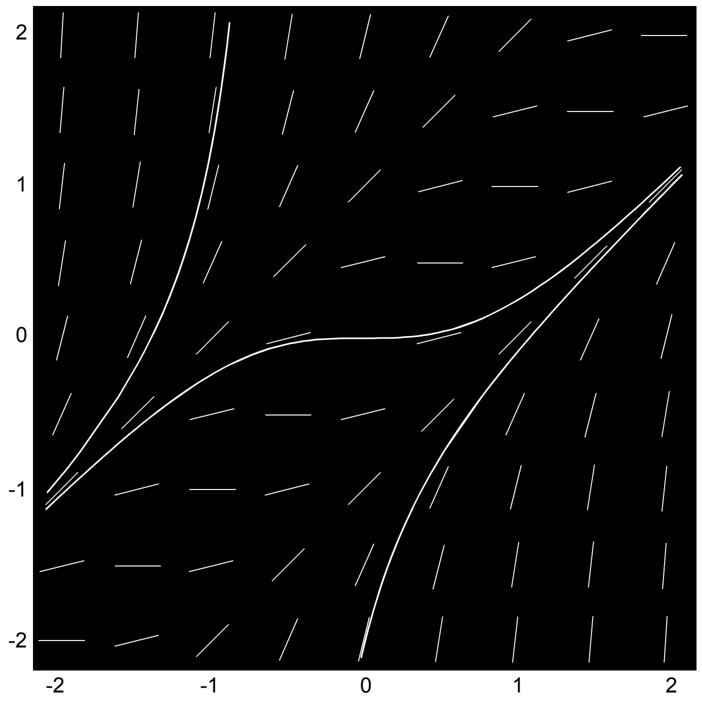
Continue Dynamische Modellen

Differentiaal- en Integraalrekening
deel 7



Nieuwe wiskunde tweede fase
Profiel N&G en N&T
Freudenthal instituut

Continue Dynamische Modellen

Project:	Wiskunde voor de tweede fase
Profiel:	N&G en N&T
Domein:	Differentiaal- en integraalrekening
Klas:	VWO 5/6
Staat:	Eerste herziene versie
Ontwerp:	Michiel Doorman, Paul Drijvers en Martin Kindt

Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030-2611611

Inhoud

Vooraf

In het eerste boek van deze serie (Som & Verschil, Afstand & Snelheid) heb je kunnen zien hoe Galileï het probleem van de vrije val heeft aangepakt.
De valsnelheid neemt toe naarmate de valafstand groter is; dat is een eenvoudig ervaringsfeit. De vraag voor Galileï was: *hoe* hangt de valsnelheid af van de valafstand.
Zijn allereerste gedachte was dat *valsnelheid* en *valafstand* evenredig zouden zijn. Al gauw moest hij deze hypothese verwerpen: zij was niet alleen foutief, maar zelfs onmogelijk! (Daar komen we op terug in dit boek).
Zijn tweede hypothese dat de *valsnelheid* evenredig is met de *valtijd* bleek te kloppen met de resultaten van allerlei experimenten en staat nu bekend onder de naam ‘valwet’.

dynamisch proces

Zinnen als

‘de valsnelheid is evenredig met de valweg’

en

‘de valsnelheid is evenredig met de valtijd’

geven een wiskundige beschrijving van wat we een *dynamisch proces* noemen.
In dit geval is ‘het vallen van een voorwerp’ het ‘proces’.
Omdat er sprake is van in de *tijd* veranderende grootheden (hier: *valweg* en *valsnelheid*) wordt het proces *dynamisc*h genoemd.
Andere voorbeelden van dynamische processen zijn: het temperatuurverloop op een dag, de groei van een populatie in een eeuw, de opname van medicijnen in het bloed gedurende een therapie, het verval van radioactiviteit, ...

discreet en continu

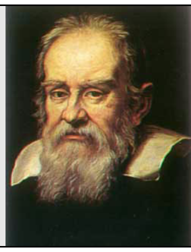
Het in wiskundige termen beschrijven van een (dynamisch) proces wordt tegenwoordig *modelleren* genoemd. Bij het opstellen van een *dynamisch model* zijn er twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is dat de veranderingen sprongsgewijs worden opgevat. Wie onderzoekt hoe de maximale dagtemperatuur in de loop van het jaar verandert, zal de tijd met stappen van één dag laten toenemen; kleinere tijdstappen hebben dan geen betekenis. Men spreekt in zo’n geval van een *discreet* model.
Als daarentegen de verandering als doorlopend proces wordt beschouwd - zoals bijvoorbeeld bij de vrije val van een voorwerp - spreekt men van een *continu* model.

continu dynamisch model

Dit boek gaat, zoals de titel belooft, voornamelijk over het opstellen en onderzoeken van zogenaamde *continue dynamische modellen*. Daarbij speelt het differentiaalquotiënt, als maat voor continue verandering, een belangrijke rol. Het is echter niet zo dat de ‘discrete aanpak’ geheel buiten beschouwing blijft. Soms is het handig om een continu model te onderzoeken via een discrete methode.

1 Modellen Van Galileï en Malthus

In het ‘vooraf’ kun je lezen dat Galileï twee modellen voor de vrije val heeft beschouwd.

eerste (foutieve) hypothese		tweede (correcte) hypothese
*val**snelheid** is evenredig val**weg***		*val**snelheid** **is** evenredig val**tijd***

Zo’n 40 jaar na de dood van Galileï werd de uitvinding van de differentiaalrekening bekend gemaakt. Met behulp daarvan kunnen bovenstaande hypothesen meer kernachtig worden geformuleerd
Stel de valweg (in meters) is y en de valtijd (in seconden) is t.
De valsnelheid is dan gelijk aan het differentiaalquotiënt $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
En we kunnen schrijven:

eerste (foutieve) hypothese		tweede (correcte) hypothese
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y$	na de uitvinding van de differentiaal-rekening	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g \cdot t$

Het symbool k in de eerste formule stelt de *evenredigheidsconstante* voor.
Hetzelfde geldt voor g in de tweede formule. In dat laatste geval heeft die constante nog een speciale betekenis: de valversnelling. Een veelgebruikte benadering voor g is 9.8, maar voor het gemak rekent men ook vaak met $g = 10$.

differentiaal-vergelijking

De twee ‘vergelijkingen’ hierboven worden *differentiaalvergelijkingen* genoemd.
Bij zo’n differentiaalvergelijkingen gaat het om het vinden van y als functie van t.
Als dat lukt, heb je een *oplossingsfunctie gevonden.*

1 **a.** In het correcte model is het vinden van een oplossingsfunctie vrij gemakkelijk. Ook als je nog niets van vrije val zou weten, zou je gemakkelijk een formule voor y als functie van t kunnen vinden. Welke formule en waarom?

b. Het foutieve model was voor Galileï de allereenvoudigste hypothese, maar is als differentiaalvergelijking wat lastiger. Dat komt omdat we nu eenmaal gewend zijn $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ uit te drukken in t en niet in y.
Als je wat dieper nadenkt, dan schieten je vast wel functies te binnen waarvan de *afgeleide gelijk is aan een constante maal de oorspronkelijke functie*. Welke functies zijn dat?

model van Malthus

Hoewel de eerste hypothese van Galileï foutief' bleek te zijn, is de differentiaalvergelijking die daarbij hoort wél de moeite waard. Er zijn namelijk allerlei dynamische processen waarvoor dit een redelijke beschrijving (of *model*) is. Het bekendste voorbeeld daarvan is de zogenaamde 'ongeremde populatiegroei'.
De Engelse dominee Malthus publiceerde in 1798 een boek onder de titel 'An Essay on the principle of population'. In dat boek beschreef hij een model voor bevolkingsgroei, gebaseerd op het volgende principe:

> *Binnen een gesloten bevolking zal zowel het aantal geboorten als het aantal sterfgevallen gedurende een zeker tijdsinterval evenredig zijn met:*
> *- het aantal leden van de bevolking op het tijdstip t - zeg N(t) of kortweg N*
> *- de lengte van het tijdsinterval - zeg Δt*

Stel het geboortepercentage per tijdseenheid gelijk aan g en het sterftepercentage gelijk aan s, dan wordt de toe- of afname van de bevolking (= ΔN) gedurende een tijdsinterval met lengte Δt gegeven door:

$$\Delta N = \frac{gN}{100} \cdot \Delta t - \frac{sN}{100} \cdot \Delta t$$

De *gemiddelde verandering* over zo'n tijdsinterval is dan:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{g-s}{100} \cdot N$$

En als je bovendien aanneemt dat dit voor *willekeurige kleine* tijdsintervallen geldt, dan:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{g-s}{100} \cdot N$$

De differentiaalvergelijking zegt dat de 'momentane groeisnelheid' evenredig is met N.

De evenredigheidsconstante in het model, het getal $\frac{g-s}{100}$, noemt men de *groei-index*.

2 **a.** Ga na of je de drie bovenstaande denk- en rekenstappen goed snapt.
b. Hoe zal, volgens dit model, de bevolkingsgrootte veranderen als $g > s$? En hoe als $g = s$? En hoe als $g < s$?

Neem nu een snel groeiende populatie, zeg met een groei-index van 5% per jaar.
N is de grootte van de bevolking uitgedrukt in miljoenen.
De differentiaalvergelijking die deze groei beschrijft is nu:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}05 \cdot N$$

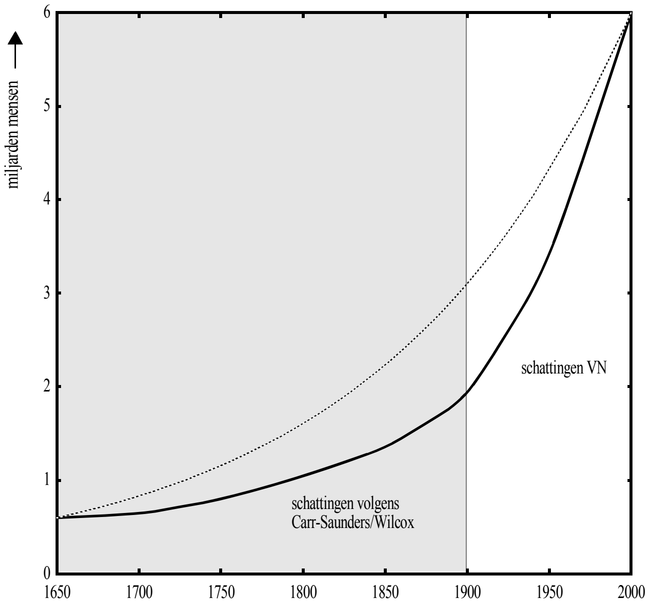
Je ziet dat dit net zo'n differentiaalvergelijking is als

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

maar dan met N op de plaats van y en 0.05 op de plaats van k.

3 Op grond van je kennis van differentiaalrekening kun je veronderstellen dat een oplossingsfunctie van $\frac{dN}{dt} = 0{,}05N$ de vorm $N(t) = a^t$ heeft.
a. Bereken a .
b. De oplossingsfunctie die je nu gevonden hebt, heeft de eigenschap: $N(0) = 1$. Dat betekent dat de populatieomvang op het tijdstip $t = 0$ gelijk is aan 1 miljoen.
We noemen dat de *beginwaarde*. Je kunt ook een oplossingsfunctie met een andere beginwaarde bedenken, bijvoorbeeld $N(0) = 2.4$. Welke functie kan dat zijn?
c. Met hoeveel % zal de populatie toenemen in 10 jaar?

4 De wereldbevolking is de afgelopen 350 jaar vertienvoudigd: van naar schatting 600 miljoen in het jaar 1650 tot ruim 6 miljard nu. Hieronder zie je een grafiek die dit illustreert.



De zwarte grafiek geeft bij benadering de geschatte wereldbevolking weer. De gestippelde grafiek geeft aan hoe de bevolkingsgroei verlopen zou zijn volgens het (exponentiële) model van Malthus.

a. Neem 1650 als $t = 0$ en 2000 als $t = 350$.
Bij de gestippelde grafiek past een formule van de vorm $N(t) = c \cdot a^t$.
Bereken a en c op grond van de gegevens in de tekst boven de grafiek.

b. Kijk naar de grafiek: in welk jaar was de werkelijke groeisnelheid ongeveer gelijk aan die volgens het Malthus-model? Hoeveel % bedroeg de jaarlijkse groei toen?

c. Probeer een paar redenen te bedenken, waarom het model van Malthus niet zo'n goede beschrijving van de werkelijke groei van de wereldbevolking is.

oplossingen raden

Om een klein beetje gevoel voor differentiaalvergelijkingen te krijgen ga je in de volgende opgave verstandig raden. Dat wil zeggen: je probeert een functie te vinden die voldoet. Daarbij hoef je niet verder te zoeken dan 'standaardfuncties'. Het controleren van je vondst is een kwestie van differentiëren en invullen.

5 Probeer bij elk van de volgende differentiaalvergelijkingen door verstandig raden een (niet-constante!) oplossingsfunctie te vinden:

a. $\dfrac{dy}{dt} = 2t$

b. $\dfrac{dy}{dt} = 2y$

c. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{t}$

d. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2y}$

e. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2y}{t}$

f. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3y}{t}$

6 Bedenk een nieuwe differentiaalvergelijking en leg die aan een klasgenoot voor.
Je moet zelf natuurlijk wél een oplossingsfunctie weten.

werkelijkheid en model

De werkelijkheid kan weerbarstig zijn. Dat betekent dat een veelbelovend wiskundig model soms drastisch moet worden aangepast, wil het enigszins betrouwbare voorspellingen geven. In opgave **4** heb je kunnen zien dat het model van Malthus de groei van de wereldbevolking niet al te best beschrijft. Dat heeft bijvoorbeeld te maken met het feit dat de groei-index niet constant geweest is gedurende al die jaren. Het Malthus model is te simplistisch. Een meer realistisch model dateert van 1837 en is afkomstig van de Belgische wiskundige Verhulst. Dat model van 'geremde groei' wordt in het volgende hoofdstuk behandeld.

7 Nog even terug naar Galileï. De valsnelheid is niet evenredig met de valweg, maar ... met de *'wortel uit de valweg'*.

a. Vertaal de laatste uitspraak in een differentiaalvergelijking.

b. Hoe groot is de evenredigheidsconstante bij benadering (neem voor de gravitatieconstante 9.8)?

Het Galileï-model voor de vrije val is een nauwkeurig model voor *vallen in het luchtledige*. Bij een val van grote hoogte krijg je echter al gauw te maken met luchtweerstand. Een parachutist die een poosje vrij wil vallen, bereikt in de zogenaamde kruishouding (zie foto) een maximumsnelheid van zo'n 200 km/h. Voor de kruishouding is de luchtweerstand namelijk op zijn hoogst en op een gegeven moment neemt de snelheid niet meer toe. Het wiskundig model moet sterk worden aangepast om dit fenomeen te beschrijven. We komen daar op terug in hoofdstuk 7.

Volgens de veiligheidsvoorschriften moet de parachute open zijn op 600 m afstand van de aarde. Om zich hieraan te kunnen houden, heeft de springer een hoogtemeter aan de pols

2 Het logistische groeimodel

In het vorige hoofdstuk heb je onder andere kennis gemaakt met het model van Malthus voor ongeremde groei. Zoals aangekondigd, wordt in dit hoofdstuk een model opgesteld voor *geremde groei*, het zogenaamde *logistische groeimodel*. Dat wordt weer een differentiaalvergelijking waarvan oplossingsfuncties echter niet zo licht te raden zijn. Het vinden van oplossingsfuncties stellen we uit tot de hoofdstukken 3 en 7.

voorbeeld: gisting

Bakkersgist, dat aan deeg wordt toegevoegd, bestaat uit levende cellen. Wanneer je een zakje gedroogd gist oplost in warm water, 'ontwaken' de gistcellen uit hun rusttoestand en beginnen ze zich onmiddellijk door deling te vermenigvuldigen.
Vlak nadat het gist wordt opgelost, is de toenamesnelheid van het aantal gistcellen evenredig met het aanwezige aantal. Na verloop van tijd zal het aantal gistcellen per cm^3 deeg echter minder snel gaan groeien omdat er een verzadigingsniveau wordt benaderd. De gegevens in de tabel hiernaast geven een indruk van dat proces.

Tijdstip t (uren)	Aantal gistcellen A per cm^3
0	14
1	21
2	33
3	50
4	74
5	110
6	160
7	220
8	290
9	360
10	430
11	490
12	540
13	570
14	600
15	620

1 **a.** Voer de gegevens in op de GR en laat de punten tekenen. Zie eventueel het kader onderaan deze pagina.

b. Hoe zie je aan het plaatje op het scherm van de GR dat het exponentiële groeimodel in deze situatie niet van toepassing is?

c. Het plaatje suggereert het bestaan van een bovengrens, een maximum aantal gistcellen per cm^3. Hoe groot schat je deze maximale capaciteit?

2 In het begin van het groeiproces lijkt het aantal cellen wel exponentieel toe te nemen. Kenmerk van exponentiële groei is dat de groeifactor constant is.

a. Bereken voor elk van de eerste vijf uren van het groeiproces de groeifactor. Is die min of meer constant?

b. Veronderstel dat het aantal gistcellen per cm^3 tot $t = 5$ elk uur toeneemt met een constante groeifactor. Maak een schatting van deze groeifactor.

c. Bedenk een formule voor $A(t)$, uitgaande van de bij **b** gemaakte veronderstelling.

Maak eventueel de lijsten L1 en L2 leeg met STAT 4:ClrList.
Voer dan met STAT EDIT de gegevens in.
Kies STAT PLOT optie 1.
Stel in op ON, en kies bij 'Type' voor het eerste icoon.
Kies bij Xlist voor L1 en bij Ylist voor L2.
Zorg dat er geen functies in het functiebestand actief zijn en kies ZOOM 9:ZoomStat.

3 In de opgave **2** heb je misschien $A(t) = 14 \cdot 1.5^t$ als benaderdingsformule gevonden Neem aan dat deze formule ook van toepassing is voor niet-gehele waarden van t.

a. Laat de grafiek van A tekenen en ga na dat deze grafiek ‘op het oog’ goed past bij de gegevens van de eerste vijf uren.

b. Bepaal $\frac{dA}{dt}$.

c. Ga na dat $A(t) = 14 \cdot 1.5^t$ voldoet aan $\frac{dA}{dt} = c \cdot A$.
Welke waarde vind je voor de evenredigheidsconstante c?

Op de iets langere termijn beschrijft het exponentiële groeimodel van de vorige opgaven het proces niet goed, omdat er in werkelijkheid slechts plaats is voor een beperkt aantal gistcellen per cm^3. De maximale capaciteit lijkt ongeveer gelijk te zijn aan 650 gistcellen per cm^3. Naarmate het aantal cellen dit verzadigingsniveau nadert, zal de groei afgeremd worden doordat gistcellen zich minder snel delen of eerder sterven. De vraag is nu, hoe dit verschijnsel in het model verwerkt kan worden.

Het exponentiële model $\frac{dA}{dt} = c \cdot A$ wordt nu aangepast via een zogenaamde remfactor:

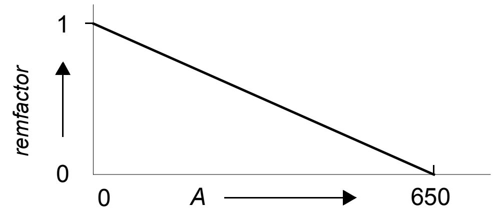
$$\frac{dA}{dt} = c \cdot A \cdot remfactor$$

.

De waarde van de remfactor zal afhangen van de waarde van A en wel zó dat:

- Als $A \approx 0$, dan $remfactor \approx 1$, want dan vindt nog nauwelijks remming plaats.
- Als $A \approx 650$, dan $remfactor \approx 0$, want dan is er nauwelijks groei meer.
- Naarmate A dichter bij het maximum van 650 komt, neemt de groei af.

Het simpelste is om aan te nemen dat *remfactor* een (dalende) lineaire functie van A is:



4 **a.** Geef een formule die aangeeft hoe *remfactor* onder deze veronderstellingen van A afhangt.

b. Een iets andere manier om tegen de remfactor aan te kijken is de volgende.
De groei van A is niet alleen evenredig met A zelf, maar ook met het *relatieve* aantal nog beschikbare plaatsen, dat wil zeggen: het aantal nog beschikbare, vrije plaatsen per cm^3 gedeeld door de maximale capaciteit.
Ga na dat dit tot dezelfde formule voor *remfactor* leidt.

De volgende differentiaalvergelijking is nu ontstaan: .

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot A \cdot \frac{650 - A}{650}$$

Hierbij is 0.41 de evenredigheidsconstante die het proces zou kenmerken als de groei ongeremd zou zijn. De factor $\frac{650 - A}{650}$ stelt het relatieve aantal beschikbare plaatsen voor en zorgt voor de remming. Uitgangspunt hierbij is dat de maximale capaciteit gelijk is aan 650 gistcellen per cm^3.

5 De *bezettingsgraad* $\frac{A}{650}$ is dus het relatieve aantal gistcellen.
Toon aan dat geldt: *remfactor* = 1 − *bezettingsgraad*.

6 **a.** Zet in een assenstelsel $\frac{dA}{dt}$ op de vertikale as en A op de horizontale.
Schets de grafiek van $\frac{dA}{dt}$ als functie van A.
b. Voor welk aantal gistcellen geldt dat de toename maximaal is?
c. Wat is de betekenis van de snijpunten van de grafiek met de horizontale as?

7 Veronderstel dat een andere gistsoort een maximale dichtheid heeft van 900 cellen per cm^3, en dat de aanvankelijke groeifactor per uur gelijk is aan 2.
a. Stel een differentiaalvergelijking op voor deze gistsoort.
b. Voor welke aantal cellen geldt dat de groei maximaal is?
c. Bereken de groeisnelheid voor het fictieve geval dat er er 1000 cellen per cm^3 aanwezig zouden zijn. Wat betekent dat voor de situatie?

logistische groei

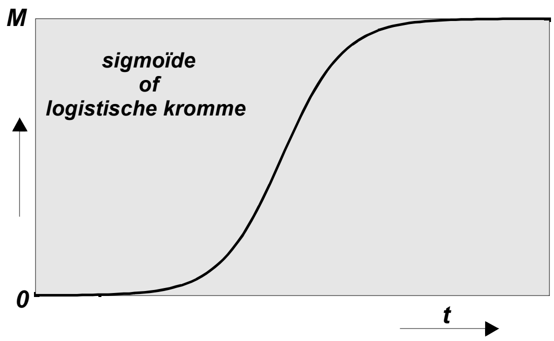
In het algemeen luidt de differentiaalvergelijking die nu is opgesteld:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y \cdot \frac{M - y}{M} = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

Hierin stelt c de groeifactor bij 'ongeremde' groei voor.
De factor $\left(1 - \frac{y}{M}\right)$ is de remfactor en M staat voor de waarde van het verzadigingsniveau, de maximale capaciteit van het systeem.
Men noemt dit een *logistisch groeimodel.*

sigmoïde

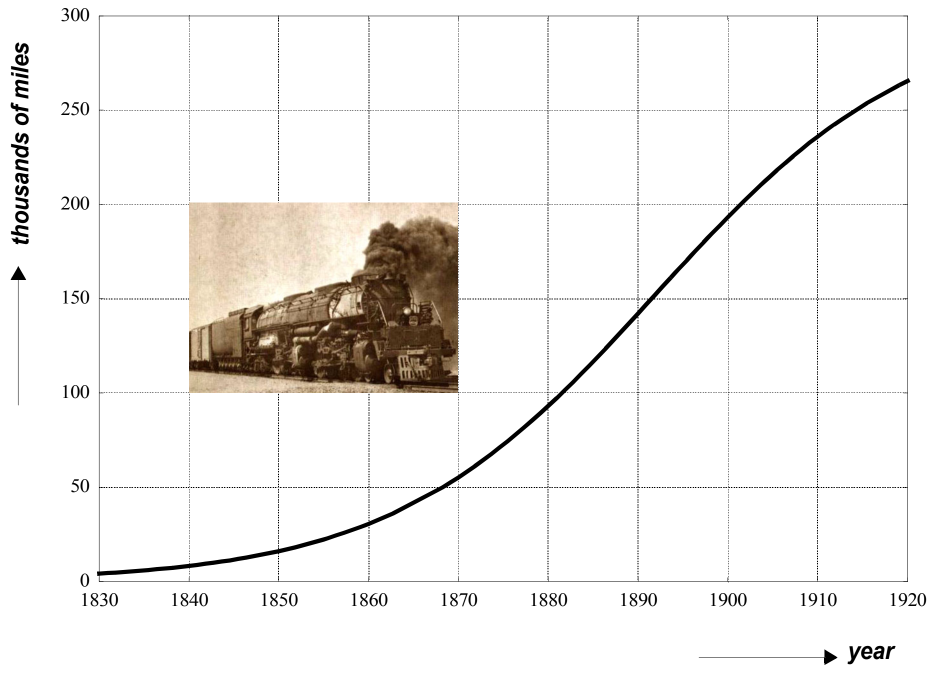
In het plaatje van opgave **1a** heb je gezien dat de punten in dit groeiproces op een kromme liggen die de vorm heeft van een langgerekte S. Omdat de letter S in het Grieks 'sigma' heet, wordt zo'n grafiek wel een *sigmoïde* genoemd. Een andere veelgebruikte naam is *logistische kromme*.



logistische kenmerken

Een logistische kromme maakt een specifiek groeiproces zichtbaar. Na een wat aarzelend begin, neemt de *groei* voortdurend toe, om later weer af te zwakken en op den duur vrijwel nihil te worden.
Dit type groei tref je veelvuldig aan bij populaties, maar niet alleen daar. Ook in de economie kun je dit verschijnsel tegenkomen. Denk maar aan het op de markt komen van een nieuw produkt, zoals de mobiele telefoon. Eerst kijkt de consument de kat uit de boom en wordt er weinig verkocht. Na een zekere aanloopperiode ontstaat er een ware rage en groeit het aantal bezitters van het produkt bijna exponentieel. Langzaam maar zeker raakt de markt verzadigd en neemt de groei af.
Het omslagpunt van toenemende groei naar afnemende groei, correspondeert met het *buigpunt* van de logistische kromme.

Hieronder zie je een aardig voorbeeld van een historische logistische kromme, namelijk de groeicurve van het Amerikaanse spoorwegnet in de periode 1830 -1920.



internet

Als je op internet naar ‘logistic growth’ of ‘logistic curve’ zoekt , zul je interactieve programma’s kunnen vinden die krommen tekenen of tabellen berekenen van logistische groeiprocessen.

Zo’n web side is bijvoorbeeld:
http://www.jump.net/~otherwise/population/logistic.html

3 De methode van Euler

In de hoofdstukken 1 en 2 zijn differentiaalvergelijkingen opgesteld, die model staan voor de groei van een grootheid in een bepaalde situatie. Bij de differentiaalvergelijkingen van hoofdstuk 1 was het mogelijk om oplossingen te raden. Bij de differentiaalvergelijking van de logistische groei (hoofdstuk 2) is dat al een stuk moeilijker. Sterker nog: bij een heleboel differentiaalvergelijkingen in de practijk is het niet eens mogelijk om een mooie oplossingsformule te vinden. Er bestaan echter ook 'numerieke methoden' om benaderingen van oplossingsfuncties te berekenen. De eenvoudigste numerieke methode is die van Euler, het onderwerp van dit hoofdstuk.

nogmaals gisting

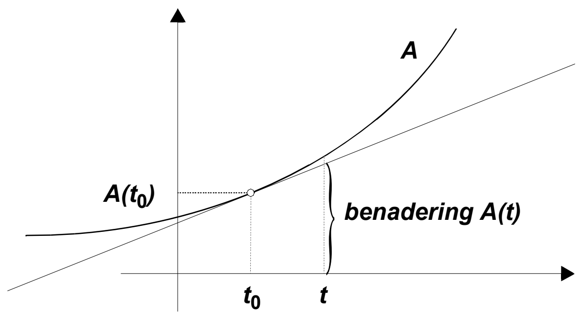
Kijk nog eens terug naar het voorbeeld van het bakkersgist. Op grond van enkele aannamen is het vermoeden dat het aantal gistcellen per cm^3 (= $A(t)$), zich ontwikkelt volgens de differentiaalvergelijking

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot A \cdot \frac{650 - A}{650}$$

De beginwaarde $A(0)$ is gelijk aan 14 en de tijd wordt gemeten in uren.
Uitgaande van deze beginwaarde gaan we na of het model in staat is de ontwikkeling van het aantal gistcellen in de loop van de tijd goed te voorspellen. Als inleiding hierop kijken we eerst terug naar de *lineaire benadering*.

lineaire benadering

In het boekje 'Techniek van het differentiëren' heb je gezien dat je de grafiek van de functie A plaatselijk kunt benaderen met een rechte lijn.
Deze rechte is dan de *raaklijn* aan de grafiek in het betreffende punt.
Dan geldt: $A(t) \approx A(t_0) + A'(t_0) \cdot (t - t_0)$ voor t 'in de buurt van' t_0.



1 Wanneer $t - t_0$ gelijk aan 1 gekozen wordt, ontstaat de volgende formule:

$$A(t_0 + 1) \approx A(t_0) + A'(t_0)$$

Ga dit na.

2 **a.** Gegeven is de beginwaarde 14. Bereken $\frac{dA}{dt}$ op tijdstip $t = 0$.

b. Als je aanneemt dat de groeisnelheid tijdens het eerste uur niet verandert, kun je nu uitgaande van de beginwaarde een benadering van $A(1)$ te berekenen. Doe dat.

3 Volgens de benadering geldt: $A(1) \approx 19{,}6$.

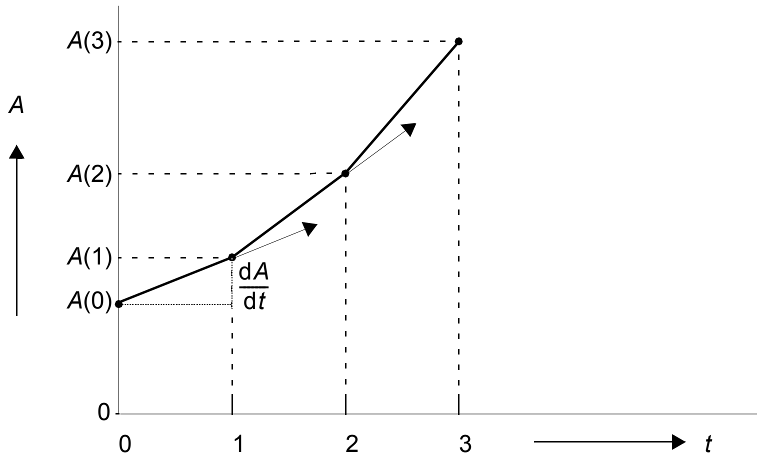
a. Bereken $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ op het tijdstip $t = 1$ uitgaande van deze benadering.

b. Welke benadering van $A(2)$ kun je nu vinden?

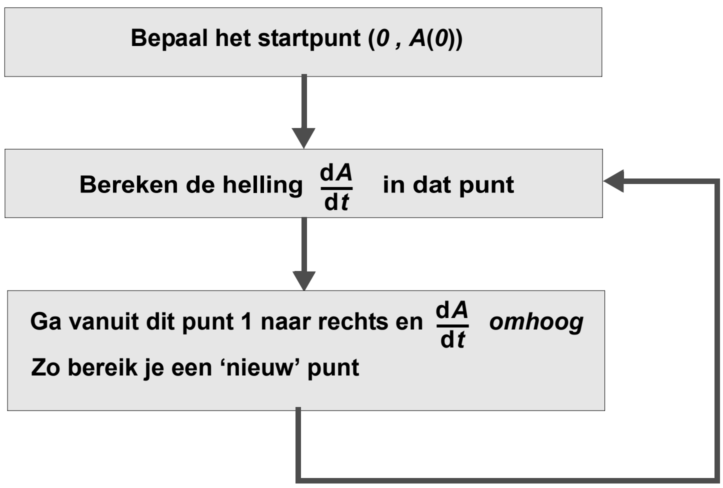
4 Vul kolom voor kolom de volgende tabel met benaderingen in:

tijd *t*	0	1	2	3	4
benadering van *A*(*t*)	14	19.6			
$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$	5.6				

Meetkundig kun je je deze benaderingswijze als volgt voorstellen:



De methode komt op het volgende neer:



Je maakt hier dus een schatting van $A(t+1)$ vanuit $A(t)$ volgens

$$A(t+1) \approx A(t) + 0{,}41 \cdot \frac{650 - A(t)}{650} \quad .$$

5 **a.** Benader de waarden van $A(t)$ voor $t = 1, 2, ... , 15$.
Gebruik de tip in het kader hieronder.
b. Vanaf welke waarde van t wijkt de benadering meer dan 10% af van de gemeten waarde uit de tabel op pagina 7?

> Op de TI-83 kun je de benaderingen op de volgende manier handig berekenen.
> Voer in: 14, ENTER.
> Voer in: Ans + 0.41*Ans*(650 - Ans)/650.
> Elke keer dat je nu op ENTER drukt, krijg je een volgende benadering.

6 Een betere benadering krijg je wanneer je met kleinere stapjes naar rechts loopt.
Neem een stapgrootte van 0.5.
Ga na dat $A(t+0{,}5) \approx A(t) + A'(t) \cdot 0{,}5$.

7 **a.** Gebruik de GR om $A(1)$ te benaderen met stapgrootte 0.5.
Let op: je krijgt deze waarde pas na twee stappen!
b. In onderstaande tabel staat $A(t)$ voor de werkelijk gemeten aantallen, en $A_1(t)$ voor de benadering met stapgrootte 1. Bij $A_{0.5}(t)$ is de stapgrootte 0.5 en bij $A_{0.1}(t)$ 0.1.
Vul de tabel in. Maak gebruik van het programma onder deze opgave.

t	$A(t)$	$A_1(t)$	$A_{0.5}(t)$	$A_{0.1}(t)$
0	14			
1	21			
2	33			
3	50			
4	74			
5	110			

c. Welke conclusie trek je uit de tabel?

programma voor de GR

Hieronder zie je een programma dat je in kunt voeren op de TI-83 en dat de methode van Euler gebruikt om logistische krommen te benaderen.

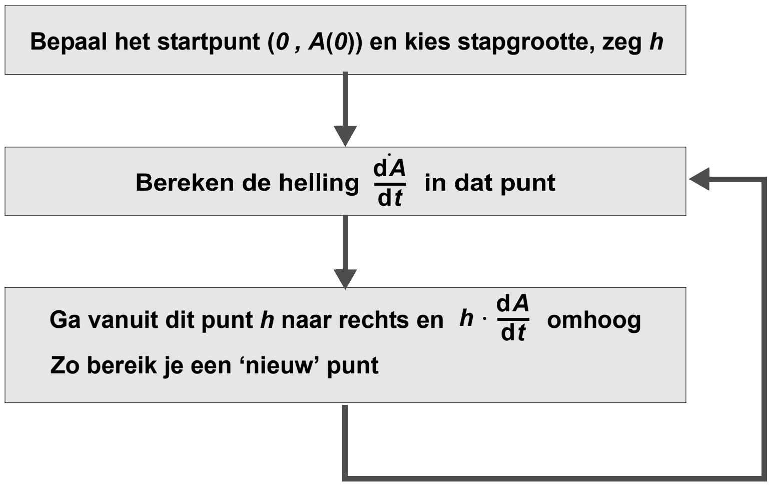
```
PROGRAM: EULER
:0→T
:0.1→H
:14 →A
:0→V
:While (T<Xmax)
:0.41*A(1 - A/650) →V
:A+V*H→A
:Pt-On(T,A)
:T+H→T
:End
```

> Stel eerst Xmax in op de gewenste bovengrens, in dit geval 5, en Xmin op 0.
> Zorg dat Ymin en Ymax zo staan, dat alle punten in beeld verschijnen.
> Je kunt de stapgrootte H in de tweede regel van het programma wijzigen.

de methode van Euler

Samengevat: je kunt oplossingen van een differentiaalvergelijking, zoals bijvoorbeeld $\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot A \cdot (1 - \frac{A}{650})$, benaderen met de zogenaamde methode van Euler.

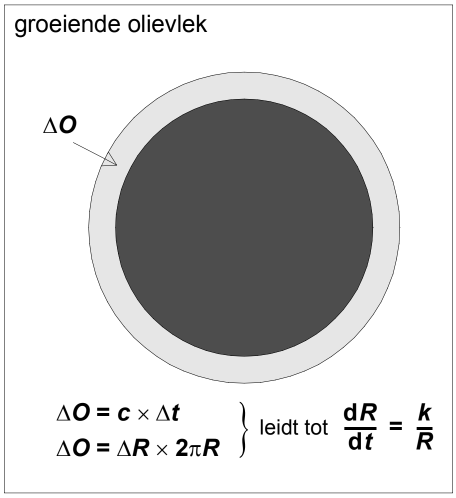
de methode van Euler



discrete benadering

Een differentiaalvergelijking is een model voor een *continu*e verandering. Omdat we bij de methode van Euler de tijd stapsgewijs laten verlopen, namelijk met intervallen van lengte h, is er sprake van een *discrete* benaderingsmethode. Zo'n benadering zal een beetje *naast* de oplossingskromme liggen. In het algemeen geldt: hoe kleiner de stapgrootte, hoe beter de benadering.

8 Er zijn ook groeiprocessen, waarbij de groeisnelheid omgekeerd evenredig met de aanwezige omvang. Neem de straal van een ronde olievlek uit een leeglopende tanker. Als de oppervlakte O eenparig toeneemt, zal de groei van de straal steeds langzamer gaan. Een model voor die groei wordt gegeven door de differentiaalvergelijking: $\frac{dR}{dt} = \frac{k}{R}$ waarbij R de straal voorstelt, t de tijd en c een of andere constante (zie de figuur).



a. Verklaar de conclusie bij het plaatje. Wat is precies het verband tussen de constanten c en k?

b. Stel nu $k = 2$ en $R(1) = 2$. Benader $R(4)$ volgens de methode van Euler met stapgrootte 1.

c. Ga na dat de functie y met $R(t) = 2\sqrt{t}$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.

d. Pas nogmaals de methode van Euler toe (met startwaarde $R(1) = 2$) en stapgrootte respectievelijk 0.75, 0.5 en 0.1 Bij welke stapgrootte heeft de Euler-benadering van $R(4)$ een fout die kleiner is dan 0.1?

4 Richtingsvelden

In deze paragraaf wordt bij een differentiaalvergelijking een plaatje gemaakt: het zogenaamde richtingsveld. Door in zo'n richtingsveld krommen te schetsen krijg je een globale indruk van het gedrag van de oplossingen van het model.
Bekijk nog eens het voorbeeld van het bakkersgist. Op grond van enkele veronderstellingen is het vermoeden dat het aantal gistcellen per cm^3 (= A) zich ontwikkelt volgens de differentiaalvergelijking

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot A \cdot \frac{650 - A}{650} \quad .$$

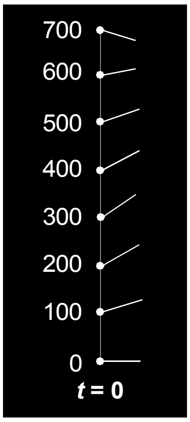
1 Uit de waarnemingen blijkt dat $A(0) = 14$.

a. Hoe groot is op dat moment de groeisnelheid $\frac{dA}{dt}$, ofwel hoe groot is $A'(0)$?
b. Hoe groot zou de groeisnelheid op tijdstip $t = 0$ zijn als $A(0) = 20$?
c. Vul onderstaande tabel in voor de groeisnelheid bij diverse waarden van $A(0)$. Gebruik de GR door de formule 0.41*X*(650 - X)/650 in te voeren, en vervolgens voor X de gewenste waarden in te vullen, of een tabel te laten maken.

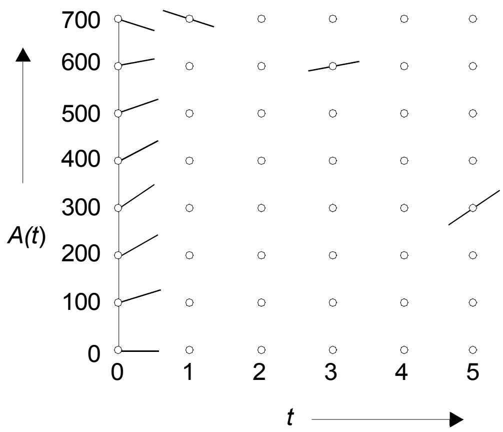
$A(0)$ =	0	100	200	300	400	500	600	700
$\frac{dA}{dt}$ op $t = 0$								

lijnelementen

De steilheid van de grafiek in het punt met $t = 0$ hangt dus af van de beginwaarde. In het plaatje hiernaast zie je mogelijke startrichtingen voor de grafiek. Die startrichtingen worden aangeduid met kleine (raak)lijnstukjes die de grafiek in het startpunt benaderen. Zulk stukjes raaklijn worden *lijnelementen* genoemd.

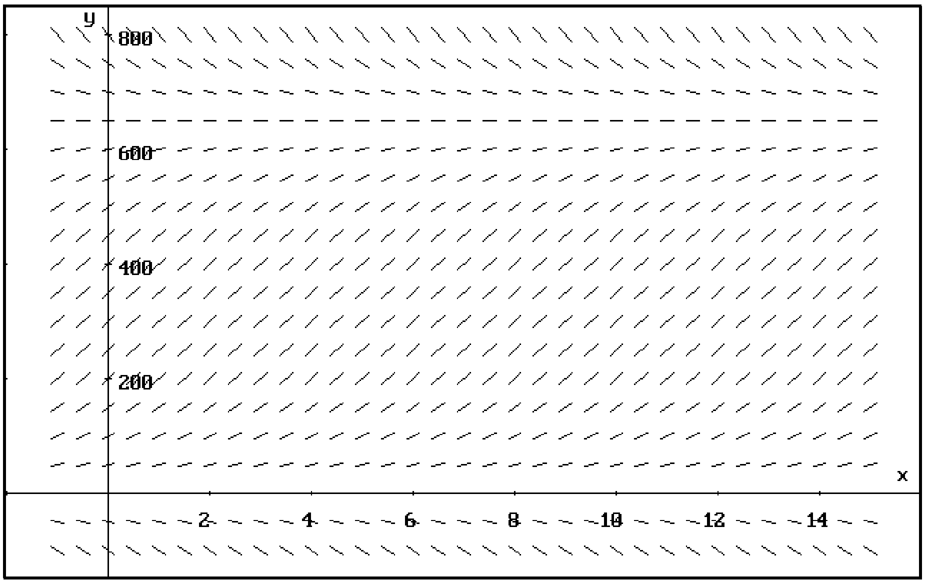


Ook op de tijdstippen $t = 1, 2, 3, ...$ hangt de richting van de grafiek af van de ‘hoogte’ van het punt. Hieronder zie je, behalve de ‘startpunten-met-lijnelement’, nog een aantal roosterpunten. In drie daarvan is een lijnelement getekend.



2 Hoe kun je de lijnelementen in de andere roosterpunten tekenen?

richtingsveld Een verzameling lijnelementen in een rechthoek van roosterpunten wordt een *richtingsveld* genoemd. Een richtingsveld geeft een indruk van de vorm van de grafieken van de oplossingsfuncties van een differentiaalvergelijking
Hieronder staat het richtingsveld, door een computer getekend, bij het voorbeeld van het bakkersgist.



3 **a.** Vraag je leraar zonodig een copie van dit plaatje. Schets - op het oog - een grafiek met beginpunt (0 , 100) die 'past in het richtingsveld' (dat wil zeggen dat op elke hoogte de raaklijn de door het veld aangegeven richting heeft).
b. Idem voor de startpunten (0, 300), (0, 500) en (0, 800).
c. Wat voor grafiek krijg je als je het startpunt (0 , 650) neemt? Hoe kun je dat verklaren uit het groeimodel?
d. Oplossingsgrafieken die tussen de horizontale lijnen bij 0 en 650 liggen, lijken een buigpunt te hebben. Waar liggen die buigpunten denk je?

4 Van een aantal zonnebloemen die op dezelfde dag ingezaaid zijn wordt op verschillende momenten gemeten hoe hoog ze zijn. De gemiddelde hoogten staan in de tabel.
a. Voer de data in op de GR en laat een tekening maken.
b. Hoe zie je aan het plaatje dat het logistische groeimodel van toepassing lijkt te zijn?
c. Hoe groot lijkt de maximale hoogte van de gemiddelde zonnebloem te zijn?
d. Met welke differentiaalvergelijking kun je de groei van een zonnebloem modelleren?

Tijd (dagen)	Hoogte (cm)
7	18.0
14	36.4
21	67.8
28	98.1
35	131.0
42	169.5
49	205.5
56	228.3
63	247.1
70	250.5
77	253.8

5 Bekijk het antwoord van opgave **4d** achter in het boek.
a. Bereken de groeifactor gedurende de eerste dag en leidt daaruit een schatting voor de constante c af.
b. Schets nu een richtingsveld bij dit groeimodel.
c. Schets een 'passende' grafiek in dit veld.
d. Ga na dat zo'n kromme op hoogte 127.5 een buigpunt heeft.

5 Practicum: Richtingsvelden met VU-Grafiek

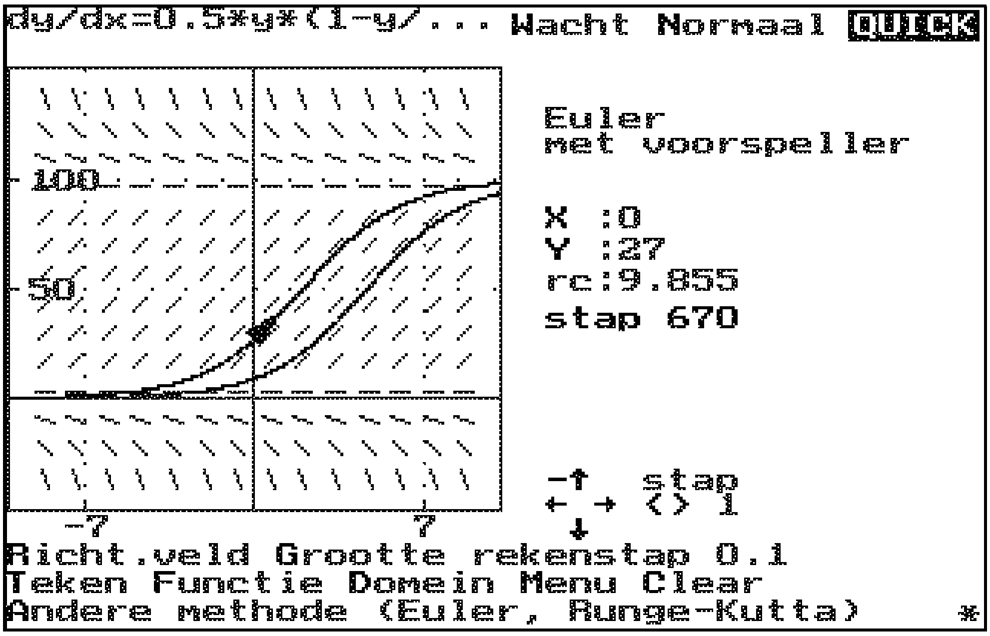
In de vorige paragraaf heb je kennis gemaakt met richtingsvelden. In dit practicum tekent het programma VU-Grafiek richtingsvelden bij differentiaalvergelijkingen die je hiervoor bent tegengekomen of die in het vervolg een rol zullen spelen.
Het richtingsveld geeft steeds een indruk van de vorm van de oplossingskrommen van de differentiaalvergelijking. In VU-Grafiek kun je eenvoudig de gevolgen onderzoeken van veranderingen van de startwaarde of van de waarden van de constanten in de vergelijking.

1 De eerste differentiaalvergelijking die je gaat onderzoeken beschrijft een logistisch groeimodel:

$y'(x) = 0.5 \cdot y(x) \cdot (1 - y(x)/100)$, of, anders geschreven, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.5 \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{100})$.

In het kader op de volgende pagina staat hoe je VU-Grafiek hierbij kunt gebruiken.

a. Bekijk het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking en laat enkele oplossingen tekenen.
b. Wat gebeurt er als je 0 als startwaarde neemt? Of 100?
c. Beschrijf het gedrag van oplossingen die een startwaarde groter dan 100 hebben.
d. Welke gedrag vertonen oplossingen die een negatieve startwaarde hebben?



Start VU-Grafiek en kies uit het hoofdmenu optie D:Differentiaalvergelijkingen.
Linksonder in beeld knippert de cursor bij d*y*/d*x*.
Typ achter d*y*/d*x* in: 0.5**y**(1–*y*/100).
VU-Grafiek stelt voor om de waarden van *x* en *y* te laten lopen van –5 tot 5. Verander dat voor *x* in -10 en 10. Laat de *y*-waarde lopen van -50 tot 150. Sluit af met functietoets F1.
Kies nu de optie **R**ichtingsveld.
Met de pijltjestoetsen kun je de driehoekige cursor verplaatsen. De optie **T**eken tekent vanuit de startpositie een deel van een oplossingskromme. Met Esc kun je dat onderbreken, en opnieuw **T**eken geeft een oplossing in de andere richting.
Met **F**unctie kun je een nieuwe differentiaalvergelijking invoeren.

2 Bekijk weer $\frac{dy}{dx} = 0.5 \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{100})$.

a. Verander 0.5 in 0.9. Welke invloed heeft dit op het richtingsveld en op de vorm van de oplossingskrommen?

b. Onderzoek wat er gebeurt met het richtingsveld en met de oplossingen wanneer je een negatieve waarde kiest voor c in $\frac{dy}{dx} = c \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{100})$.

3 Nog algemener is $\frac{dy}{dx} = c \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{M})$.

a. In opgave **1** was M gelijk aan 100.
Verander deze waarde in 200 en bekijk het effect.

b. Wat gebeurt er als de waarde van M negatief is?

4 In de volgende paragraaf komt de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ aan de orde.

a. Teken het richtingsveld in het geval dat $c = 1$, dus bij $\frac{dy}{dx} = y$.

b. Aan welke krommen doen de geschetste oplossingen je denken?
Controleer door differentiëren of je vermoeden juist is.

c. Onderzoek het effect van het vergroten van de waarde van c.

d. Hoe verandert de vorm van de oplossingen als de waarde van c negatief is?

5 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = c \cdot (y - k)$.

a. Kies $c = 1$ en $k = 10$. Welke vorm hebben de oplossingskrommen?

b. Welke rechte lijnen passen mooi in het richtingsveld?

c. Welke invloed heeft de startwaarde op de vorm van de grafiek van de oplossing?

d. Wat gebeurt er als je de waarde van k verandert?

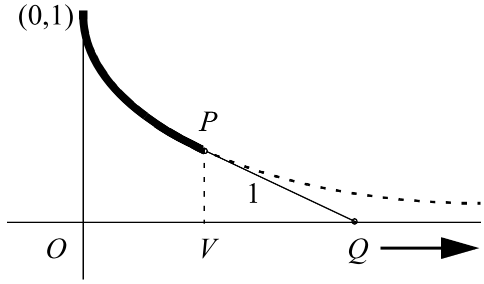
e. Ga na dat de invloed van de waarde van c vergelijkbaar is met die bij vraag **4**.

6 Stel dat de groei van y omgekeerd evenredig is met y, ofwel: $\frac{dy}{dt} = \frac{c}{y}$.

Onderzoek het richtingsveld en de oplossingen van deze differentiaalvergelijking.

Tenslotte twee problemen waarbij de differentiaalvergelijking eerst wordt opgesteld.

7 Een potlood P bevindt zich met de punt in (0,1). Met een touwtje van lengte 1 zit het vast aan een tweede potlood Q dat zich in de oorsprong O bevindt. Q gaat zich nu over de horizontale as naar rechts toe bewegen.



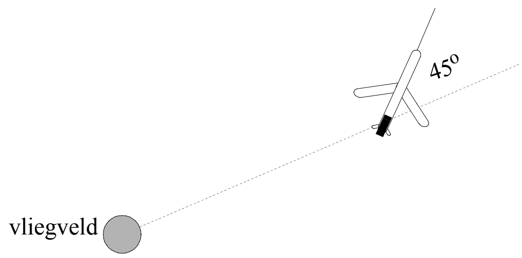
De vraag is welke baan P beschrijft.

a. Stel de afstand van O tot het voetpunt V van P gelijk aan x en stel dat de baan van P de grafiek is van een functie y.

Ga na dat geldt: $y' = -\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

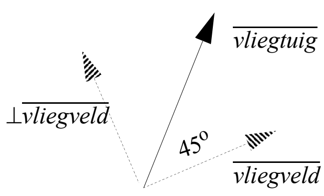
b. Laat het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking tekenen en laat ook enkele oplossingskrommen schetsen.
De kromme die P beschrijft, heet de *tractrix* of *sleepkromme*.

extra opgave **8** Een vliegtuig dat opstijgt van een vliegveld moet een draai maken. Het maakt de draai zo, dat het vliegtuig voortdurend een hoek van 45^o maakt met de lijn naar de verkeerstoren:



Hoe vliegt het vliegtuig? Stel het vliegtuig bevindt zich in het punt (x , y). We proberen een verband te zoeken tussen de richting van het vliegtuig y' en x en y.

a. Hiernaast zie je hoe je de richting van het vliegtuig kunt bepalen uit de richtingsvectoren vanuit het vliegveld en die daar loodrecht op.
$\overline{vliegtuig} = \overline{vliegveld} + \perp\overline{vliegveld}$
Ga na dat hieruit volgt dat de richtingscoëfficiënt van het vliegtuig gelijk is aan $\dfrac{x+y}{x-y}$.



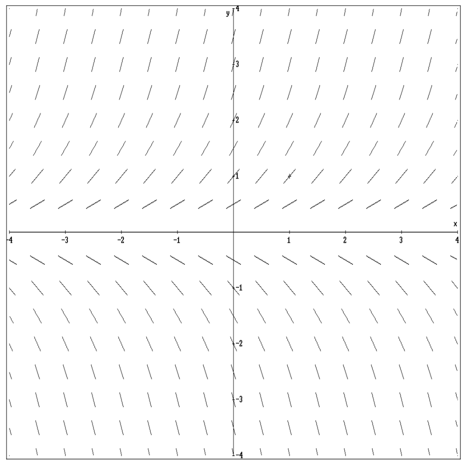
b. De differentiaalvergelijking wordt dan $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. Bekijk het lijnelementenveld.
Welke baan herken je in de baan van het vliegtuig?

6 Oplossingen van standaardvergelijkingen

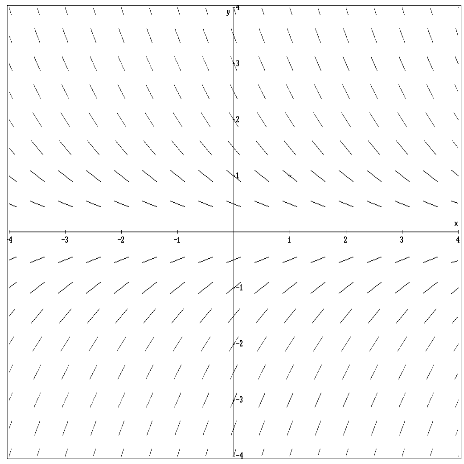
In hoofdstuk 1 ben je al een differentiaalvergelijking tegengekomen van het type:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

waarbij k een constante $\neq 0$ is.
Hieronder zie je een richtingsveld voor het geval $k = 1.2$ en een voor het geval $k = -0.8$



$k = 1.2$



$k = -0.8$

Omdat exponentiële functies de eigenschap hebben dat de afgeleide een constante maal de oorspronkelijke functie is, ligt het voor de hand om $y(t) = a^t$ te proberen.

1 **a.** Geef een benadering van a in twee decimalen nauwkeurig in het geval $k = 1.2$. Ook in het geval $k = 0.8$.
b. In het eerste geval vind je een a-waarde > 1 en in het tweede geval tussen 0 en 1. Kijkend naar de richtingsvelden had je dit zonder berekening kunnen weten. Hoe?

Het is een goede gewoonte om de oplossingsfuncties te schrijven als macht van e.
In het eerste geval geeft dat $y(t) = \mathrm{e}^{1,2t}$ en in het tweede geval $y(t) = \mathrm{e}^{-0,8t}$.
Je kunt (kettingregel!) direct controleren dat deze functies voldoen aan respectievelijk $\frac{dy}{dt} = 1,2 \cdot y$ en $\frac{dy}{dt} = -0,8 \cdot y$.
De beide oplossingsfuncties hebben de beginwaarde 1 (vul maar $t = 0$ in).
In het richtingsveld zie je natuurlijk ook oplossingen met een andere beginwaarde. Daarover gaat de volgende opgave.

2 **a.** Bedenk nu twee oplossingsfuncties van de eerste differentiaalvergelijking, waarvan de beginwaarde respectievelijk 2 en -3 is. Wat is een opmerkelijk verschil tussen die oplossingsfuncties en hoe zie je dat in het richtingsveld?
b. Dezelfde vraag voor de tweede differentiaalvergelijking, met beginwaarden 0.5 respectievelijk -1.

3 Gegeven is de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dt} = 4y$.

a. Bepaal een oplossingsfunctie waarvan de grafiek door het punt (1, 2) gaat.
b. Bepaal er ook een waarvan de grafiek door het punt (-1, 3) gaat.
c. Is er ook een oplossingsfunctie waarvan de grafiek door (2, 0) gaat?

oplossingen van $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$

Na het voorgaand zal het je duidelijk zijn dat de functies van de vorm

$$y(t) = c \cdot e^{kt}$$

oplossingsfuncties zijn van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

geen andere oplossingen

Je kunt je afvragen of er buiten deze familie van functies nog andere oplossingsfuncties mogelijk zijn. Door naar het richtingsveld te kijken, kun je snappen dat dit niet zo is.

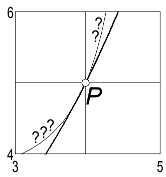
Neem bijvoorbeeld $k = 1.5$

(I) Door elk punt P van het t,y-vlak gaat zeker een oplossingsgrafiek passend bij een functie van het type $y = c \cdot e^{1.5t}$

Neem $y = c \cdot e^{1.5t}$ en vul de coördinaten van P in voor t en y ; je vindt dan één waarde voor c . Die ene waarde van c bepaalt de oplossingsfunctie.

(II) Door elk punt P van het t,y-vlak gaat slechts één oplossingsgrafiek

Stel er gaan twee oplossingsgrafieken door P. Vat die grafieken nu op als tijd,plaats-grafieken van twee bewegende punten langs een lijn. Op zeker moment (corresponderend met P) zijn de punten op dezelfde plaats. Maar ... op elke plaats (bepaald door een waarde van y) zijn hun snelheden gelijk (waarde van $\frac{dy}{dt}$) en dit betekent dat ze op *elk* later (en vroeger) tijdstip ook op dezelfde plaats zijn! Maar dat wil zeggen dat die twee grafieken geheel samenvallen.



4 Als je naar het richtingsveld kijkt van bijvoorbeeld $\frac{dy}{dt} = 1{,}2 \cdot y$ dan ‘zie’ je dat alle oplossingsgrafieken die boven de t-as liggen, verkregen kunnen worden door de grafiek van $y = e^{1{,}2t}$ horizontaal te verschuiven!

Hoe is dat te verklaren uit de formule $y = c \cdot e^{1{,}2t}$ voor de oplossingsfuncties?

5 De aanvankelijke gedachte van Galileï dat de valsnelheid misschien evenredig met de valweg zou zijn, moest al gauw worden herzien. Zonder een enkel experiment uit te voeren, kun je nu de onmogelijkheid van de hypothese begrijpen.
Op het begintijdstip van de val is de valweg nul. Bepaal de oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking: $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$ waarvan de grafiek door het punt (0 , 0) gaat en verklaar nu waarom de hypothese onmogelijk is.

6 Een bouwmaatschappij vermeldt in zijn advertentie dat de rente van 6.5% continu wordt berekend. Dat betekent dat de kapitaalgroei wordt beschreven door de differentiaal vergelijking: $\frac{dK}{dt} = 0{,}065K$ (munteenheid = Euro, tijdeenheid = jaar).

a. Noem het beginkapitaal K_0. Geef een formule voor het kapitaal op het tijdstip t.
b. Hoeveel % bedraagt de effectieve rente over 1 jaar?
c. Na hoeveel jaar is het kapitaal verdubbeld?

7 In de glastuinbouw is bekend dat licht aan intensiteit verliest wanneer het door een glasplaat valt. Als het invallende licht een intensiteit I_0 heeft en het legt een afstand s af door het glas, dan is de intensiteit gereduceerd tot $I(s)$.

De functie I voldoet aan $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = -k \cdot I$, waarbij k de uitdovingscoëfficiënt is.

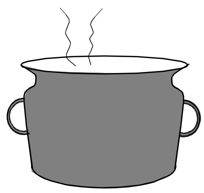
Een glasplaat met een dikte van 3 mm laat 40% van het invallende licht door.
Bereken de waarde van k.

8 Ter bestrijding van een infectie begint een patiënt aan een penicilline-kuur die bestaat uit het innemen van pillen. Iedere keer na het innemen van een pil stijgt de concentratie penicilline in het bloed met 350 000 eenheden per milliliter. Aan het begin van de kuur zit er geen penicilline in het bloed van de patiënt. De penicilline wordt afgebroken met een snelheid die evenredig is met de concentratie:

$$\frac{dP}{dt} = -0{,}3P$$

Hierin is t de tijd (in uren) en P de concentratie penicilline (in eenheden per milliliter). De concentratie penicilline mag niet onder de 100 000 eenheden per milliliter komen.
Hoeveel uur na het innemen van de eerste pil moeten de tweede, derde en vierde pil worden ingenomen? (Profi Eindexamen 1998)

9 Een pan soep, die aan de kook is, wordt van het vuur gehaald en op tafel gezet. Vanaf dat moment begint de soep af te koelen. Volgens de afkoelingswet van Newton is *de snelheid waarmee de temperatuur van de soep daalt evenredig met het verschil tussen de temperatuur van de soep en de omgeving*. Deze omgevingstemperatuur is gelijk aan 20 °C, en we veronderstellen dat deze niet verandert door de warmte die de pan afgeeft.



a. Ga na dat bovenstaande beschrijving kan worden vertaald in de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -a \cdot (T - 20)$$

Hierin stelt T de temperatuur voor (in °C) en t de tijd (in minuten); de constante a zou je de afkoelingscoëfficiënt kunnen noemen.

b. Deze differentiaalvergelijking is niet van de vorm $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y$, maar is via een eenvoudige ingreep wél in die vorm te brengen.
Daartoe voeren we een nieuwe variabele V in: $V = T - 20$.
In woorden: V is het temperatuurverschil van soep en omgeving.
Verklaar nu eerst: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$

c. Je krijgt nu een gemakkelijke differentiaalvergelijking voor V. Welke?

d. Druk V uit in t.

e. Verklaar nu de volgende formule:

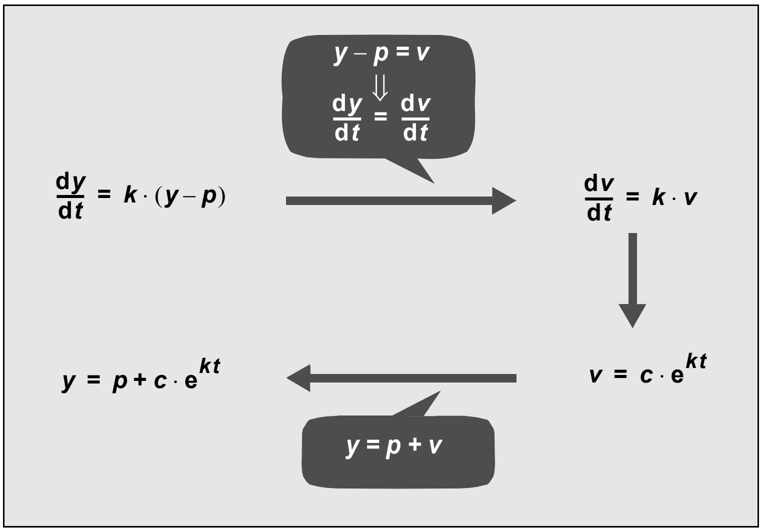
$$T = 20 + 80 \cdot \mathrm{e}^{-at}$$

f. De afkoelingscoëfficiënt van de soep hangt af van verschillende factoren.
Bedenk een paar factoren die de waarde van a kunnen beïnvloeden.

Het voorbeeld van de afkoelingswet laat zien dat een differentiaalvergelijking van het type

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot (y - p)$$

waarbij k en p constanten zijn,
is terug te brengen tot het eerder in deze paragraaf behandelde type.
Dat lukt via de invoering van een nieuwe variabele.
Hieronder zie je dat nog eens schematisch:



10 Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = 1{,}2 \cdot (y - 3)$$

a. Bekijk nog eens het eerste richtingsveld in het begin van dit hoofdstuk. Hoe kun je daaruit het richtingsveld van deze differentiaalvergelijking vinden?
b. Welke constante functie is een oplossing van deze differentiaalvergelijking?
c. Geef de oplossingsfunctie met beginwaarde 5.

logistische groei met een truc

In hoofdstuk 2 is het logistische groeimodel geïntroduceerd. In de hoofdstukken 3 en 4 ben je voorbeelden van logistische processen tegengekomen.
In het algemeen luidt de differentiaalvergelijking van zulke processen:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

Ook dit type vergelijking kan exact worden opgelost, dat wil zeggen dat we alle oplossingsfuncties kunnen beschrijven met een formule. Dat gaat wat minder eenvoudig dan met de voorgaande differentiaalvergelijkingen in dit hoofdstuk.
Er bestaan verschillende oplossingsmethoden voor dit type vergelijking. Bij elke methode heb je een algebraïsche truc nodig om de vergelijking terug te brengen tot een bekend en eenvoudiger type. De truc die wij hier zullen behandelen, en die absoluut uit de lucht komt vallen, is dat we y vervangen door $\frac{1}{u}$. Maar je zult zien dat het werkt.

11 We nemen een concreet voorbeeld, zeg $k = 0.4$ en $M = 300$. Dan hebben we:

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}4 \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{300}\right)$$

a. Zoals aangekondigd gaan we y door $\frac{1}{u}$ vervangen. Eerst zoeken we nu een verband tussen $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{du}{dt}$. Dat is: $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$. Verklaar dit verband.

b. In bovenstaande differentiaal vergelijking vervangen we nu $\frac{dy}{dt}$ door $-\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$ en y door $\frac{1}{u}$. Ga na dat dit leidt tot de volgende differentiaalvergelijking voor u en t:

$$\frac{du}{dt} = -0{,}4 \cdot \left(u - \frac{1}{300}\right)$$

c. Je ziet dat de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is omgetoverd tot het type dat bovenaan bladzijde 22 genoemd is. Daar weet je, als het goed is, wel raad mee. Geef de formule voor de oplossingsfuncties u.

d. Tenslotte moet je weer van u naar y. Laat zien dat dit oplevert:

$$y = \frac{300}{1 + 300c \cdot e^{-0{,}4t}}$$

e. Beschrijf tot slot het gehele oplossingsproces met een schema zoals op de vorige bladzijde.

oplossing

We kijken nog even terug naar het resultaat van opgave 11.
Om te beginnen kun je de term $300c$ vervangen door b, dat maakt de formule iets korter:

$$y = \frac{300}{1 + b \cdot e^{-0{,}4t}}$$

Om de waarde van b te kunnen bepalen heb je één punt van de grafiek nodig.
Elke waarde van b geeft één oplossingsgrafiek.

12 a. Bekijk op de GR met venster [-10 , 10] bij [0 , 300] de grafieken van de oplossingsfuncties voor $b = 1$, 2 en 3. Als het goed is, zie drie langgerekte S-en.

b. Hoe gedraagt y zich als t heel groot wordt? Hoe zie je dat aan de formule?

c. De grafieken hebben elk een buigpunt. Zonder al te veel rekenwerk kun je er zeker van zijn dat zo'n buigpunt op de lijn $y = 150$ ligt. Verklaar dit.

d. Je kunt nu gemakkelijk ook de t-waarde van het buigpunt vinden. Doe dat voor elk van de drie grafieken en controleer je uitkomsten op het scherm.

13 In hoofdstuk 2 heb je het volgende model gezien voor de ontwikkeling van gistcellen:

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{650}\right)$$

Na het voorgaande weten we dat hieruit volgt:

$$A(t) = \frac{650}{1 + b \cdot e^{-0{,}41t}}$$

a. Gebruik het gegeven $A(0) = 14$ om b te vinden

b. Maak op de GR een tabel van de waarden van A voor $t = 1, 2, \ldots, 15$ en vergelijk de resultaten met die in de tabel op bladzijde 5.

We formuleren de theorie over het logistisch model op deze bladzijde in meer algemene termen.

logistische functies

De zogenaamde *logistische functies*:

$$y(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-kt}}$$

zijn de oplossingsfuncties van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

Je kunt dit controleren door in te vullen in de differentiaalvergelijking.
Maar om die formule ‘uit te vinden’ is er een slimme substitutie nodig.Het schema hieronder laat zien hoe dat gaat.

$$y = \frac{1}{u} \Downarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) \longrightarrow \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = k \cdot \frac{1}{u} \cdot \left(1 - \frac{1}{Mu}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{du}{dt} = -k \cdot \left(u - \frac{1}{M}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u = \frac{1}{M} + c \cdot e^{-kt}$$

$$y = \frac{1}{u}$$

$$y(t) = \frac{M}{1 + Mc \cdot e^{-kt}}$$

$$Mc = b$$

$$y(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-kt}}$$

14 Een bioloog stopt 6 fruitvliegjes in een pot met kweekmedium. Vervolgens heeft zij acht keer in een periode van 6 weken de vliegjes in de pot geteld. De aantallen staan hieronder:

tijd (in dagen)	aantal vliegjes	tijd (in dagen)	aantal vliegjes
3	10	18	163
7	21	24	265
9	52	32	319
15	104	41	338

a. Maak een grafiek bij deze gegevens. Vergeet niet ook de startwaarde mee te nemen!

b. Het logistische groeimodel lijkt van toepassing te zijn.
Bepaal een formule voor het aantal vliegjes na t dagen.

15 De tabel hieronder geeft het aantal inwoners van de Verenigde Staten in de loop van de jaren.

jaar	aantal inwoners (x 1000)	jaar	aantal inwoners (x 1000)	jaar	aantal inwoners (x 1000)
1790	3929	1850	23192	1910	91972
1800	5308	1860	31443	1920	105711
1810	7240	1870	38558	1930	122775
1820	9638	1880	50156	1940	131669
1830	12866	1890	62948	1950	150697
1840	17069	1900	75995	1960	???

a. Laat door de GR een plaatje maken bij deze gegevens.

b. Aanvankelijk, zo tussen 1790 en 1840, lijkt sprake te zijn van exponentiële groei.
Hoe groot is de groeifactor? Welke waarde voor c in $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y$ volgt hieruit?

c. Neem aan dat het logistische groeimodel van toepassing is, en veronderstel dat de grafiek van het aantal inwoners in 1920 een buigpunt heeft.
Welke waarde heeft M naar schatting?

d. Welk aantal inwoners voorspelt het model voor 1960?

16 In een poel leeft een algenpopulatie. De hoeveelheid algen die in de poel kan leven, kent een natuurlijke bovengrens, zeg M. Hierdoor vindt geremde groei plaats.
Noem $A(t)$ de omvang van de algenpopulatie op dag t, uitgedrukt in procenten van M.
De groei van A wordt extra geremd doordat in de poel visjes leven, die algen eten.
Hierdoor verdwijnt een constante hoeveelheid algen per dag uit de poel.

Er geldt nu: $\frac{dA}{dt} = c \cdot A \cdot \left(1 - \frac{A}{100}\right) - v$,

waarbij c en v positieve constanten zijn.
Neem aan dat $A(0) = 70$, $c = 0.5$ en $v = 10$.

a. Benader $A(10)$ met de methode van Euler. Neem 1 als stapgrootte. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

b. Bereken uit de gegeven differentiaalvergelijking op welk percentage van M de algenpopulatie zich zal stabiliseren. (Profi-eindexamen 1998)

resultaten van dit hoofdstuk

differentiaalvergelijking	oplossingsfuncties
$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$	$y(t) = c \cdot e^{kt}$
$\frac{dy}{dt} = k \cdot (y - p)$	$y(t) = p + c \cdot e^{kt}$
$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right)$	$y(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-kt}}$

extra:
e als limiet

Uit het schema volgt dat elke oplossingsfunctie van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y$ van de vorm $y = c \cdot e^t$ is.
Is de beginwaarde $y(0)$ gelijk aan 1, dan moet c ook gelijk aan 1 zijn.
Dus: $y = e^t$ is de oplossingsfunctie met $y(0) = 1$. Gevolg: $y(1) = e$.

Van de andere kant heb je de methode van Euler geleerd om $y(1)$ te benaderen.
Neem als stapgrootte bijvoorbeeld 0.1
Op de GR vind je met ‘1 ENTER’ gevolgd door ‘Ans + 0.1*Ans’ na 10 stappen een (grove) benadering voor $y(1) = e$, namelijk: 2.59374246 (controleer maar).
In plaats van ‘Ans + 0.1*Ans’ had je natuurlijk even goed ‘1.1*Ans’ kunnen intoetsen!
In tien stappen heb je dus eigenlijk 1.1^{10} berekend, met als resultaat een benadering van e.

Een betere benadering krijg je door kleinere stappen te nemen, bijvoorbeeld 0.01.
Na honderd stappen bereik je dan $1.01^{100} \approx 2.704813829$ en dat ligt al een stuk dichter bij e.

Nog weer een betere benadering is: $1.001^{1000} \approx 2.716923932$.

In het algemeen:
bij een stapgrootte van $\frac{1}{n}$ vind je na n stappen de benadering $(1 + \frac{1}{n})^n$ voor het getal e.

Die benadering kun je *met elke gewenste nauwkeurigheid* krijgen, door het getal n maar groot genoeg te kiezen!

Voor n = 10 000 bijvoorbeeld, benadert $(1 + \frac{1}{n})^n$ het getal e in drie decimalen nauwkeurig.

Voor n = 100 000 is de benadering nauwkeurig tot in de vierde decimaal.

Men schrijft wel: $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

7 Gevarieerde toepassingen

7.1 Bedrog ontmaskerd

"Een verrijking van het Nederlandse kunstbezit", zo luidt het unanieme oordeel van de kunstkenners, als in 1938 het bij toeval opgedoken schilderij ‘de Emmausgangers’ van Johannes Vermeer voor het eerst aan het publiek gepresenteerd wordt. In aanwezigheid van koningin Wilhelmina verdringen pers en publiek zich voor het teruggevonden werk. Op het doek staat een bijbels tafereel, dat al snel één van de hoogtepunten van de Nederlandse schilderkunst uit de Gouden Eeuw wordt genoemd.
Het doek, waarvan een foto de kaft van dit pakket siert, is echter een vervalsing, geschilderd door Van Meegeren. Van Meegeren is voor deze vervalsing slim te werk gegaan. Hij heeft ervoor gezorgd dat het schilderij qua compositie en vorm een groot aantal elementen bevat die karakteristiek worden geacht voor Vermeer. Alle experts zijn dan ook direct overtuigd van de echtheid van het schilderij en het wordt niet eens meer op authenticiteit getest.
Tijdens de tweede wereldoorlog worden enkele schilderijen met medewerking van Van Meegeren verkocht aan de Duitsers. Zo ook ‘de Emmausgangers’.

Figuur 1: Van Meegeren (met de handen in het haar) tijdens proces in 1947, op de achtergrond het schilderij ‘Isaäc zegent Jacob’.

Na de oorlog wordt Van Meegeren daarom gevangen genomen op verdenking van collaboratie met de Duitsers. Pas dan verklaart hij dat het werk een vervalsing is. In de gevangenis bewijst hij zijn gelijk door nog een ‘Vermeer’ te schilderen. Als hij het bijna af heeft, blijkt hij niet meer aangeklaagd te worden voor collaboratie met de Duitsers, maar wel voor vervalsing. Hij weigert dan z’n schilderij af te maken in de hoop dat niemand achterhaalt hoe hij vervalst. Een internationaal onderzoeksteam toont aan dat enkele schilderijen vervalsingen van zijn hand zijn. Hij wordt veroordeeld en sterft enkele maanden later in de gevangenis. Ondanks zijn ontmaskering weigeren vele kunstkenners te geloven dat de Emmausgangers ook door Van Meegeren is geschilderd. Zij eisen een wetenschappelijk bewijs. In 1967 wordt dit geleverd.

De sleutel tot dit bewijs vormt het verval van radioactieve stoffen. In olieverf komt namelijk radioactief lood voor. De hoeveelheid hiervan neemt doorlopend af, omdat een deel van dit materiaal vervalt. Hierbij komt radioactieve straling vrij. Een model dat dit proces beschrijft kan, in combinatie met metingen, leiden tot het bepalen van de leeftijd van de verf.

model voor radioactief verval

Natuurkundigen hebben aangetoond dat de vervalsnelheid van het lood op elk moment evenredig met het aantal aanwezige grammen radioactieve lood-atomen N:

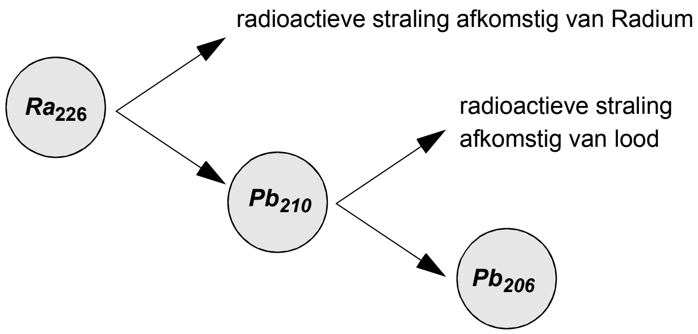
$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -k \cdot N \qquad (N \text{ in gram, } t \text{ in jaar}).$$

De waarde van de constante k bepaalt of de afname snel of langzaam plaats vindt. Deze waarde verschilt per scheikundig element: de k-waarde van het snel vervallende lood is groter dan die van bijvoorbeeld radium of uranium.

1 **a.** Verklaar het min-teken in dit model.
b. Van het radioactieve lood vervalt per jaar ongeveer 3.2%.
Ga na dat k dan ongeveer 0.0325 moet zijn
c. Hoeveel jaar ongeveer is de halveringstijd? (met andere woorden ‘na hoeveel jaar ongeveer is de hoeveelheid lood gehalveerd?’
d. Stel dat in de verf 1 gram radioactief lood zit. Hoeveel gram is er dan over na 300 jaar, de leeftijd van een echte Vermeer?

2 In de verf zit ook radioactief radium. Daarvan vervalt ongeveer 0.043% per jaar.
a. Stel dat in de verf 1 gram radioactief radium zit. Hoeveel is er over na 300 jaar?
b. Vergelijk je antwoord met dat van **1d**.

Volgens bovenstaande gegevens raakt het radioactieve lood vrij snel op, terwijl de hoeveelheid radioactief radium veel langzamer afneemt. De werkelijkheid is echter iets gecompliceerder, omdat het radioactieve radium vervalt tot radioactief lood, zoals blijkt uit het vereenvoudigde schema op de volgende pagina.



3 **a.** Verklaar dat het model kan worden aangepast tot:
$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -kN + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$, waarbij $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ het verval van radium weergeeft.
b. Ga na dat na 300 jaar kN klein is in vergelijking met $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$, en verklaar dat je kunt stellen dat na een periode van 300 jaar geldt:
$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$.

Dit laatste verband, $\frac{dN}{dt} \approx \frac{dR}{dt}$, komt goed van pas. De hoeveelheden radioactief lood en radium zelf zijn namelijk lastig te meten. Het verval is makkelijker te meten, omdat daarbij radioactieve straling vrijkomt en die straling is voor ieder element verschillend. In de volgende tabel staat de gemeten straling van radioactief lood en radium in enkele schilderijen, die vermoedelijk van de hand van Vermeer zijn:

schilderij	lood-straling	radium-straling
De Emmausgangers	8.5	0.8
De voetwassing	12.6	0.26
De kantwerkster	1.5	1.4
De soldaat en het lachend meisje	5.2	6.0

4 Verklaar waarom je op grond van het model en deze waarden kunt concluderen dat de eerste twee schilderijen (dus ook 'de Emmausgangers') niet zo oud kunnen zijn. Je kunt je voorstellen dat dit de kunstkenners overtuigde....

De Emmausgangers (van Meegeren)

7.2 Vallen met weerstand

De bekende formules voor vrije val: $v = gt$ en $s = \frac{1}{2}gt^2$ gelden in het luchtledige.

Zodra er sprake is van luchtweerstand moet het wiskundig model worden aangepast. Het gangbare model is nu dat de grootte van de luchtweerstand evenredig is met het kwadraatvan de snelheid. Stellen we de valversnelling in deze situatie voor door a, en de massa van het vallende voorwerp voor door m, dan geldt:

$$m \cdot a = m \cdot g - k \cdot v^2$$

ofwel:

$$a = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$$

Omdat $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, leidt dit tot een differentiaalvergelijking voor de valsnelheid v:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - p \cdot v^2$$

met $p = \frac{k}{m}$.

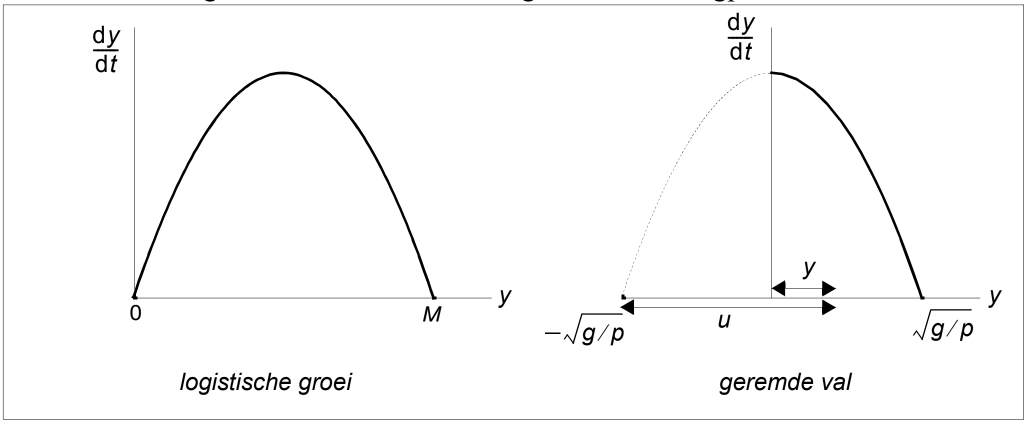
5 **a.** De massa van het voorwerp beïnvloedt in dit model de valversnelling en dus ook de valsnelheid. Hoe?

b. Kies $g = 10$ en neem verder aan dat voor een parachutespringer met dichte parachute en in kruishouding, de waarde van p gelijk is aan 0.003. Op het moment dat de val begint is de snelheid nul. Benader nu de snelheid 10 seconden na het begin van de val met behulp van de methode van Euler. Neem als stapgrootte 0.5.

c. Hoe groot ongeveer zal de maximale snelheid (in km/h) volgens dit model zijn?

extra Het model $\frac{dy}{dt} = g - p \cdot y^2$ laat zich ook exact oplossen.

Net als bij logistische groei is het rechterlid een kwadratische functie van y.
Door weer een 'slimme substitutie' kun je dezelfde vorm als de logistische differentiaalvergelijking krijgen. Om het goede idee te krijgen vergelijken we het rechterlid van beide modellen. De grafiek daarvan is in beide gevallen een bergparabool.



Bij logistische groei zijn de nulpunten van de kwadratische functie 0 en M, bij de geremde val zijn die nulpunten $\pm\sqrt{g/p}$.

Verschuiving naar rechts van de tweede grafiek over de afstand $\sqrt{g/p}$ geeft dezelfde situatie als bij de logistische groei. Algebraïsch betekent dit: y vervangen door $u - \sqrt{g/p}$ (zie figuur).
Dit leidt tot een nieuwe differentiaalvergelijking voor u, namelijk:

$$\frac{du}{dt} = 2\sqrt{gp} \cdot u \cdot \left(1 - \frac{u}{2\sqrt{g/p}}\right)$$

6 a. Maak een substitutieschema (zoals in hoofdstuk 6) en controleer deze laatste differentiaalvergelijking.

b. Pas nu toe wat je weet (of kunt terugvinden in hoofdstuk 6) van de oplossingsfuncties bij logistische groei en verklaar:

$$y = \frac{2\sqrt{g/p}}{1 + e^{-2\sqrt{gp} \cdot t}} - \sqrt{g/p}$$

c. Wat gebeurt er met de waarde van y als t heel groot wordt?

7.3 Praktische opdracht

In 1932 werd de Zuiderzee afgesloten door de Afsluitdijk. Zo ontstond het IJsselmeer. Door de instroom van de IJssel en de uitstroom via de sluizen van de Afsluitdijk, vond er een geleidelijk daling van het zoutgehalte in het IJsselmeer plaats.

De grafiek hieronder illustreert de daling van het zoutgehalte in de jaren 1932 -34.

De gestippelde grafiek is gebaseerd op een wiskundig model, uitgaande van een normale watervoorraad en een normale zoutconcentratie.
De normale getallen hiervoor zijn:
– volume IJsselmeer is ca. $13 \cdot 10^{12}$ liter.
– instroom via de IJssel is ca. $13 \cdot 10^{12}$ liter per jaar; het zoutgehalte van het IJsselwater is ca. 0.1 g per liter;

7 Verplaats jezelf naar 1932, het moment van voltooiing van de Afsluitdijk. Je bent wiskundig adviseur en er wordt je gevraagd een voorspelling te doen over het zoutgehalte van het water in het IJsselmeer op lange termijn (zeg maar tot het jaar 2000). Je gebruikt een differentiaalvergelijking als model voor je berekeningen.

a. Schrijf een kort rapport waarin je uiteenzet, wat je verwachtingen zijn. Geef een wiskundige verantwoording van je resultaat.

b. Omdat je weet dat de werkelijkheid zich niet altijd houdt aan de wiskundige voorspelling (de grafiek hierboven laat dat duidelijk zien) hou je een slag om de arm en noem je een of meer redenen voor mogelijke afwijkingen.

Antwoorden

1 Modellen van Galileï en Malthus

1 **a.** $y = \frac{1}{2}gt^2$; differentiëren naar t geeft $\frac{dy}{dt} = gt$. Bovendien geldt $y = 0$ voor $t = 0$.

b. Exponentiële functies dat wil zeggen functies van de gedaante $y = a^t$ met $a > 0$.

Je mag zo'n functie ook nog met een constante vermenigvuldigen, $y = c \cdot a^t$ voldoet ook.

2 **b.** Als $g > s$, dan neemt bevolking toe; als $g = s$, dan blijft de bevolking constant; als $g < s$, dan neemt de bevolking af.

3 **a.** Als $N(t) = a^t$, dan $N'(t) = \ln a \cdot a^t$.

Uit $\ln a = 0{,}05$ volgt $a = e^{0{,}05} \approx 1{,}0513$

b. $N(t) = 2{,}4 \cdot e^{0{,}05t} \approx 2{,}4 \cdot 1{,}0513^t$

c. $(e^{0{,}05})^{10} \approx 1{,}6487$, dus met zo'n 65%

4 **a.** Uit $a^{350} = 10$ volgt $a = 10^{1/350} \approx 1{,}0066$. Verder: $c = N(0) \approx 0{,}6$.

b. In het jaar 1900 ($t = 250$); de raaklijnen lijken daar evenwijdig.

De afgeleide van $N(t) = 0{,}6 \cdot 1{,}0066^t$ voor $t = 250$ is gelijk aan:

$0{,}6 \cdot \ln 1{,}0066 \cdot 1{,}0066^{250} \approx 0{,}02$; de groei per jaar bedroeg rond 1900 dus zo'n 0.02 miljard mensen. De wereldbevolking in 1900 bedroeg ongeveer 2 miljard (zie grafiek), dus het groeipercentage was toen ongeveer 1%.

5

a. $y = t^2$

b. $y = e^{2t}$

c. $y = 2\ln t$

d. $y = \sqrt{t}$

e. $y = t^2$

f. $y = t^3$

7 **a.** $\frac{dy}{dt} = k \cdot \sqrt{y}$

b. Uit $y = 5t^2$ volgt $t = \sqrt{0{,}2y}$; gecombineerd met $\frac{dy}{dt} = 9{,}8 \cdot t$ geeft dit:

$\frac{dy}{dt} = 9{,}8\sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{y} \approx 4{,}38\sqrt{y}$.

2 Het logistische groeimodel

1 **a.**

b. Na een tijdje begint de exponentiële groei te remmen, de kromme gaat minder snel meer stijgen.

c. Op ongeveer 650 cellen per cm^3.

2 **a.** Door de opeenvolgende waarden op elkaar te delen vinden we: 1.5, 1.57, 1.52, 1.48 en 1.49. Dit is met enige goede wil wel als constant te beschouwen: ongeveer 1.5.

b. De groeifactor voor 5 uur is gelijk aan $\frac{110}{14} \approx 7{,}86$ Dus per uur: $\sqrt[5]{\frac{110}{14}} \approx 1{,}51$, zeg maar 1.5.

c. $A(t) = 14 \cdot 1{,}5^t$.

3 **a.**

b. $\frac{dA}{dt} = \ln(1{,}5) \cdot 14 \cdot 1{,}5^t = \ln(1{,}5) \cdot A(t)$

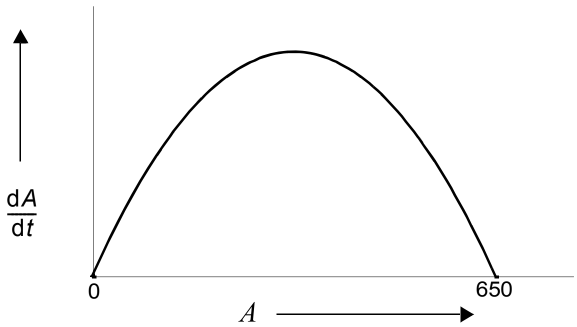
c. Zie **b**. Dan moet gelden $c = \ln(1,5) \approx 0,405$.

4 **a.** $remfactor = 1 - \frac{A}{650}$.

b. Aantal ‘bezette’ plaatsen: A.
Aantal ‘vrije’ plaatsen: $650 - A$
Relatief: $(650 - A)/650$. Dat komt op hetzelfde neer.

5 $remfactor = 1 - \frac{A}{650} = 1 - bezettingsgraad$.

6 **a.**



b. Als het aantal gistcellen de helft is van het maximale aantal, dus bij 325 cellen.

c. Dat zijn de waarden van A waarvoor er geen groei plaatsvindt. In dit geval: $A = 0$ en $A = 650$.

7 **a.** $\frac{dA}{dt} = 0{,}69A \cdot (1 - \frac{A}{900})$. De waarde 0.69 is een afronding van ln(2).

b. Voor de helft van 900 cellen, dus 450 cellen.

c. Invullen van $A = 1000$ geeft een groeisnelheid van -76.7. Een sterke afname dus, wat wel voorstelbaar is als de waarde van A boven het maximum ligt.

3 De methode van Euler

1 Vervang t door $t_0 + 1$.

2 **a.** Op tijdstip $t = 0$ geldt: $\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot 14 \cdot (\frac{650 - 14}{650}) \approx 5,6$.

b. $A(1) \approx 14 + 5,6 = 19,6$.

3 **a.** Op tijdstip $t = 1$ geldt: $\frac{dA}{dt} = 0{,}41 \cdot 19,6 \cdot (\frac{650 - 19,6}{650}) \approx 7,8$.

b. $A(2) \approx 19,6 + 7,8 = 27,4$.

4

tijd t	0	1	2	3	4
benadering van aantal A	14	19.6	27.4	38.2	52.9
$\frac{dA}{dt}$	5.6	7.8	10.8	14.7	19.9

5 **a.**

tijd t	0	1	2	3	4	5	6	7
benadering van aantal A	14	19.6	27.4	38.2	52.9	72.8	99.4	133.9
tijd t	8	9	10	11	12	13	14	15
benadering van aantal A	177.5	230.4	291.3	357.2	423.2	483.8	534.5	573.4

b. Vanaf $t = 2$, al erg snel dus.

6 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is gelijk aan $A'(t)$. Als je 0.5 naar rechts gaat, ga je dus $A'(t)$.0.5 omhoog.

7 **a.** $A(0,5) \approx 14 + 5,6 \cdot 0,5 = 16,8$

$$A'(0,5) = 0,41 \cdot 16,8 \cdot \left(1 - \frac{16,8}{650}\right) \approx 6,7$$

$A(1) \approx 16,8 + 6,7 \cdot 0,5 = 20,2$

b.

t	A	A_1	$A_{0.5}$	$A_{0.1}$
0	14	14	14	14
1	21	19.6	20.2	20.7
2	33	27.4	28.9	30.5
3	50	38.2	41.3	44.6
4	74	52.9	58.6	64.5
5	110	72.8	82.2	92.1

c. Naarmate de stapgrootte kleiner wordt, stemmen de benaderingen meer overeen met de werkelijkheid.

8 a. Uit $\frac{\Delta O}{\Delta t} = c$ en $\Delta O \approx \Delta R \cdot 2\pi R$ volgt $\frac{\Delta R}{\Delta t} \cdot 2\pi R \approx c$, ofwel: $\frac{\Delta R}{\Delta t} \approx \frac{c}{2\pi R}$.
Merk op dat de benadering beter zal zijn, naarmate Δt kleiner is.
Laten we Δt willekeurig klein worden, dan komt er : $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{2\pi R}$ ofwel $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{R}$

met $k = \frac{c}{2\pi}$

b. $R(4) \approx 4{,}212$

c. $R'(t) = \frac{2}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{R}$.

d.

stapgrootte	1	0.75	0.5	0.1
benadering van R(4)	4.212	4.151	4.095	4.017

$R(4) = 4$. Bij een stapgrootte van 0.5 is de afwijking al kleiner dan 0.1

4 Richtingsvelden

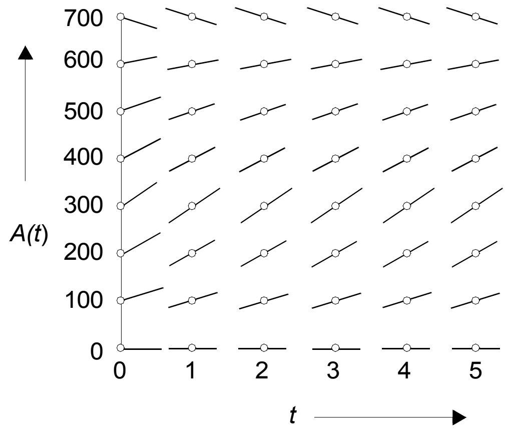
1 a. Op tijdstip $t = 0$ geldt: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0{,}41 \cdot 14 \cdot \left(\frac{650 - 14}{650}\right) \approx 5,6$.

b. Als $A(0) = 20$, dan geldt op tijdstip $t = 0$: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0{,}41 \cdot 20 \cdot \left(\frac{650 - 20}{650}\right) \approx 7,9$.

c.

$A(0) =$	0	100	200	300	400	500	600	700
$A'(0) =$	0	34.7	56.8	66.2	63.1	47.3	18.9	-22.1

2 **a.** De lijnelementen in punten die even hoog liggen, zijn gelijk; het is dus een kwestie van horizontaal verschuiven van de startrichtingen. Resultaat:



3 **c.** Een horizontale lijn. Als $A = 650$, dan is - ongeacht het tijdstip - de groeisnelheid $\frac{dA}{dt}$ gelijk aan 0 en dat betekent dat de waarde van A nooit verandert.

d. Bij $A = 325$.

4 **b.** De gemiddelde hoogte neemt niet onbegrensd toe, maar lijkt op een bovengrens af te stevenen.

c. De maximale hoogte zal in de buurt van 255 cm liggen.

d. Met de vergelijking $\frac{dH}{dt} = c \cdot H \cdot \left(1 - \frac{H}{255}\right)$.

5 **a.** Gedurende de tweede week neemt de gemiddelde hoogte toe met een factor 36.4 / 18.0 = 2.02. Groeifactor per dag is dan $2{,}02^{1/7} \approx 1{,}106$.
De waarde van c is de natuurlijke logaritme hiervan: $c \approx \ln(1{,}106) \approx 0{,}10$.

d. Op hoogte H is de groeisnelheid gelijk aan $0{,}42 \cdot H \cdot \left(1 - \frac{H}{255}\right)$.

Als we dit $f(H)$ noemen, dan geldt: de grafiek van f is een bergparabool met nulpunten bij $H = 0$ en $H = 255$. De top ligt in het midden daarvan, dus voor $H = 127.5$ is de groei maximaal. Voor kleinere H neemt de groei toe, en voor grotere H neemt de groei af. Dus heeft de grafiek van H op hoogte 127.5 een buigpunt.

5 Practicum Richtingsvelden met VU-Grafiek

1 **b.** De oplossingskromme is dan een horizontale lijn.

c. Deze krommen dalen ‘asymptotisch’ naar de lijn $y = 100$.

d. Die dalen steeds sneller naar $-\infty$.

2 **b.** Aan exponentiële functies, bijvoorbeeld $y = e^x$.

Controle: als $y = e^x$, dan $\frac{dy}{dx} = e^x = y$

c. De grafieken gaan steiler lopen als k groter wordt en minder steil als k kleiner wordt.

d. Als k negatief is, ontstaan dalende grafieken in plaats van stijgende.

3 **a.** Dezelfde vorm, maar ze zijn over de afstand 10 omhoog geschoven.
b. De lijn $y = 10$.
c. Als de startwaarde groter dan 10 is, is de grafiek stijgend; bij een startwaarde kleiner dan 10 is de grafiek dalend.
d. Dan verschuift alles in verticale richting.
e. Net als bij opgave **2** bepaalt het teken van k, samen met de startwaarde, het stijgen dan wel dalen van de oplossing.

4 Een oplossing in het geval $k = 1$ is bijvoorbeeld: $y = -\frac{1}{x}$. Controle: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} = y^2$

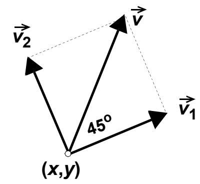
5 **b.** De oplossingsgrafieken zijn symmetrisch ten opzichte van de y-as.
c. $y = e^{x^2}$ voldoet bijvoorbeeld; inderdaad: $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{x^2} = 2xy$

6 **b.** $y = -x - 1$; die oplossing kun je ‘zien’ in het richtingsveld en vervolgens controleren.
c. Als $y = e^x - x - 1$, dan $\frac{dy}{dx} = e^x - 1 = x + y$

7 **b.** $y = x + 1$ en $y = x - 1$. Voor beide functies geldt: $\frac{dy}{dx} = 1$ en ook $(y - x)^2 = 1$.
c. Als een oplossingsgrafiek een punt op de lijn $y = x$ heeft, dan is dat punt een horizontaal buigpunt van die grafiek. Uit de differentiaalvergelijking volgt direct dat de richtingscoëfficiënten van alle lijnelementen ≥ 0 moeten zijn; de minimale richtingscoëfficiënt $= 0$ en dat minimum wordt bereikt als $y - x = 0$, dat wil zeggen in de punten van de lijn $y = x$.

8 **a.** $|PV| = y$ en $|VQ| = \sqrt{1 - y^2}$, dus $\frac{dy}{dx} = -\frac{|PV|}{|VQ|} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$

9 Veronderstel dat de verkeerstoren zich in het punt (0,0) bevindt.



Vector $\vec{v_1}$ ligt in het verlengde van de lijn naar de verkeerstoren en is dus een veelvoud van de vector met kentallen (x, y), zeg: $\vec{v_1} = (ax, ay)$.
Vector $\vec{v_2}$ staat loodrecht op $\vec{v_2}$ en is even lang, dus: $\vec{v_2} = (-ay, ax)$.
Vector $\vec{v}$ is de som van $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$: de kentallen zijn dan $(ax - ay, ax + ay)$.

De richtingscoëfficiënt van de werklijn van $\vec{v}$ krijg je door deling van de kentallen:
Conclusie: $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + ay}{ax - ay} = \frac{x + y}{x - y}$.

6 Oplossingen van standaardvergelijkingen

1 **a.** $a = 3.32$ voor $k = 1.2$ en $a = 0.45$ voor $k = -0.8$

b. De grafiek van $y = a^t$ gaat in elk geval door het punt (0, 1) en blijft boven de t-as. Aan het richtingsveld voor $k = 1.2$ zie je dat de grafiek stijgend moet zijn, dat betekent $a > 1$; voor $k = -0.8$ krijg je een dalende grafiek, dus $0 < a < 1$.

2 **a.** $y(t) = 2 \cdot e^{1,2t}$ resp. $y(t) = -3 \cdot e^{1,2t}$.
De eerste functie is stijgend, de tweede dalend.

b. $y(t) = 0,5 \cdot e^{-0,8t}$ resp. $y(t) = -1 \cdot e^{-0,8t}$
De eerste functie is dalend, de tweede stijgend.

3 **a.** Functies van de vorm $y = c \cdot e^{4t}$ voldoen aan de differentiaalvergelijking.
De grafiek gaat door (1, 2) als $2 = c \cdot e^4$ dus als: $c = 2e^{-4}$;
een oplossingsfunctie is dus: $y = 2e^{-4} \cdot e^{4t}$ ofwel $y = 2 \cdot e^{4t-4}$

b. De grafiek gaat door (-1, 3) als $3 = c \cdot e^{-4}$ dus als: $c = 3e^4$;
een oplossingsfunctie is dus: $y = 3e^4 \cdot e^{4t}$ ofwel $y = 3 \cdot e^{4t+4}$

c. Ja, de oplossing met c-waarde 0; dat geeft de constante functie $y = 0$.

4 Als de grafiek van $y = e^{1,2t}$ horizontaal wordt verschoven (zeg over een afstand p, krijg je de grafiek van $y = e^{1,2(t-p)}$ en deze formule kun je omvormen tot $y = e^{-1,2p} \cdot e^{1,2t}$ ofwel $y = c \cdot e^{1,2t}$ met $c = e^{-1,2p}$.

5 De (enige) oplossing waarvan de grafiek door (0, 0) gaat is de constante functie $y = 0$. Dat maakt de hypothese onmogelijk: het voorwerp zou volgens deze hypothese niet van plaats veranderen!

6 **a.** $K = K_0 \cdot e^{0,0065t}$

b. $e^{0,0065} \approx 1,067$ dus 6.7%

c. Uit $e^{0,065t} = 2$ volgt $t = \dfrac{\ln 2}{0,065} \approx 10,663$, dus na ongeveer 10 jaar en 8 maanden.

7 Oplossingen zijn functies van de vorm $I(s) = 100 \cdot e^{-ks}$.
Bovendien is gegeven dat $I(3) = 40$. Invullen geeft: $e^{-3k} = 0,4$, dus $k = \ln(0,4)/(-3) \approx 0,31$.

8 Er geldt: $P(t) = c \cdot e^{-0,3t}$. Direct na het innemen van de eerste pil, krijgt $P(t)$ de waarde 350 000, dus $c = P(0) = 350\,000$. Uit $350000 \cdot e^{-0,3t} = 100000$ volgt $t = 4$. Dus 4 uur na de eerste pil moet de tweede worden ingenomen. Direct na het innemen van de tweede pil is de waarde van $P(t)$ gelijk aan 100000 + 350000 = 450000.
De periode voor het innemen van de derde pil bereken je nu uit:
$450000 \cdot e^{-0,3t} = 100000$ en dat geeft $t = 5$. Dus na de tweede pil, kunnen de medicijnen met tussenpozen van 5 uur worden ingenomen,

9 b. V en T verschillen een constante, dus hebben ze dezelfde afgeleide.

c. $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -a \cdot V$

d. $V = 80 \cdot \mathrm{e}^{-at}$

e. Volgt direct uit $T = 80 + V$

f. Materiaal en vorm van de pan.

10 a. Door verticale verschuiving (3 omhoog).

b. $y = 3$

c. $y = 3 + 2 \cdot \mathrm{e}^{1,2t}$

11 a. Volgt uit: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \times \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

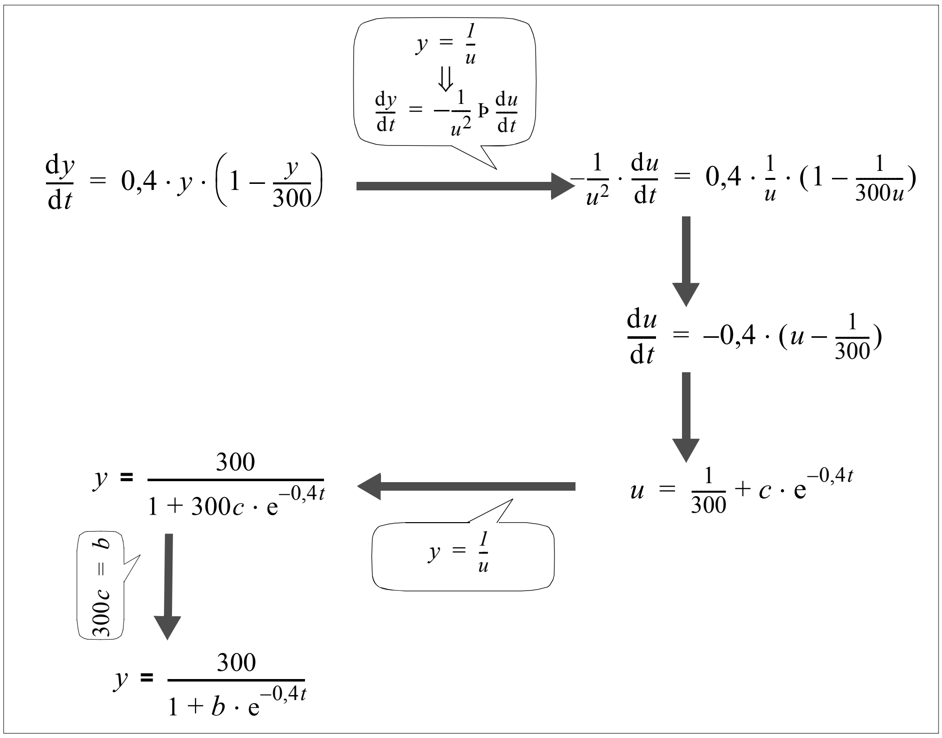
b. Substitutie leidt tot: $-\dfrac{1}{u^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0{,}4 \cdot \dfrac{1}{u} \cdot (1 - \dfrac{1}{300u})$; links en rechts vermenigvul-

digen met -u^2 geeft $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -0{,}4 \cdot (u - \dfrac{1}{300})$

c. $u = \dfrac{1}{300} + c \cdot \mathrm{e}^{-0,4t}$

d. $y = \dfrac{1}{\frac{1}{300} + c \cdot \mathrm{e}^{-0,4t}} = \dfrac{300}{1 + 300c \cdot \mathrm{e}^{-0,4t}}$

e.



12 b. y nadert tot 300.

Voor grote waarden van t wordt $\mathrm{e}^{-0,4t}$ vrijwel nul en $\dfrac{300}{1 + b \cdot 0} = 300$

c. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ is maximaal als $y \cdot (1 - \dfrac{1}{300})$ maximaal is, en dat is het geval als $y = 150$.

d. Uit $y = 150$ en $y = \dfrac{300}{1 + b \cdot e^{-0,4t}}$ volgt $b \cdot e^{-0,4t} = 1$
Voor $b = 1$ geeft dit $t = 0$; voor $b = 2$ geeft dit $t \approx 1.73$ en voor $b = 3 : t \approx 2.75$

13 a. Uit $\frac{650}{1+b} = 14$ volgt $b \approx 45,42857$

b. De functiewaarden die op de GR afleest zijn (behalve de startwaarde) lager dan de waarden uit de tabel op bladzijde 5.

14 b. Uit het plaatje zien we dat ongeveer tot 9 dagen de groei exponentieel lijkt te zijn.

De groeifactor per dag is dan $\sqrt[9]{52/6} \approx 1,27$.

Voor k geldt dan: $k \approx \ln(1,27) \approx 0,24$.

Het maximum ligt naar schatting rond 350 fruitvliegjes.

Dat geeft de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt} = 0,24 \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{350})$.

De oplossing hiervan is: $y(t) = \dfrac{350}{1 + b \cdot e^{-0,24 \cdot t}}$.

Invullen van de beginwaarde 6 op tijdstip $t = 0$ geeft: $y(t) = \dfrac{350}{1 + 57,3 \cdot e^{-0,24 \cdot t}}$.

15 b. De groeifactor over 50 jaar is 17069 / 3929. Per 10 jaar komt dat neer op:

$\sqrt[5]{17069/3929} \approx 1,34$. Voor c geldt dan: $c \approx \ln(1,34) \approx 0,29$.

c. Het buigpunt ligt op de helft van het maximale aantal. Dus $M \approx 211422$.

d. $y(t) = \dfrac{211422}{1 + 52,8 \cdot e^{-0,29t}}$. Invullen van $t = 17$ geeft: $y(17) \approx 153031$.

16 a. Met beginwaarde 70 en stapformule 'Ans + 0.5*Ans*(1 – Ans/100) – 10' vind je: $A(10) \approx 72.16$

b. Stabilisatie betekent geen verandering, ofwel $\frac{dA}{dt} = 0$. Uit de differentiaalvergelijking vind je nu: $A \approx 72.36$

7 Gevarieerde toepassingen

1 a. Er is sprake van verval, dus van afname.

b. Uit $e^{-k} = 1 - 0,032 = 0,968$ volgt $k = -\ln 0,968 \approx 0,0325$

c. Halveringstijd = $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,968} \approx 21,3$, dus na ruim 21 jaar

d. $0,968^{300} \approx 5,8 \cdot 10^{-5}$ gram.

2 a. $0,99957^{300} \approx 0,879$ gram

b. Dat is veel en veel meer dan bij lood.

3 **a.** De groeisnelheid van het lood is gelijk aan $-kN$ vanwege het verval, maar het radium dat vervalt wordt lood. Dat vervalsnelheid van radium moet er dus bij opgeteld worden.

b. Na 300 jaar: $-kN \approx 0,033 \cdot 5,8 \cdot 10^{-5} \approx 1,9 \cdot 10^{-6}$, terwijl op dat tijdstip

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \ln(0,99957) \cdot 0,99957^{300} \approx 3,78 \cdot 10^{-4}.$$

Dit laatste is in de orde van 200 keer zo groot.

4 Omdat de hoeveelheid radioactief lood na 300 jaar verwaarloosbaar is ten opzichte van het radioactieve radium, is het vervallen radium vrijwel geheel de oorzaak van de lood-straling. De beide afgeleiden zullen dus ongeveer aan elkaar gelijk moeten zijn. Dat is wel het geval bij de laatste twee schilderijen, maar niet bij de eerste twee.

5 **a.** Als twee voorwerpen ongeveer even groot zijn, dan zal het voorwerp met de kleinste massa de grootste luchtweerstand ondervinden en dus de kleinste valversnelling hebben.

b. Neem $v(0) = 0$ en $v(t + 0.5) = v(t) + 0.5 \times (10 - 0.003 \times v(t)^2)$
na 20 stappen levert dit op: $v(10)$ is ongeveer 54.86.

c. Herhaling leert dat dat de snelheid op den duur nauwelijks nog verandert en dat de maximale snelheid ongeveer gelijk is aan 57.735 m/sec of bijna 208 km/h.

6 **a.** en **b.**

$$y = u - \sqrt{g/p} \;\Downarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g - p \cdot y^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -pu^2 + 2\sqrt{gp} \cdot u$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{gp} \cdot u \cdot \left(1 - \frac{u}{2\sqrt{g/p}}\right)$$

$$M = 2\sqrt{g/p} \qquad k = 2\sqrt{gp}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{2\sqrt{g/p}}{1 + e^{-2\sqrt{gp} \cdot t}} - \sqrt{g/p} \longleftarrow u = \frac{2\sqrt{g/p}}{1 + e^{-2\sqrt{gp} \cdot t}}$$

$$y = u - \sqrt{g/p}$$

c. Die nadert tot $\frac{2\sqrt{g/p}}{1+0} - \sqrt{g/p} = \sqrt{g/p}$. Voor $g = 10$ en $p = 0.003$ geeft dit inderdaad het resultaat van **5c**!