

Bijlage 2

Vectoren in de wiskunde en natuurkunde

Auteur: Joop van Dormolen (1975)

VECTOREN IN DE WISKUNDE EN IN DE NATUURKUNDE

Samenvatting van de voordracht van Joop van Dormolen.

Er zijn vier vragen te beantwoorden:

1. Waartoe dienen vectoren?
2. Hoe gebruik je ze?
3. Wat is een vector?
4. Wat doen we op school?

Antwoord op vraag 1

In de wiskunde worden hulpmiddelen bedacht om informatie, die vaak chaotisch op ons af komt, te ordenen. Voorbeelden van zulk soort informatie zijn:

- oppervlakte
- lengte
- massa
- kostprijs
- hoekgrootte
- temperatuur
- wedstrijdresultaten
- tijdsduur

Hierbij gaat het om informatie die door één getal, of (eventueel meetkundig) door één lijnstuk kan worden weergegeven, eventueel na keuze van een eenheid. Hiermee kunnen gegevens met elkaar vergeleken en geordend worden.

Er is ook informatie die niet door één getal vastgelegd kan worden. Voorbeelden:

- Winkelvoorraad:

Van elk artikel moet de hoeveelheid afzonderlijk vermeld worden.

Er ontstaat dan dus een rij getallen. (Als er n artikelen zijn dan is hier sprake van een vector in een n -dimensionale ruimte.)

- Kracht:

De grootte van de kracht kan aangegeven worden door een getal, maar daarnaast is nog een gegeven nodig om de richting aan te geven. Bij keuze van een coördinatenstelsel kan de kracht, eventueel ook door twee (of drie, dat hangt van de dimensie van de ruimte af waarin we werken) getallen vastgelegd worden.

- Beschrijving van de ruimte:

De plaats van een punt in een n -dimensionale ruimte moet door n getallen worden vastgelegd, of door een $(n$ -dimensionale) pijl die van de oorsprong naar het punt wijst.

- Verschuiving:

Een translatie kan worden vastgelegd door de afstand en de richting ervan te geven. Dit kan ook weer door een pijl, die we vector noemen, of door een paar getallen die de coördinaten aangeven van het beeldpunt van de oorsprong van het coördinatenstelsel.

- Ploegenwedstrijd met individuele uitslagen:

Elke deelnemer krijgt punten voor de uitslag van zijn wedstrijd.

De uitslag van de ploeg bestaat dan uit een rij getallen.

Er is sprake van een vector, in een ruimte waarvan de dimensie gelijk is aan het aantal deelnemers per ploeg. (Ook hier zou men een meetkundige voorstelling in de vorm van een pijl kunnen maken.)

- Rotatie:

Er zijn weer twee gegevens nodig, n.l. de draaihoek en de as waarom gedraaid wordt. Dit kan aangegeven worden door een vector, waarvan de lengte overeenkomt met de draaihoek; de richting geeft de draairichting aan; de werklijn van de vector geeft de rotatie-as aan.

Op soortgelijke manier kan men door de vector aangeven:

- Oplossing van een vergelijking met meer dan één onbekende.
- Snelheid.
- Impulsmoment
- enz. enz.

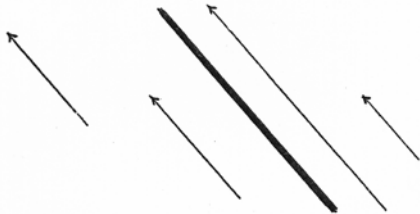
Opmerking:

Er zijn ook situaties waarbij de informatie niet door een rij getallen aangegeven kan worden (vector) maar door een schema: matrix. Voorbeelden hiervan zijn: De totale voorraad van een aantal filialen van een grootwinkelbedrijf en een tabel met twee ingangen.

Antwoord op vraag 2

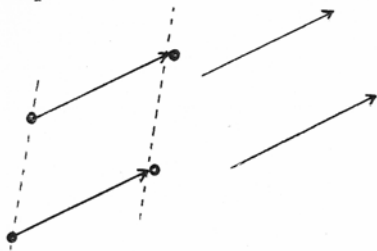
Hierbij treden moeilijkheden op doordat er blijkbaar verschillende soorten vectoren bestaan.

a. Richting van een lijn



- van belang is hier alleen de richting van de vector.
De grootte en de plaats van de vector zijn in deze situatie overbodige informatie.

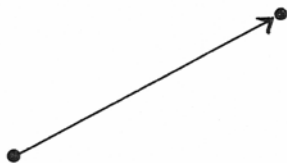
b. Verplaatsing van het vlak



- de vector die deze verplaatsing aangeeft wordt vastgelegd door richting en grootte.
De plaats van de vector is overbodige informatie.

Zowel bij a. als bij b. spreken we van een **VRIJE VECTOR**.

c. Verplaatsing van een object - bijvoorbeeld een punt.

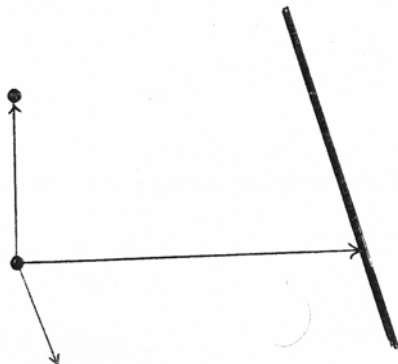


De vector die deze informatie vast moet leggen, wordt gegeven door richting, grootte en aangrijpingspunt.

Door het geven van het aangrijpingspunt is de plaats van de vector ook vastgelegd.

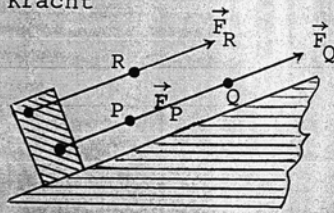
We spreken hier van een **GEBONDEN VECTOR**.

d. Plaats van een object



- bijvoorbeeld een punt.
Een vector die de plaats van een punt vastlegt, wordt vastgelegd door richting, grootte en een vast aangrijpingspunt, dat voor alle vectoren hetzelfde is: een **VASTE VECTOR**.
De plaats van een lijn moet zelfs door twee vectoren worden vastgelegd:
 - een plaatsvector (die een punt van de lijn aflegt) en
 - een richtingsvector (zie voorbeeld a.)

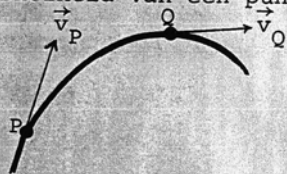
e. Kracht



- deze wordt vastgelegd door een vector, aangegeven door richting, grootte en werklijn.

Hier spreken we van een GLIJDENDE VECTOR.

f. Snelheid van een punt



- wordt vastgelegd door richting, grootte en aangrijpingspunt.

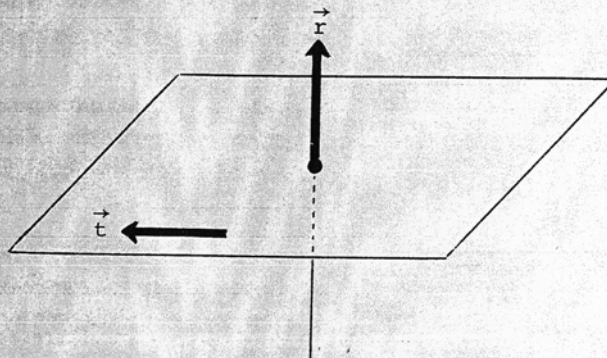
Net als bij voorbeeld c. hebben we hier een GEBONDEN VECTOR.

Samenvatting:

Er zijn blijkbaar vier verschillende soorten vectoren:

- I Vrije vectoren (richting, grootte);
- II Gebonden vectoren (richting, grootte, aangrijpingspunt);
- III Vastevectoren (richting, grootte en een vast aangrijpingspunt);
- IV Glijdende vectoren (richting, grootte, werklijn).

Er werd nog een voorbeeld gegeven van een situatie, waarbij verschillende soorten vectoren door elkaar gebruikt worden, n.l. de beweging van een lichaam. Deze wordt op elk moment vastgelegd door een vrije vector \vec{t} (translatie) en een glijdende vector \vec{r} (rotatie).



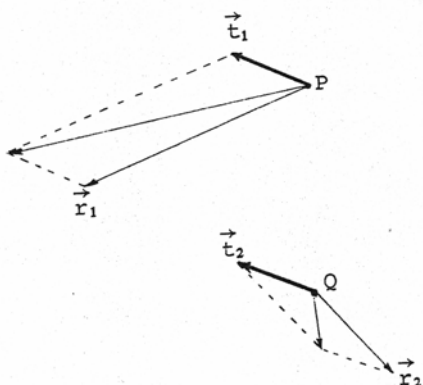
Dit wordt verduidelijkt als volgt:



De punten P en Q van het vlak bewegen zich volgens de aangegeven snelheden \vec{v}_1 en \vec{v}_2 .

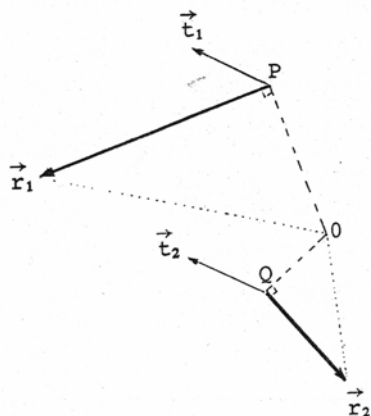
Het vlak beweegt mee.

Hoe beweegt het vlak?



Beide snelheden kunnen ontbonden worden in twee componenten \vec{t}_1 , \vec{r}_1 resp. \vec{t}_2 , \vec{r}_2 zodanig dat \vec{t}_1 en \vec{t}_2 evenlang en gelijk gericht zijn.

Deze vectoren zorgen voor een translatie van het vlak.



Bij de vectoren \vec{r}_1 en \vec{r}_2 bestaat een punt 0, zodanig dat:

$$\frac{|\vec{r}_1|}{OP} = \frac{|\vec{r}_2|}{OQ} \text{ en } \vec{r}_1 \text{ loodrecht op } OP$$

en \vec{r}_2 loodrecht op OQ.

Deze vectoren zorgen voor een rotatie van het vlak om 0.

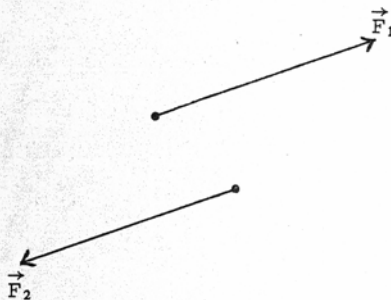
In alle gevallen kunnen (eventueel na een kunstgreep) twee gelijksoortige (!) vectoren meetkundig opgeteld worden door hetzij "kop-aan-staart leggen", hetzij door de parallelogramconstructie.

Antwoord op vraag 3

Voor de natuurkundeleraar zijn verschillende soorten vectoren geen probleem. Hij gebruikt die vector die voor hem op dat moment een goed instrument is.

De wiskundige is niet tevreden. Deze zoekt orde in de vectorenchaos te brengen, door middel van één overkoepelende structuur. Deze structuur heet vectorruimte. (Een vectorruimte is een verzameling, waarvan de objecten aan bepaalde voorgeschreven rekenregels voldoen.)

Het blijkt dat bijvoorbeeld glijdende vectoren niet aan al die regels voldoen. (Twee even grootte en tegengesteld gerichte krachten langs evenwijdige werklijnen kunnen niet tot een kracht worden opgeteld: koppel).



Door enige kunstgrepen ziet de wiskundige wel kans om alle types verschillende vectoren in een vectorruimte samen te brengen.

(Zie bijv.: P.G.J. Vredenduin, Vectoren, Euclides 1969-1970, pag. 377 - 384.) Dit gaat echter voor de schoolwiskunde te ver.

Antwoord op vraag 4

In sommige wiskundeleergangen worden zowel vrije als vaste vectoren gebruikt. Voor leerlingen kan alleen dit al moeilijkheden geven, laat staan dat ze bij de natuurkunde nog twee andere dingen ontmoeten, die ook allebei vector genoemd worden. (Overigens noemen niet alle leergangen een vrije vector ook inderdaad vector. Men spreekt dan bijvoorbeeld van een gericht lijnstuk, of een pijl, juist om verwarring te proberen te voorkomen.)

Het is dus zaak, zorgvuldige onderwijskundige maatregelen te nemen om te voorkomen, dat de leerlingen hopeloos in de war raken (klontering, zie voordracht over systemscheiding en transfer).

Een van die maatregelen zou kunnen zijn, duidelijk te laten merken in welke kontekst er gewerkt wordt. In elk geval is ook hier weer overleg tussen de natuurkunde- en de wiskundesectie geboden.

Vragen, opmerkingen en suggesties na afloop

1. Coördinatie tussen boekenschrijvers, respectievelijk de beide CML's blijkt ook hier weer dringend geboden.
2. Niet alleen de natuurkundeleraar moet oppassen dat zijn leerlingen goed weten, over welk soort vectoren het gaat, de wiskundeleraar zal ook rekening met dit probleem moeten houden.
3. Jammer dat nu pas over de coördinatie gesproken wordt, en niet bij de invoering van het nieuwe leerplan wiskunde.
4. Informatie, zoals die in deze conferentie naar voren komt, moet verder komen, bijvoorbeeld, door een gemeenschappelijke publicatie in Euclides en Faraday of op een andere manier.
5. Vraag: Bij alle soorten vectoren komen zowel grootte als richting voor. Het verschil zit hem in de plaats die al dan niet vast ligt. Waarom geven deze twee eigenschappen niet het algemeen vectorbegrip aan?

Antwoord: Voor een goede bruikbare structuur (vectorruimte) is het nodig dat er een vast aangrijpingspunt gekozen wordt. Dus de vaste vectoren kunnen deze structuur leveren.