- International Program Committee ICMI Study 17 (2005). Digital technologies and mathematics teaching and learning: rethinking the terrain ("technology revisited"). Discussion Document for the Seventeenth ICMI Study. *L'Enseignement Mathématique* 51, 351-363. Ook beschikbaar via <http://www.math.msu.edu/~nathsinc/ICMI/>
- Kieran, C., & Damboise, C. (2007). *How Can We Describe the Relation between the Factored Form and the Expanded Form of These Trinomials? - We Don't even Know If Our Paper-and-Pencil Factorizations are Right": The Case for Computer Algebra Systems (CAS) with Weaker Algebra Students*. Paper presented at the 31st PME Conference.
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(2), 205-263.
- NCTM (2008). The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics. A Position of the National Council of Teachers of Mathematics. http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Technology%20final.pdf
- Vos, P. (2007). Feiten en meningen. *Euclides*, 82(7), 250.

8. Bijlagen

Bijlage A: Taak en samenstelling van de werkgroep

Taak

De taak van de ICT-werkgroep is om de visie van cTWO op de rol van ICT in het wiskundeonderwijs, zoals verwoord in het visiedocument en in toelichtingen op examenprogramma's, nader uit te werken op de volgende punten:

1. Stand van zaken en algemene visie
Schets van stand van zaken rond ontwikkeling van, onderzoek naar en implementatie van ICT in de wiskundeles. Aspecten die hierin een rol spelen: internationaal perspectief, didactisch onderzoek, technisch / infrastructurele / implementatie aspecten, hardwareontwikkelingen, toekomst GR met of zonder CAS, kansen en valkuilen. Visie van cTWO globaal uitwerken en specificeren (zie www.ctwo.nl, publicaties).
2. ICT op het examen
Uitwerking van het cTWO standpunt ten aanzien van ICT-gebruik op het CE en het SE (zie examenprogramma's, www.ctwo.nl).
3. Identificatie van kansen voor ICT-gebruik in het onderwijs
Welke domeinen, welke tools, welke aanpak, welke doelen lenen zich voor de inzet van ICT? Welke rol voor ICT bij toetsing op het SE? Deze identificatie vormt het startpunt voor verder ontwikkelwerk en bijbehorende pilots rond het gebruik van ICT in de klas.

De werkgroep rapporteert uiterlijk 1 september 2008 aan cTWO door middel van een nota waarin bovengenoemde punten aan de orde komen.

Samenstelling

De werkgroep kent de volgende samenstelling:

- Jan Blankespoor, docent HBO en lid cTWO
- Christ van den Brand, docent VO en ICT-coördinator
- Wim Caspers, docent VO en WO
- Paul Drijvers, onderzoeker HO en lid cTWO (voorzitter)
- Nelly Michon, docente VO
- Gert Treurniet, docent VO
- Chris Zaal, docent WO en lid cTWO

Secretariële ondersteuning en redactie: Mark Uwland, Freudenthal Instituut

Bijlage B: The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics

A Position of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2008)

Question: What is the role of technology in the teaching and learning of mathematics?

NCTM Position: Technology is an essential tool for learning mathematics in the 21st century, and all schools must ensure that all their students have access to technology. Effective teachers maximize the potential of technology to develop students' understanding, stimulate their interest, and increase their proficiency in mathematics. When technology is used strategically, it can provide access to mathematics for all students.

Calculators and other technological tools, such as computer algebra systems, interactive geometry software, applets, spreadsheets, and interactive presentation devices, are vital components of a high-quality mathematics education. With guidance from effective mathematics teachers, students at different levels can use these tools to support and extend mathematical reasoning and sense making, gain access to mathematical content and problem-solving contexts, and enhance computational fluency. In a well-articulated mathematics program, students can use these tools for computation, construction, and representation as they explore problems. The use of technology also contributes to mathematical reflection, problem identification, and decision making.

The use of technology cannot replace conceptual understanding, computational fluency, or problem-solving skills. In a balanced mathematics program, the strategic use of technology enhances mathematics teaching and learning. Teachers must be knowledgeable decision makers in determining when and how their students can use technology most effectively. All schools and mathematics programs should provide students and teachers with access to instructional technology, including appropriate calculators, computers with mathematical software, Internet connectivity, handheld data-collection devices, and sensing probes. Curricula and courses of study should incorporate instructional technology in learning outcomes, lesson plans, and assessments of students' progress.

Programs in teacher education and professional development must continually update practitioners' knowledge of technology and its classroom applications. Such programs should include the development of mathematics lessons that take advantage of technology-rich environments and the integration of technology in day-to-day instruction, instilling an appreciation for the power of technological tools and their potential impact on students' learning and use of mathematics. All teachers must remain open to learning new technologies, implementing them effectively in a coherent and balanced instructional program. These tools, including those used specifically for teaching and learning mathematics, not only complement mathematics teaching and learning but also prepare all students for their future lives, which technology will influence every day.

Bijlage C: ICT in de nieuwe examenprogramma's

In onderstaande tabellen is aangegeven welke ICT-functionaliteiten in de concept-examenprogramma's wiskunde A, B, C en D van havo en vwo (versie september 2008) genoemd worden. In de meeste gevallen wordt ICT expliciet genoemd in de examenprogramma's; incidenteel wordt er impliciet van toepassing ervan uitgegaan. Per schooltype en wiskundevak wordt een overzicht gegeven.

havo A

Het examenprogramma havo A vermeldt: "De kandidaat beheerst de bij het eindexamen-programma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en, *waar nodig*, met ICT-hulpmiddelen." (Cursivering door werkgroep ICT). In de volgende onderdelen van het examenprogramma zijn ICT-hulpmiddelen nodig:

- gericht informatie kunnen verzamelen over de rol van de wiskunde in de maatschappij en de resultaten communiceren met anderen
- het kunnen rekenen met haakjes op de RM en het uitvoeren van combinatorische berekeningen
- het opstellen van een tabel en tekenen van een grafiek en het rekenen aan exponentiële functies
- verzamelde statistische data verwerken in een geschikte tabel of grafiek
- kans bepalen door toepassen van combinatoriek of simulatie en het berekenen van binomiale en normale kansen

DGM, CA en MSD worden in dit programma niet genoemd.

Tabel 2 vat deze gegevens samen.

Wiskundige functionaliteit van ICT	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO
Domeinen havo A							
Vaardigheden							V
Algebra en tellen	V						
Verbanden		V					
Verandering							
Onzekerheid			V				

Tabel 2: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma havoA

havo B

ICT-vaardigheden in dit programma betreffen het uitvoeren van meer complexe of bewerkelijke berekeningen en het verkennen van wiskundige situaties. In de volgende onderdelen van het examenprogramma zijn ICT-hulpmiddelen nodig:

- doelgericht informatie zoeken, verwerken en communiceren
- modeluitkomsten genereren
- een oplossingsstrategie correct toepassen
- bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen waaronder de grafische rekenmachine
- eenvoudige vergelijkingen numeriek oplossen
- grafieken tekenen, de evenredigheidsconstante berekenen
- RM-gebruik bij goniometrische en analytisch-algebraïsche berekeningen, vectorrekening en toepassingen van de stelling van Pythagoras en de sinus- en cosinusregel
- differentiequotiënten berekenen, lokale veranderingen van een functie met differentiaalquotiënt en numeriek-grafisch berekenen, optimaliseringsproblemen oplossen

SGSS, DGM, CA en MSD worden in dit programma niet genoemd.

Tabel 3 vat deze gegevens samen.

Wiskundige functionaliteit van ICT							
Domeinen havo B	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO
Vaardigheden	V	V					V
Functies, grafieken en vergelijkingen	V	V					
Meetkundige berekeningen	V						
Toegepaste Analyse 1		V					

Tabel 3: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma havoB

havo D

Voor de volgende onderdelen van het examenprogramma worden eisen gesteld aan de wiskundige ICT:

- doelgericht informatie zoeken, verwerken en communiceren
- modeluitkomsten genereren
- een oplossingsstrategie correct toepassen
- bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen waaronder de grafische rekenmachine
- statistische data verwerken, centrum- en spreidingsmaten hanteren, de statistische relatie tussen twee variabelen uitdrukken in een maat en deze gebruiken bij een voorspelling, ook met behulp van statistische software
- kansen bepalen door toepassen van combinatoriek of simulatie en het berekenen van binomiale en normale kansen
- exponentiële functies tekenen, formules opstellen en er berekeningen aan uitvoeren
- optimaliseringsproblemen oplossen
- goniometrische functies
- berekeningen uitvoeren met coördinaten en vectoren in de driedimensionale ruimte
- wiskunde in technologie

DGM, CA en MSD worden niet expliciet genoemd in dit programma.

Tabel 4 vat deze gegevens samen.

Wiskundige functionaliteit van ICT							
Domeinen havo D	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO
Vaardigheden							V
Statistiek en kansrekening	V		V				
Toegepaste analyse 2		V					
Ruimte meetkunde	V						
Wiskunde in technologie							
Keuzeonderwerpen							

Tabel 4: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma havoD

vwo A

ICT-gebruik wordt nodig geacht in die situaties waarin het rekenwerk niet meer in redelijke tijd met de hand gedaan kan worden. Bij statistische gegevensverwerking is ICT-gebruik vereist. ICT wordt alleen toegepast binnen het kader van de onderwezen wiskunde. Voor de volgende onderdelen van het examenprogramma worden eisen gesteld aan de wiskundige ICT:

- doelgericht informatie zoeken, verwerken en communiceren
- bewerkingen waar nodig uitvoeren met ICT-hulpmiddelen
- berekeningen met getallen, haakjes en variabelen uitvoeren
- grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met behulp van numerieke methoden, waar nodig met hulp van ICT
- (stelsels van) vergelijkingen van het type $ax + by = c$ en van bijbehorende ongelijkheden oplossen
- berekeningen met rijen uitvoeren
- statistische data verwerken in een geschikte tabel of grafiek
- kansen bepalen door toepassen van combinatoriek of simulatie en het berekenen van binomiale en normale kansen
- een parameter schatten of een statistische relatie tussen twee variabelen beschrijven

Tabel 5 vat deze gegevens samen.

Wiskundige functionaliteit van ICT							
Domeinen vwo A	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO
Vaardigheden							V
Algebra en tellen	V						
Verbanden		V					
Verandering		V					
Handelen bij onzekerheid			V				
Keuzeonderwerp							

Tabel 5: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma vwoA

vwo B

ICT-vaardigheden worden geëist waar het gaat om het uitvoeren van meer complexe of bewerkelijke berekeningen en het verkennen van wiskundige situaties.

Voor de volgende onderdelen van het examenprogramma worden eisen gesteld aan de wiskundige ICT:

- doelgericht informatie zoeken, verwerken en (ook digitaal!) communiceren
- modeluitkomsten genereren
- een oplossingsstrategie correct toepassen
- bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen waaronder de grafische rekenmachine
- grafieken tekenen
- een parametrisering van een figuur gebruiken om eigenschappen ervan vast te stellen
- afstand van figuren in het vlak uitrekenen

Dit leidt tot tabel 6, waarin de impliciete eis I is afgeleid uit de leerstofomschrijving van de parametervoorstelling.

Wiskundige functionaliteit van ICT								
Domeinen vwo B	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO	
Vaardigheden							V	
Formules, tabellen en grafieken		V						
Differentiaal- en integraalrekening	V							
Goniometrie		I						
Meetkunde en coördinaten	V							
Keuzeonderwerpen								

Tabel 6: Vereiste en impliciete (*I*) wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma vwoB

vwo C

ICT heeft hierin een plaats, maar de eisen hier gesteld kunnen ook zonder ICT worden gerealiseerd. Passende ICT-middelen, zoals rekenmachine, grafische en statistische software en spreadsheets, kunnen bij contextproblemen zinvol worden ingezet, omdat in realistische probleemsituaties vaak met benaderende getallen (of aantallen) wordt gewerkt.

Voor de volgende onderdelen van het examenprogramma worden eisen gesteld aan de wiskundige ICT:

- gericht informatie kunnen verzamelen over de rol van de wiskunde in de maatschappij en de resultaten mondeling en schriftelijk kunnen communiceren
- doelgericht gebruik maken van ICT (grafische en statistische software, rekenmachine en spreadsheet)
- rekenkundige vaardigheden bezitten
- reflecteren op de waarde van het redeneren met zekerheid binnen wiskundige systemen
- rekenen met roosters
- van standaardfuncties de verschillende representaties doelgericht gebruiken, en bijbehorende vergelijkingen oplossen, waar nodig met behulp van ICT
- statistische data verwerken in een geschikte tabel of grafiek
- kansen bepalen door toepassen van combinatoriek of simulatie
- statistische toets uitvoeren
- een parameter schatten of een statistische relatie tussen twee variabelen beschrijven
- aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren

Tabel 7 vat deze gegevens samen.

Wiskundige functionaliteit van ICT								
Domeinen vwo C	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO	
Vaardigheden	V	V	V ⁵				V	
Analyse en reflectie op rol van wiskunde								
Algebra en tellen	V							
Verbanden		V						
Verandering								
Handelen bij onzekerheid	V		V ⁶					
Logisch redeneren								
Vorm en ruimte								
Keuzeonderwerpen								

Tabel 7: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma vwoC

⁵ Excel wordt hier expliciet genoemd.

⁶ Excel wordt hier expliciet genoemd.

vwo D

De bedoeling is dat ICT-middelen kunnen in dit domein een belangrijke illustratieve en onderzoeksondersteunende rol spelen bij het onderwijs.

Voor de volgende onderdelen van het examenprogramma worden eisen gesteld aan de wiskundige ICT:

- doelgericht informatie zoeken, verwerken en (ook digitaal!) communiceren
- modeluitkomsten genereren
- een oplossingsstrategie correct toepassen
- bij het raadplegen van wiskundige informatie, bij het verkennen van wiskundige situaties, bij wiskundige redeneringen en bij het uitvoeren van wiskundige berekeningen gebruik maken van geschikte ICT-middelen waaronder de grafische rekenmachine
- combinaties en permutaties berekenen, kansen, verwachtingswaarden en varianties berekenen
- normale en binomiale verdelingen gebruiken
- afstanden berekenen
- meetkundige toepassingen met ICT onderzoeken
- complexe getallen omrekenen tussen de verschillende representaties

Tabel 8 vat deze gegevens samen.

Wiskundige functionaliteit van ICT	RM	FGT	SGSS	DGM	CA	MSD	WINFO
Domeinen vwo D							
Vaardigheden							✓
Kansrekening en statistiek	V		V				
Dynamische systemen 1		V					
Meetkunde				V			
Complexe getallen		V					
Dynamische systemen 2						V	
Wiskunde in wetenschap							
Keuzeonderwerpen							

Tabel 8: Vereiste wiskundige functionaliteiten van ICT in het nieuwe examenprogramma vwoD

Conclusie

Uit de tabellen blijkt allereerst dat de nieuwe examenprogramma's het meest beroep doen op de functionaliteiten FGT (functies, grafieken en tabellen) en SGSS (statistische gegevensverwerking en simulatie). Voor deze functies worden in de praktijk de grafische rekenmachine en (in veel mindere mate) VU-Stat en Excel gebruikt.

Vervolgens blijkt uit de tabellen dat de overige functies (DGM, CAS, MSD en WINFO) alleen kunnen worden toegepast in het kader van keuzeonderwerpen of toevoegingen aan het programma.

Uit de analyse blijkt dat de grafische rekenmachine in wiskunde B wordt teruggedrongen ten gunste van algebraïsch-wiskundige vaardigheden met pen en papier.

Bijlage D: ICT in de examenpraktijk in andere landen

Om een indruk te krijgen van de examenpraktijk bij het vak wiskunde met betrekking tot ICT is in het voorjaar van 2008 een schriftelijke enquête afgenomen onder 14 deskundigen in ons omringende landen. Criterium voor de selectie van de landen was dat er een centraal examen is ter afsluiting van het voortgezet onderwijs; criterium voor de selectie van de deskundigen was dat hij/zij goed is ingevoerd in de nationale examenpraktijk en betrokken is bij de ontwikkeling daarvan. De enquête kende een respons van 100%, waarbij een van de respondenten aangaf niet in staat te zijn verder te reageren. De respondenten hebben ook voorbeelden van recente examens en correctiemodellen beschikbaar gesteld.

Land	Type technology toegestaan	Technologie-gebruik gehonoreerd?
Italië	Wetenschappelijke rekenmachine	Nee
Duitsland (Beieren)	Wetenschappelijke rekenmachine	Nee
UK	Grafische rekenmachine (muv CP1 voor alle leerlingen)	Nee
Frankrijk	Symbolische rekenmachine	Nee
Nederland	Grafische rekenmachine	Ja
Luxemburg	Profielafhankelijk: Wet. RM of Symbolische rekenmachine	Ja (CAS examen)
Noorwegen	Twee delen: zonder ICT en met laptop of symbolische rekenmachine	Ja (deel 2)
Denemarken	Twee delen: zonder ICT en met laptop of symbolische rekenmachine	Ja (deel 2)
Zweden	Twee delen: zonder ICT en met laptop of symbolische rekenmachine	Ja (deel 2)
Duitsland (NRW)	Twee versies, een voor grafische en een voor symbolische rekenmachine	Ja

Tabel 9: Overzicht resultaten internationale enquête 'ICT in het eindexamen'

Tabel 9 vat de belangrijkste resultaten samen. De tweede kolom geeft aan welk type ICT de leerling tijdens het centraal examen kan gebruiken. Daarbij gelden in het algemeen de beperkingen dat geen communicatie toegestaan is. De derde kolom geeft aan of het ICT-gebruik ook werkelijk wordt gehonoreerd, dus of de leerling met het ICT-gebruik ook daadwerkelijk 'punten kan verdienen'.

Hoewel het hier te ver voert om de lokale examenpraktijken in meer detail te beschrijven, ontstaat uit de gegevens het volgende beeld.

- In alle landen zijn maatregelen genomen om het mogelijk te maken pen-en-papier vaardigheden af te vragen. Als alleen de wetenschappelijke rekenmachine is toegestaan, is dit natuurlijk geen probleem. Als krachtiger ICT-gereedschap wordt gebruikt, worden pen-en-papier vaardigheden getoetst in een apart, technologievrij deel van het examen. Een tweede optie is om de pen-en-papier vaardigheden af te dwingen door een specifieke formulering van de vraagstelling, in de geest van 'bereken exact' of 'integreer met behulp van de primitieve functie'. Hoewel dergelijke formuleringssafspraken tot kunstmatig jargon kunnen leiden, lijken beide opties naar tevredenheid te functioneren.
- In landen waarin technologie bij het examen is toegestaan, lijkt er een tendens te bestaan om niet alleen uitkomsten te vragen, maar ook aandacht te besteden aan een interpretatie, een redenering, een ander type rechtvaardiging, of een modelleerstap. Dergelijke vragen doen recht aan de veelheid van denkactiviteiten zoals cTWO die onderscheidt; het ontwerp van zulke toetsitems lijkt echter

geen eenvoudige zaak te zijn. Overigens houdt bijvoorbeeld Frankrijk vast aan vrij traditionele toetsopgaven, terwijl de symbolische rekenmachine bij het examen gebruikt kan worden.

Een uitgebreidere en met voorbeelden geïllustreerde analyse van de resultaten van deze enquête verschijnt in de Nieuwe Wiskrant van oktober 2008.

Bijlage E: De GRM in de Nederlandse examenpraktijk

Om inzicht te krijgen in de invloed van de grafische rekenmachine in recente centrale examens in Nederland, is een aantal examens geanalyseerd. We hebben ons beperkt tot wiskunde A12 en wiskunde B voor havo en vwo.

De volgende categorieën van GRM-rol zijn onderscheiden:

- GRM vereist voor statistische bewerkingen
- GRM vereist voor niet-statistische bewerkingen
- GRM-gebruik optioneel
- GRM-gebruik door de formulering van de vraag ('bereken exact') uitgesloten
- GRM-gebruik nutteloos

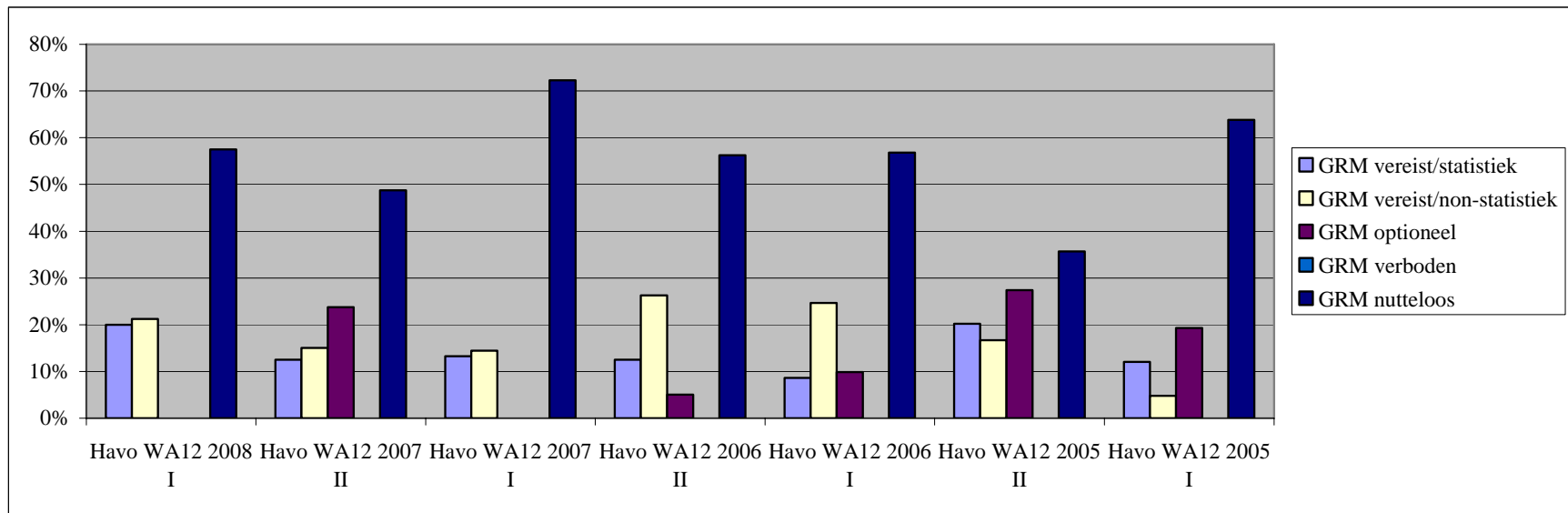
Bij elk examen-item is nagegaan welke rol van toepassing is. Dat leidt tot de tabellen 10, 11, 12 en 13 hieronder. Hieruit trekken we de volgende conclusies.

1. In de examens van wiskunde B speelt de GRM geen grote rol en vallen er met de GRM nauwelijks punten te verdienen. De voornaamste techniek die punten oplevert is het numeriek oplossen van vergelijkingen. In de toekomst, als statistiek helemaal uit wiskunde B verdwenen zal zijn, zal de invloed van GRM-gebruik op het eindcijfer nog kleiner worden.
2. In de examens wiskunde A12 is de invloed van de GRM groter vanwege de mogelijkheid om bij kansrekenen/statistiek kansen uit te rekenen. Het gaat hierbij met name om binomiale en normale kansen, die in het verleden met tabellenboek of wetenschappelijke rekenmachine werden bepaald. Naar het idee van de werkgroep is deze rol wenselijk, aangezien het gebruik van een tabellenboek geen belangrijk leerdoel is dat moet worden getoetst.

Vergelijking GRM invloed Havo WA12

Havo WA12 2008 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		6,7,8,20		3,13,14,15					1,2,4,5,9,10,11,12,16,17,18,19,21	
punten	80	16	20%	17	21%		0%	0%	46	58%
Havo WA12 2007 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		7,8,14		10,12,13		1,2,3,4,21			5,6,9,11,15,16,17,18,19,20,22	
punten	80	10	13%	12	15%	19	24%	0%	39	49%
Havo WA12 2007 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		15,18,19		5,11,14					1,2,3,4,6,7,8,9,10,12,13,16,17,20,21,22	
punten	83	11	13%	12	14%		0%	0%	60	72%
Havo WA12 2006 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		9,17,18		5,6,7,20,22		4			1,2,3,8,10,11,12,13,14,15,16,19,21	
punten	80	10	13%	21	26%	4	5%	0%	45	56%
Havo WA12 2006 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		6,7		8,11,13,21		14,2			1,2,3,4,5,9,10,12,15,16,17,18,19	
punten	81	7	9%	20	25%	8	10%	0%	46	57%
Havo WA12 2005 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		16,17,18,22		6,9,12,14		1,2,3,4,10,13			5,7,8,11,15,19,20, 21	
punten	84	17	20%	14	17%	23	27%	0%	30	36%
Havo WA12 2005 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden	GRM nutteloos	
opgaven		8,9,15		21		4,5,14,19			1,2,3,6,7,10,11,12,13,16,17,18,20,	
punten	83	10	12%	4	5%	16	19%	0%	53	64%

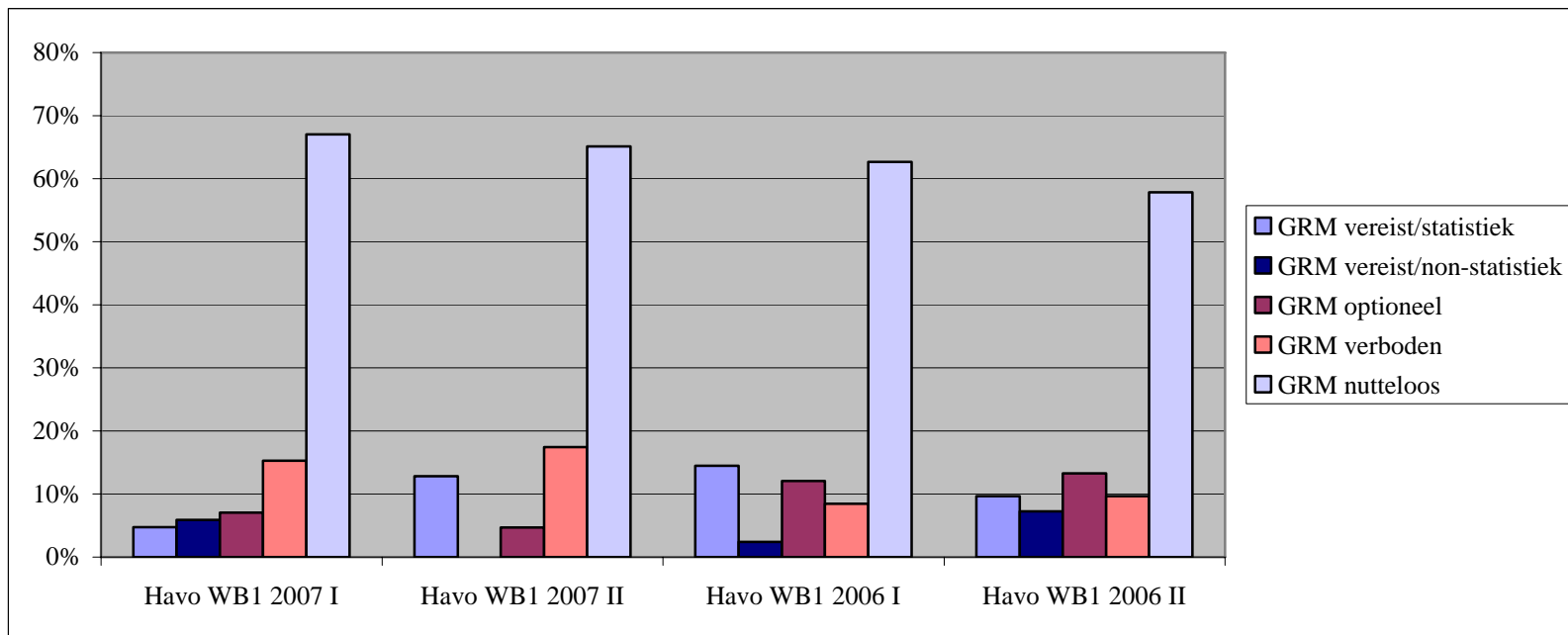
	GRM vereist/statistiek	GRM vereist/non-statistiek	GRM optioneel	GRM verboden	GRM nutteloos
Havo WA12 2008 I	20%	21%	0%	0%	58%
Havo WA12 2007 II	13%	15%	24%	0%	49%
Havo WA12 2007 I	13%	14%	0%	0%	72%
Havo WA12 2006 II	13%	26%	5%	0%	56%
Havo WA12 2006 I	9%	25%	10%	0%	57%
Havo WA12 2005 II	20%	17%	27%	0%	36%
Havo WA12 2005 I	12%	5%	19%	0%	64%



Vergelijking GRM invloed Havo WB1

Havo WB1 2007 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		5,6,16		9,10,11		3,4,7,8		18,19,20		1,2,12,13,14,15,17	
punten	85	4	5%	5	6%	6	7%	13	15%	57	67%
Havo WB1 2007 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		3,4,13,20		-		2		9,10,11,21		1,2,5,6,7,8,12,14,15,16,17,18,19,22	
punten	86	11	13%	0	0%	4	5%	15	17%	56	65%
Havo WB1 2006 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		3,12,13,18,20,21		16		1,2,10,22		8,23		4,5,6,7,9,10,11,14,15,16,17,19	
punten	83	12	14%	2	2%	10	12%	7	8%	52	63%
Havo WB1 2006 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		9,10,11,17		3,8		1,7,12,14,19		4,5		2,6,13,15,16,18,20	
punten	83	8	10%	6	7%	11	13%	8	10%	48	58%

	GRM vereist/statistiek	GRM vereist/non-statistiek	GRM optioneel	GRM verboden	GRM nutteloos
Havo WB1 2007 I	5%	6%	7%	15%	67%
Havo WB1 2007 II	13%	0%	5%	17%	65%
Havo WB1 2006 I	14%	2%	12%	8%	63%
Havo WB1 2006 II	10%	7%	13%	10%	58%

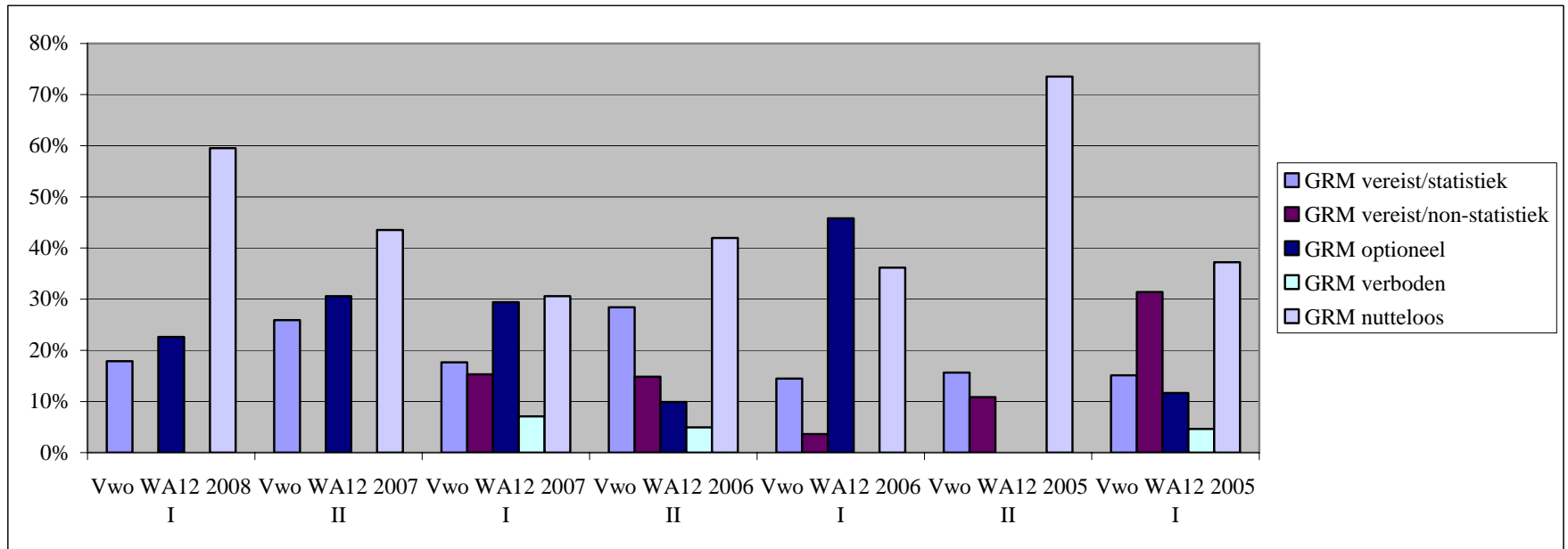


Vergelijking GRM invloed VWO WA12

Vwo WA12 2008 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		13,14,20,				2,3,9,19				1,4,5,6,7,8,10,11,12,15,16,17,18	
punten	84	15	18%		0%	19	23%		0%	50	60%
Vwo WA12 2007 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		7,8,14,15,16				2, 3, 9, 12,19,20				1,4,5,6,10,11,13,17,18	
punten	85	22	26%		0%	26	31%		0%	37	44%
Vwo WA12 2007 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		5,8,18		9,14,15		3,4,12,13,16		11		1,2,6,7,17,19,20	
punten	85	15	18%	13	15%	25	29%	6	7%	26	31%
Vwo WA12 2006 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		1,2,3,13,15		9,10,18		7,17		19		4,5,6,8,11,12,14,16,20	
punten	81	23	28%	12	15%	8	10%	4	5%	34	42%
Vwo WA12 2006 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		2,3		19		4,5,6,8,9,11,12,13,18,20				1,7,10,14,15,16,17	
punten	83	12	14%	3	4%	38	46%		0%	30	36%
Vwo WA12 2005 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		13,14,16		2,3						1,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,17,18,19	
punten	83	13	16%	9	11%		0%		0%	61	73%
Vwo WA12 2005 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		2,9,12		6,8,16,17,18,20,21		3,19		7		1,4,5,10,11,13,14,15	
punten	86	13	15%	27	31%	10	12%	4	5%	32	37%

	GRM vereist/statistiek	GRM vereist/non-statistiek	GRM optioneel	GRM verboden	GRM nutteloos
--	------------------------	----------------------------	---------------	--------------	---------------

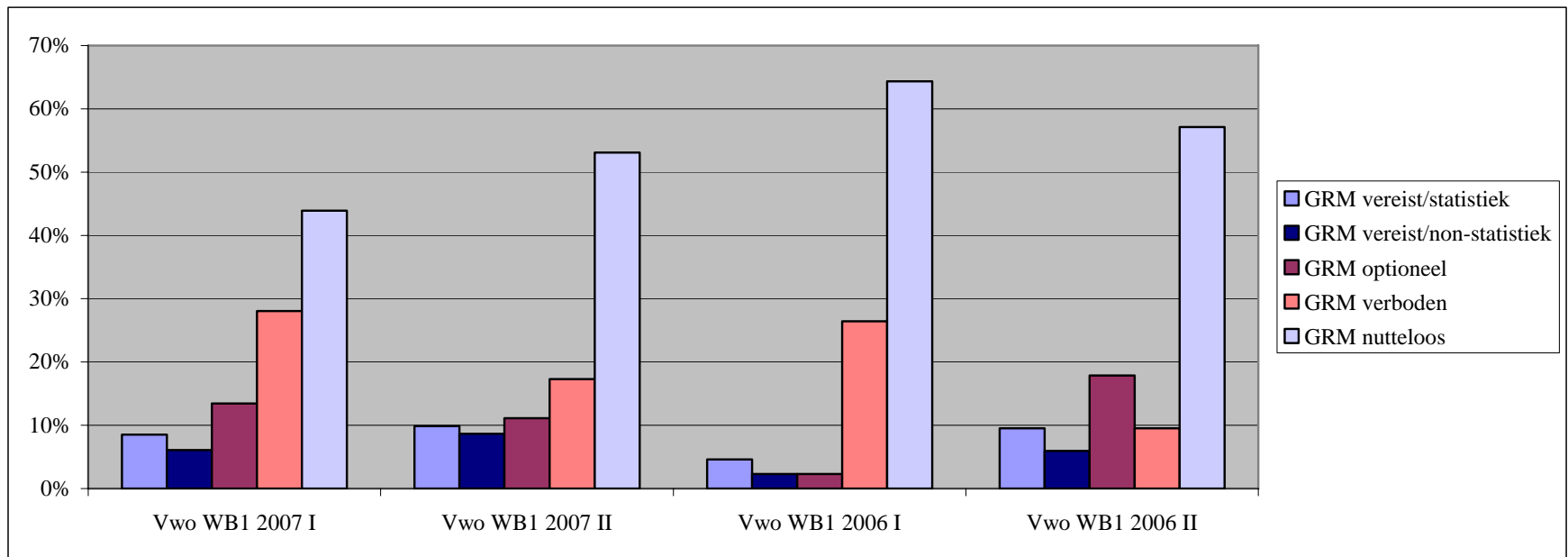
Vwo WA12 2008 I	18%	0%	23%	0%	60%
Vwo WA12 2007 II	26%	0%	31%	0%	44%
Vwo WA12 2007 I	18%	15%	29%	7%	31%
Vwo WA12 2006 II	28%	15%	10%	5%	42%
Vwo WA12 2006 I	14%	4%	46%	0%	36%
Vwo WA12 2005 II	16%	11%	0%	0%	73%
Vwo WA12 2005 I	15%	31%	12%	5%	37%



Vergelijking GRM invloed VWO WB1

Vwo WB1 2007 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		7,8,13,16		9,18,19		5,12,20		2,3,4,10,17		1,3,6,11,14,15	
punten	82	7	9%	5	6%	11	13%	23	28%	36	44%
Vwo WB1 2007 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		1,2,3,7		4,13		6,8,14,19		12,15,16		5,9,10,11,17,18	
punten	81	8	10%	7	9%	9	11%	14	17%	43	53%
Vwo WB1 2006 I		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		4,17		11		5		12,13		1,2,3,6,7,8,9?,10,14,15,16	
punten	87	4	5%	2	2%	2	2%	23	26%	56	64%
Vwo WB1 2006 II		GRM vereist/statistiek		GRM vereist/non-statistiek		GRM optioneel		GRM verboden		GRM nutteloos	
opgaven		5,6,16,17		4,13		3,8,10,11,12,14		9,18		1,2,7,15,19	
punten	84	8	10%	5	6%	15	18%	8	10%	48	57%

	GRM vereist/statistiek	GRM vereist/non-statistiek	GRM optioneel	GRM verboden	GRM nutteloos
Vwo WB1 2007 I	9%	6%	13%	28%	44%
Vwo WB1 2007 II	10%	9%	11%	17%	53%
Vwo WB1 2006 I	5%	2%	2%	26%	64%
Vwo WB1 2006 II	10%	6%	18%	10%	57%



Bijlage F: Lijst van afkortingen

CA - Computeralgebra (functionaliteit)
CE - Centraal Examen
cTWO - Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs
DGM - Dynamische Grafieken en Meetkunde (functionaliteit)
DWO - Digitale Wiskunde Omgeving
ELO - Elektronische LeerOmgeving
FGT - Formules, Grafieken en Tabellen (functionaliteit)
GRM - Grafische Rekenmachine
ICT - Informatie- en Communicatie-Technologie
ICMI - International Commission on Mathematical Instruction
MSD - Modelleren en Simuleren van Dynamische systemen (functionaliteit)
NCTM - National Council for Teachers of Mathematics (USA)
NKBW - Nationale Kennisbank Wiskunde Basisvaardigheden
NRW - Nordrhein Westfalen
RM - Rekenmachine (functionaliteit)
SE - SchoolExamen
SGSS - Statistische Gegevensverwerking en Statistische Simulatie (functionaliteit)
WINFO - Informatiebronnen (functionaliteit)