

# Dynamische modellen

## Een lesmodule voor Wiskunde D en Natuur, Leven en Technologie



## Hoofdstuk 1

### Kennismaken met dynamische modellen (Coach versie)

*Versie 1 oktober 2006*

bron: Inleiding gedeeltelijk uit module "Een Sportieve Beweging"  
<http://www.cdbeta.uu.nl/vo/modelleren/default.php>

Bij het lesmateriaal hoort een digitale gids

CTWO-werkgroep Dynamische Modellen  
Paul Drijvers  
Carel van de Giessen  
Kees Hooyman  
Elwin Savelsbergh  
© cTWO 2006

# Kennismaken met modellen

## 1.1 Wat is een dynamisch model?

### Inleiding

Modellen zijn hulpmiddelen om de wereld om je heen en ook de wereld in jezelf te begrijpen. Denk bijvoorbeeld aan een model van het zonnestelsel, een molecuulmodel of een model van de bloedsomloop. Modellen zijn eigenlijk zo oud als de mensheid. Al eeuwen geleden maakten de mensen een klein bootje om uit te proberen voordat ze een groot schip gingen bouwen. Dat was natuurlijk alleen nuttig voor zover dat kleine bootje zich net zo gedroeg als het grote schip.

- 1 Welke eigenschappen van het schip zou je goed kunnen bestuderen aan de hand van het kleine bootje, welke eigenschappen niet?

In de wetenschap gaat dat niet anders: onderzoekers proberen verschijnselen te beschrijven, te verklaren en te voorspellen. Dat doen ze door modellen op te stellen. Dat kunnen bijvoorbeeld schaalmodellen zijn (figuur 1 en 2). Met zulke schaalmodellen kun je proberen het stromingspatroon van het water bij een nieuw aan te leggen havenmonding na te bootsen, of de krachten op een nieuw type vliegtuig.

Er staat 'proberen na te bootsen' want het gaat niet altijd goed: als je de havenmond in schaal 1 op 100 nabouwt is het nog maar de vraag of de golven ook  $1/100^e$  van de ware grootte zullen zijn.

Als je schaalmodel wel bruikbaar blijkt te zijn kan onderzoek aan het model leiden tot verbeteringen in het ontwerp. Voor het testen van zo'n verbeterd ontwerp moet dan weer een nieuw schaalmodel gebouwd worden.



*Figuur 1 - Een schaalmodel van een havenmonding.*



*Figuur 2 - Een schaalmodel van een vliegtuig in een windtunnel.*

Het kan ook heel anders: een 'pakketje lucht' gehoorzaamt aan de wetten van Newton en de algemene gaswet. De natuurwetten die de luchtbeving beschrijven zijn dus bekend. Door de luchtmassa op te delen in heel veel kleine stukjes, en voor ieder stukje de bewegingsvergelijkingen op te stellen kun je in principe uitrekenen hoe de lucht om het vliegtuig heen zal gaan bewegen. Om dit de uitkomsten van dit 'wiskunde model' te berekenen heb je wel heel veel berekeningen nodig. Met de hand is dat geen doen, en aan een gewone pc zul je meestal ook niet voldoende hebben, maar op een supercomputer kom je een heel eind.

Een groot voordeel van zo'n computermodel is dat het eenvoudig aan te passen is: je kunt de vorm van het vliegtuig een beetje veranderen, en om na te gaan welk effect die wijziging heeft. In de praktijk zie je dan ook dat steeds meer windtunnelproeven vervangen worden door modelberekeningen; je gaat dan pas de windtunnel in als je al bijna zeker bent van het juiste ontwerp.

### Dynamische modellen

De stroming van water in de havenmond is een voorbeeld van een dynamisch verschijnsel: er werken krachten op het water, daardoor komt het water in beweging en daardoor veranderen de krachten weer, enzovoorts. Om zo'n proces wiskundig te beschrijven gebruik je een dynamisch model, waarin je uitgaande van een begintoestand al die veranderingen stap voor stap narekent.

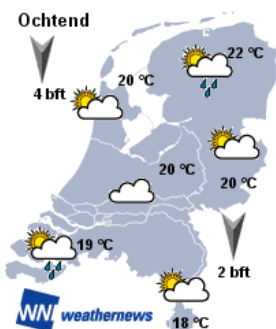
Een bekend voorbeeld van een dynamisch model is het model waarmee weersvoorspellingen gemaakt worden. Daarbij begint de computer met de toestand nu, gebaseerd op een enorme hoeveelheid meetgegevens uit een groot gebied. Aan de hand van die gegevens wordt berekend wat de situatie een uur later is, en met die gegevens wordt verder doorgerekend voor de situatie over twee uur, drie uur, etc. De huidige computers kunnen het weer voor zeven dagen voorspellen, maar hoe verder je vooruit voorspelt, hoe minder je op de uitkomsten kunt vertrouwen.

### Dynamische modellen

Een dynamisch model beschrijft hoe een bepaalde situatie verandert in de loop van de tijd. Het model wordt vaak gebruikt om te voorspellen hoe de variabelen die de situatie beschrijven in de loop van de tijd veranderen.

Een voorbeeld van een dynamisch model is het model dat gebruikt wordt bij het voorspellen van het weer. Voor het maken van een voorspelling worden veel gegevens verzameld om de huidige weerssituatie te beschrijven.

- 2 In figuur 3 wordt de weerssituatie beschreven door verschillende variabelen zoals de temperatuur en de windsnelheid op verschillende plaatsen. Stel dat je wilt gaan voorspellen hoe het weer de komende uren verandert, dan moet je allereerst de beginsituatie op ieder punt nauwkeurig kennen.
- Noem, naast windrichting en temperatuur nog een variabele die van belang is.



Figuur 3 - De weerssituatie wordt beschreven door verschillende variabelen.

- De weerssituatie verandert door bijvoorbeeld het opstijgen van warme vochtige lucht, waardoor condensatie optreedt, of door stroming van lucht van hoge naar lage druk.
- Noem nog een factor die invloed heeft op de verandering van de weerssituatie.

## Een praktijkvoorbeeld: de griep epidemie

Dynamische modellen worden vaak gebruikt om voorspellingen op te stellen. Een voorbeeld waarbij een voorspelling belangrijk kan zijn is de jaarlijkse griepgolf die soms uitgroeit tot een griep epidemie. De overheid wil graag in een vroeg stadium weten hoe ernstig de epidemie zal zijn, omdat er dan nog maatregelen getroffen kunnen worden.

De centrale vraag in dit hoofdstuk is: *“Hoe kun je een computermodel maken dat een voorspelling kan doen voor een griep epidemie?”*.

Om die vraag te kunnen beantwoorden kijken we eerst naar vragen zoals: Wat moet je weten van een griep om een model op te stellen? Hoe werkt een computermodel? Wat heb je nodig om een computermodel te bouwen?

### Oriëntatie op de situatie

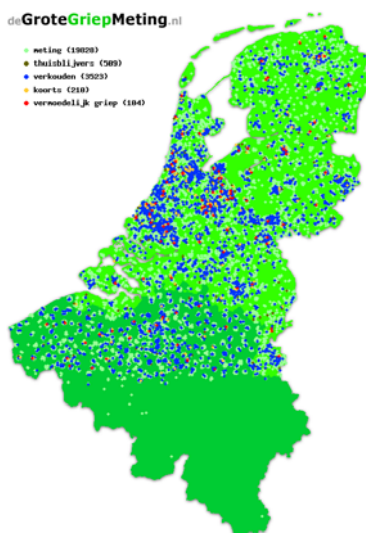
Een model moet een vereenvoudigde beschrijving van de werkelijkheid zijn, die je kunt gebruiken voor het maken van een voorspelling. Het bouwen van een computermodel begint dan ook meestal met een oriëntatie op het verschijnsel. Lees eerst de onderstaande tekst

Elk jaar trekt in de herfst en de winter een griepplaag over Noord-Europa. Griep is besmettelijk, dat wil zeggen dat iemand die griep heeft een ander kan aansteken. Als dit grote aantallen mensen treft spreekt men wel van een griep epidemie. Elk jaar komt de griep in grotere of kleinere golven, treft sommigen wel en anderen niet. In Nederland wordt het verloop van de griep de laatste jaren bijgehouden via internet. Op de website [www.degrotegriepmeting.nl](http://www.degrotegriepmeting.nl) vind je gegevens over de griep in Nederland.

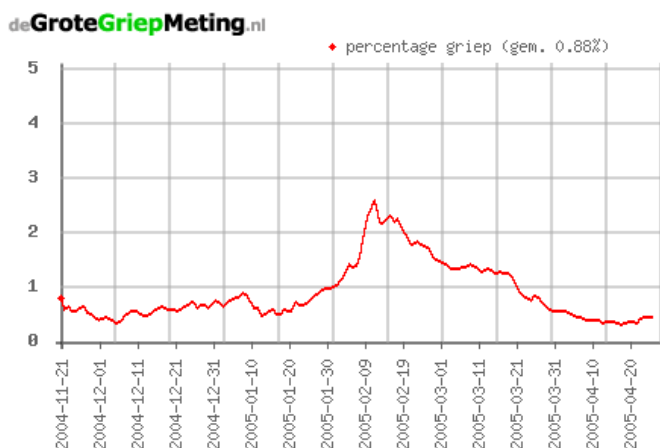
De onderstaande grafiek laat zien hoe de (kleine) griep epidemie uit het seizoen 2004-2005 verliep.



figuur 4 - Kamagurka, Volkskrant 1 juni 2006



Figuur 6 - Tijdens de GroteGriepMeting wordt via internet bijgehouden hoeveel procent van de deelnemers verkouden is of de griep heeft.



Figuur 5 - De griepgolf van het seizoen 2004-2005

Griep kan gevaarlijk zijn. De Spaanse griep uit het begin van de vorige eeuw eiste miljoenen slachtoffers. De normale griepuitbraken zijn vooral voor oudere mensen levensbedreigend en daarom moedigt de overheid ouderen aan om elk jaar een griepprik te halen.

Als er een grote griep epidemie dreigt, dan moet de overheid extra maatregelen nemen. Omdat er geen goede medicijnen zijn tegen de griep en een griepprik pas na een dag of tien werkt, is het van belang om bijtijds een goede voorspelling te kunnen maken.

De overheid wil daarom van tevoren kunnen voorspellen hoe hoog de piek in de epidemie wordt en hoeveel procent van de bevolking uiteindelijk de griep

krijgt. Daarvoor worden enerzijds de gegevens gebruikt over het type virus dat de epidemie veroorzaakt en anderzijds de gegevens van de GroteGriepMeting om te zien hoe snel het virus zich verspreidt. Die gegevens zijn de basis voor een computermodel om te voorspellen hoe de griep zich zal ontwikkelen.

- 3 De overheid wil in een vroeg stadium een voorspelling hebben van het verloop van de griep epidemie.
  - a. Geef twee redenen waarom de overheid bijtijds een voorspelling wil hebben.  
Een voorspelling van het verloop van de griepgolf zal verschillende gegevens opleveren.
  - b. Noem twee gegevens waarin de overheid geïnteresseerd zal zijn.

#### Conclusie: beginsituatie en veranderingen

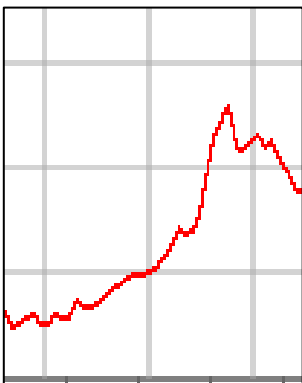
Om een voorspelling met een computermodel te maken heb je gegevens nodig over de beginsituatie én over de veranderingen die daarin optreden. Hoe snel verlopen die veranderingen? Welke factoren hebben invloed op die veranderingen? Hoe kun je een schatting of berekening maken van de grootte van de verandering?

#### Griepgegevens verzamelen

De overheid kan pas een voorspelling laten maken als er voldoende gegevens zijn verzameld over de situatie aan het begin van het griepseizoen. Die griepgegevens komen uit verschillende landen en gaan over vragen zoals:

- *Welke griepvirussen zijn er gesignaleerd?*
- *Hoe besmettelijk zijn die virussen?*
- *Welk deel van de bevolking is vatbaar voor de ziekte?*
- *Op welke plaatsen is het virus gesignaleerd?*
- *Hoeveel personen zijn er met het virus besmet?*
- *Hoe groot is de kans dat een persoon die ziek is overlijdt aan de griep?*

- 4 Bij het begin van een griepgolf worden verschillende gegevens over de bevolking verzameld.
  - a. Welke van de bovenstaande griepgegevens hebben betrekking op de beginsituatie van de bevolking?  
Bij de beginsituatie horen ook enkele eigenschappen van het virus, die tijdens de griep epidemie meestal niet veranderen.
  - b. Welke van de griepgegevens gaan over eigenschappen van het virus?



*Figuur 7 - Bij een griep epidemie neemt het aantal zieken steeds sneller toe.*

#### Grafiek van een griepgolf

Het model moet voorspellen hoe snel het aantal zieken verandert. Het aantal zieke personen verandert in de loop van de tijd. In figuur 7 zie je een deel van de griepgolf van het seizoen 2004-2005. Kenmerkend voor een griepgolf is dat de grafiek eerst langzaam en daarna steeds sneller stijgt

- 5 De grafiek van een griepgolf stijgt eerst langzaam en daarna steeds sneller.
  - a. Leg uit hoe de vorm van de grafiek bij de 'uitbraak' van de griep epidemie tot stand komt.  
Om een voorspelling te kunnen doen moet het computermodel kunnen berekenen hoe de situatie verandert.
  - b. Welke van de griepgegevens gaan over de snelheid waarmee het aantal zieke personen verandert?

### Tijdstap

Bij een computermodel hoort ook een *tijdstap*. Dat is vaak de periode waarover de computer de verandering moet berekenen, uitgaande van de beginsituatie en het tempo van verandering. De computer berekent telkens opnieuw hoe de situatie zal zijn één tijdstap later.

De *tijdstap* wordt door de bouwers van het model zo gekozen dat het past bij het onderwerp. Bij het voorbeeld van een griepgolf is het een voor de hand liggende keuze om voor de tijdstap één dag te kiezen. Bij andere modellen kan de tijdstap bijvoorbeeld een seconde, een uur of een jaar zijn.

- 6 Bij een dynamisch model van een griep epidemie is een tijdstap van een week of een maand niet handig omdat er binnen één tijdstap erg veel kan veranderen in de situatie. Het model zou dan erg grof worden. Een tijdstap van een seconde of een minuut zou het model erg nauwkeurig maken, maar daar kleeft een ander nadeel aan.
- Welk nadeel kleeft er aan een zeer korte tijdstap bij een griepmodel?
  - Welke tijdstap zal bij een griepmodel wel een logische keuze zijn?

#### Welke informatie heb je nodig voor een dynamisch model?

Een dynamisch model kent dus altijd een beginsituatie en het beschrijft een veranderingsproces. Het veranderingsproces bestaat meestal uit schattingen of berekeningen waarmee een nieuwe situatie op een later tijdstip berekend kan worden.

Voor een dynamisch model is dus de volgende informatie nodig:

- Wat is de **beginsituatie**?
- Welke factoren hebben invloed op de **verandering** van die situatie?  
Hoe kan de grootte van de verandering berekend of geschat worden?
- Welke **tijdstap** wordt gekozen om een nieuwe situatie te berekenen?

### Voorbeelden van dynamische modellen

- 7 Zeevismodellen worden gebruikt om de hoeveelheid vis in de zee te voorspellen. In de jaren 70 is de één van de grootste haringpopulaties ter wereld, die tussen Noorwegen en IJsland ingestort. Zeebiologen hebben modellen ontwikkeld die de verandering van die populatie zeevissen beschreven en op grond waarvan beheersmaatregelen zijn genomen die tot herstel hebben geleid.
- Met welk(e) getal(len) of gegeven(s) kan de beginsituatie beschreven worden?
  - Noem tenminste twee factoren (variabelen of grootheden) die gebruikt worden om de veranderingen te bepalen.

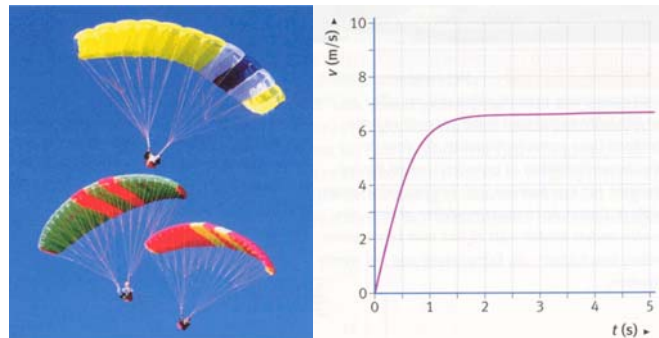


*Figuur 8 - Nederlandse zeevissers vissen voornamelijk op de Noordzee, zoals deze trawler waarmee op haring wordt gevist.*

Bij weersvoorspelling is de tijdstap klein, bijvoorbeeld een uur of een kwartier. Bij zeevismodellen is zo'n kleine tijdstap niet zinvol.

- Welke tijdstap denk je dat bij zeevismodellen gebruikt wordt? Leg uit waarom.

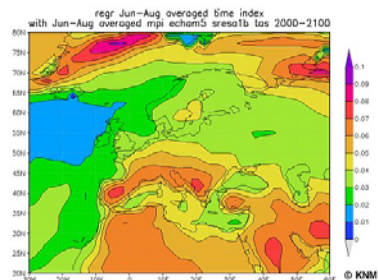
- 8 Bij parachutespringen is het belangrijk om vooraf te weten hoe snel de parachutespringer daalt. De valbeweging van een parachutist is een verschijnsel waarbij grootheden elkaar beïnvloeden en in de tijd veranderen. Met een rekenmodel is na te gaan hoe bijvoorbeeld de snelheid  $v$  verandert in de loop van de tijd  $t$ .



Figuur 9 - De snelheid tijdens een parachutesprong

De beginsituatie is hier het moment dat de parachutespringer uit het vliegtuig springt.

- Met welk(e) getal(len) of gegeven(s) kan de beginsituatie beschreven worden?
- Welke factor heeft bij het begin van de sprong de grootste invloed?
- Noem twee factoren die invloed hebben op de eindsnelheid.
- Welke tijdstap denk je dat bij dit parachutemodel gebruikt wordt? Leg uit waarom.



Figuur 10 - Door een klimaatmodel berekende stijging van de zomer-temperatuur per jaar (2000-2100).

- 9 Het klimaat op aarde verandert in rap tempo. De gemiddelde temperatuur stijgt en het weer lijkt extremer te worden (meer neerslag en wind, grotere periodes van hitte en droogte of van regen en storm).
- Noem twee gegevens die gebruikt worden om de beginsituatie te beschrijven.
  - Noem twee factoren (variabelen of grootheden) die invloed hebben op de veranderingen van het klimaat.
  - Welke tijdstap denk je dat bij dit model gebruikt wordt? Leg kort uit.

We meten al enkele jaren een geleidelijke stijging van de gemiddelde temperatuur. Die geleidelijke stijging kun je doortrekken om een voorspelling te doen over de temperatuur aan het eind van de eeuw.

- Is een dergelijke voorspelling betrouwbaar? Waarom wel/niet? Wat zou je moeten weten om die voorspelling te verbeteren?

Over de oorzaak of oorzaken van de veranderingen zijn wetenschappers het niet met elkaar eens. Dat geldt vooral voor de vraag hoe groot de invloed van elke factor apart is. Daardoor zijn er ook veel verschillende klimaatmodellen.

- Zou je die verschillende klimaatmodellen ook kunnen gebruiken om te bepalen wat de werkelijke of belangrijkste oorzaak van de klimaatverandering is? Hoe zou je dat kunnen aanpakken?

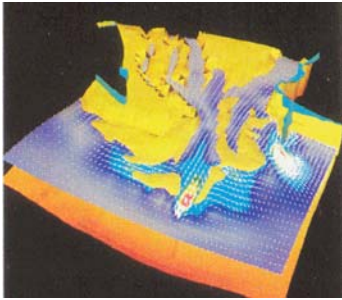
## Modellen op internet

Via het internet kun je ook een aantal modellen vinden. De onderstaande voorbeelden laten enkele toepassingen van modellen zien. Het model voor de leeftijdsopbouw van de bevolking van Noordwijkerhout is een eenvoudig voorbeeld van een model dat vrij makkelijk met de computer te berekenen is. In de volgende opgaven komen complexere voorbeelden aan de orde.

### Vogelmodellen

Er bestaat een BIRD AVOIDANCE MODEL. Dat is een hulpmiddel voor de vliegerij. Het belangrijkste doel ervan is de dichtheid van vogels in het luchtruim boven Nederland te voorspellen.

Dankzij dit model worden de risico's van botsingen tussen vliegtuigen en vogels zo klein mogelijk. Op internet ([www.sovon.nl/default.asp?id=309](http://www.sovon.nl/default.asp?id=309)) kun je er meer over vinden. (Zie ook de startgids voor een link naar de site.)



*Figuur 11 - Stroommodel van de Waddenzee*

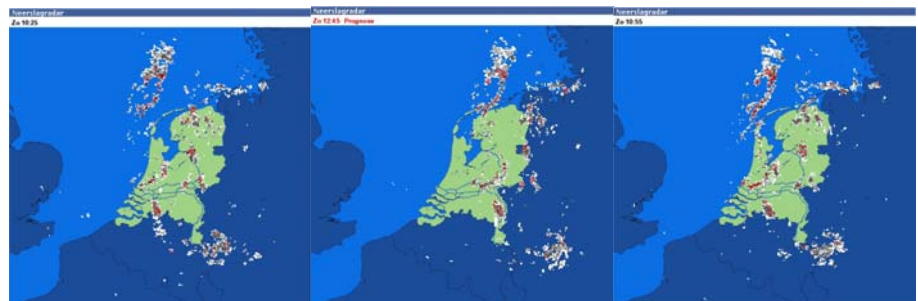
### Waddenzeemodel

In ondiepe wateren zoals de Waddenzee en de Oosterschelde heeft de stroming van het water grote invloed op het leven op en in de bodem. Een rekenmodel van de Waddenzee berekent de richting en sterkte van waterstromen.

Op Internet ([www.kennislink.nl/web/show?id=80534](http://www.kennislink.nl/web/show?id=80534)) is veel informatie te vinden over stroommodellen. Naast computermodellen wordt daarbij gebruik gemaakt van fysieke modellen zoals de BioFlow van het NIOO in Yerseke.

### Neerslagradar

Beelden van neerslag die met behulp van radar zijn gemaakt zijn ook te vinden op internet ([www.neerslagradar.nl](http://www.neerslagradar.nl)). Met een tijdstap van 5 minuten worden beelden van het afgelopen uur getoond, en met een tijdstap van 15 minuten een prognose voor de komende anderhalf uur.



*Figuur 12 - Beelden van de neerslagradar van 10.25 en 10.55 en een prognose voor 12.45 uur*

### Computermodellen in de praktijk

Op allerlei terreinen wordt gebruik gemaakt van dynamische modellen en computersimulaties. Modellen worden gebruikt om een voorspelling te doen, om een verschijnsel te verklaren of bestuderen of om de invloed van bepaalde factoren te onderzoeken.

Computermodellen hebben grote voordelen. De computer is snel en kan veel verschillende situaties doorrekenen. Computermodellen zijn ook vaak goedkoper dan schaalmodellen.

Een nadeel van computermodellen is, net als bij alle andere modellen, dat het nooit een exacte weergave van de situatie is. De plaatjes uit de computer lijken heel nauwkeurig, maar schijn bedriegt soms.



# Kennismaken met modellen

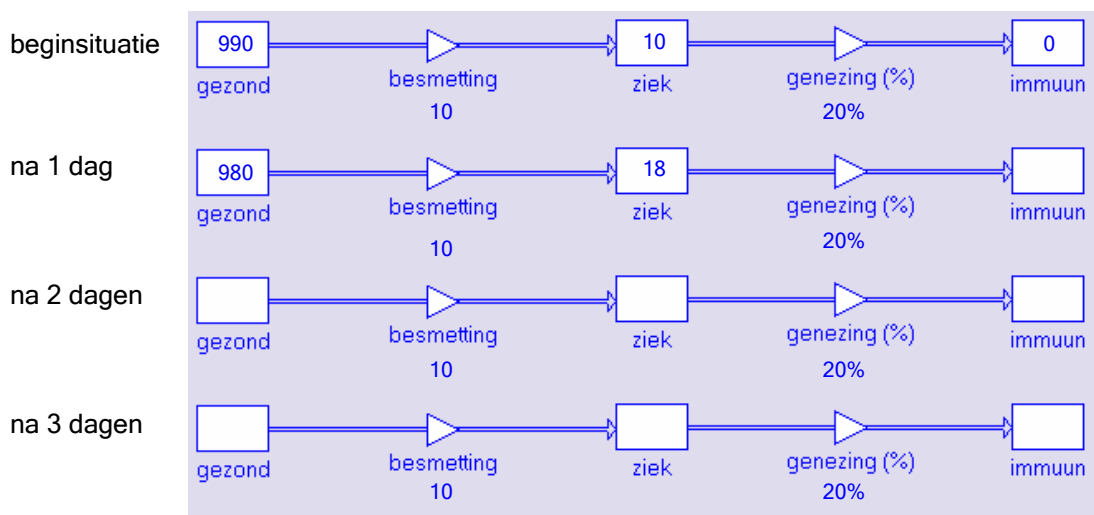
## 1.2 Een model voor een griep epidemie



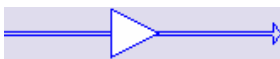
### Een simpel griepmodel

Het bouwen van een model begint meestal met een zeer simpel model dat het basisprincipe weergeeft. Dat model wordt vervolgens net zolang verbeterd totdat de resultaten van het model redelijk overeen komen met de werkelijke resultaten uit het verleden. Dat biedt overigens nog niet de garantie dat het model goede voorspellingen voor de toekomst kan maken.

Bij griep kan het basisprincipe als volgt beschreven worden: je bent gezond, je wordt ziek, je wordt beter en dan ben je (een tijdje in ieder geval) immuun voor de ziekte. Dat proces is hieronder in beeld gebracht met behulp van een zogenaamd stroomschema. De rechthoekige symbolen stellen de aantallen gezonde, zieke en immune mensen voor. De beginsituatie gaat uit van 990 gezonde mensen en 10 zieke mensen. Er is nog niemand immuun.



Figuur 13 - Een simpel griepmodel



Figuur 14 - De stroomvariabele geeft aan hoeveel personen er per dag van de ene groep naar de andere groep verhuizen.



Figuur 15 - De waarde van een niveauvariabele verandert door instroom en uitstroom.

### Stroomvariabelen

Een dynamisch model wordt beschreven door de *veranderingen* vanuit de beginsituatie. De in- en uitstroompijlen in het schema geven deze veranderingen aan. De variabele die daarbij hoort noemen we een *stroomvariabele*. Omdat door de veranderingen de aantallen gezonde, zieke en immune personen veranderen noemen we zo'n rechthoek een *niveauvariabele*.

In deze situatie beginnen we met een heel simpele aanname:

- elke dag worden er 10 mensen ziek
- van de zieke mensen geneest elke dag 20%

- 10 Met dit simpele griepmodel valt de situatie op de volgende dagen uit te rekenen. Voor de situatie na 1 dag is het stroomschema deels ingevuld.
- a. Leg uit dat er na één dag 18 personen ziek zijn.
  - b. Hoeveel personen zijn er na één dag immuun?

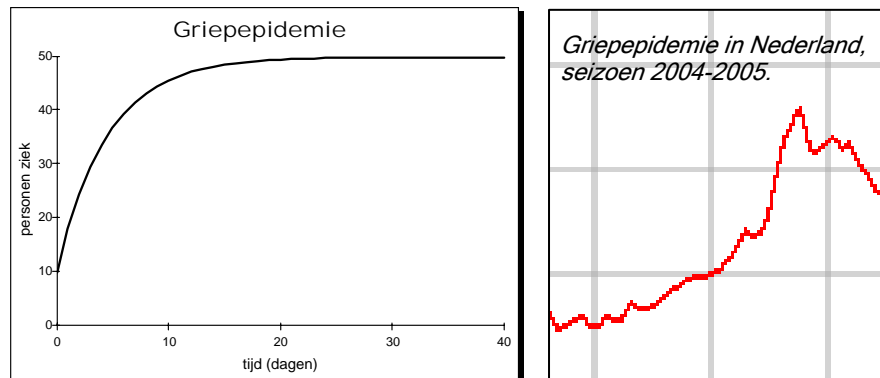
- c. Bereken voor de situatie na 2 en 3 dagen het aantal personen dat gezond, ziek of immuun is. Rond steeds de getallen af op hele aantallen, en noteer de getallen in het schema.

### Het verloop van de epidemie

Het simpele model van een griepepidemie is natuurlijk veel te eenvoudig om voorspellingen mee te doen. Vooral de aanname dat er elke dag 10 personen ziek worden is niet erg realistisch.

Om te onderzoeken hoe het model afwijkt van de werkelijkheid wordt naar het verloop van de griepgolf gekeken. Bij een goed werkend model moet het verloop van de griepgolf lijken op de werkelijke griepgolf.

- 11 Figuur 17 vertoont het verloop van het aantal zieke personen volgens het simpele model. De resultaten die het model levert wijken nogal af van een daadwerkelijke griepepidemie.



Figuur 16 - Griepepidemie volgens een simpel model, vergeleken met een werkelijke griepgolf.

Volgens het simpele model stijgt het aantal zieke personen de eerste dagen snel, maar die stijging wordt na verloop van tijd steeds minder. Uiteindelijk wordt het aantal zieke personen constant.

- Leg uit waardoor in het simpele model het aantal zieke personen steeds minder snel stijgt.
- Ga met een berekening na dat uiteindelijk constant 50 personen ziek zijn.
- Zal het aantal zieke personen na verloop van tijd ook weer gaan dalen? Wanneer?

De vorm van de grafiek van het model lijkt helemaal niet op een grafiek van een echte griepgolf. Het model is kennelijk nog niet goed genoeg om het verloop van een griepgolf te beschrijven.

- Waardoor stijgt bij een werkelijke griepgolf het aantal zieke personen tijdens het begin van de griepgolf steeds sneller?
- Noem minstens één verbetering voor het model. Gebruik daarvoor indien nodig de informatie over griep.

## Wat is griep?

Griep is een acute infectie van de bovenste luchtwegen (neus, keel, longen) en wordt veroorzaakt door het influenza virus. Griep is waarschijnlijk de meest onderschatte ziekte die er is. Ieder jaar krijgt 5 tot 10% van de Nederlandse bevolking griep; dit zijn dus 1 tot 1,5 miljoen mensen. Dit noemen we een epidemie.

Het griepvirus ondergaat regelmatig mutaties, veranderingen. De antistoffen die het lichaam het ene jaar aanmaakt tegen het griepvirus, herkennen niet automatisch het virus van het jaar daarop. Hierdoor kan het griepvirus ons afweersysteem steeds opnieuw verrassen en kun je elk jaar opnieuw griep krijgen.

### Tijd tussen besmetting en begin griepklachten

Na het binnenkrijgen van het griepvirus duurt het gewoonlijk 2 - 3 dagen voordat je ziek wordt. Dit wordt de incubatietijd genoemd. Ondertussen kun je wel, zonder dat je het weet, weer andere mensen besmetten. Volwassenen zijn besmettelijk

vanaf twee dagen voordat de symptomen zich openbaren tot 5 dagen daarna.

### Hoe lang duurt de griep?

Bij griep zijn gezonde mensen al gauw een week ziek. De koorts (38-40 °C) is binnen één dag na het begin van de klachten het hoogst en duurt 1 tot 5 dagen. Als je griep hebt, wil je het liefst gewoon in bed blijven.

### Griep is zeer besmettelijk

Via de lucht, maar ook via direct contact (zoenen, hand geven) of indirect contact (via een deurkruk of telefoon bijvoorbeeld) kun je het griepvirus oplopen. Het inademen van maar drie griepvirussen is al genoeg om zelf besmet te raken. Bijvoorbeeld: Als een vliegtuig met één grieppatiënt 3 uur aan de grond staat met een kapot ventilatiesysteem, dan krijgt 72% van de passagiers in de daaropvolgende dagen griep.

Informatie van de site [www.griep.nl](http://www.griep.nl)

## Het model aanpassen

Om het simpele model te verbeteren kijken we als eerste naar de *besmetting* en de *genezing*, de twee stroomvariabelen die bepalen hoe snel het aantal zieke en gezonde personen verandert.

- 12 Het genezingsproces in het model bepaalt hoe snel zieke mensen weer beter worden. In het model is de aanname gemaakt dat elke dag 20% van de zieke mensen geneest en dus immuun geworden is.
  - a. Hoe lang is iemand dan gemiddeld ziek?
  - b. Vind je dit een realistische aanname? Gebruik indien nodig de informatie van de website [www.griep.nl](http://www.griep.nl).
  - c. Zijn er nog andere factoren die de kans op genezing beïnvloeden?
- 13 Voor de besmetting is in het model de aanname gemaakt dat er elke dag opnieuw 10 personen ziek worden.
  - a. Geef tenminste één reden waarom dat geen realistische aanname is.
  - b. Noem twee factoren die invloed kunnen hebben op het aantal personen dat per dag ziek wordt.

## Besmettingskans

Besmetting kan alleen optreden als zieke en gezonde mensen elkaar ontmoeten. Niet elk contact leidt vanzelf tot besmetting, er is een zekere besmettingskans. Daarmee wordt de kans bedoeld dat er bij een ontmoeting tussen een ziek en een gezond persoon besmetting plaatsvindt. Het aantal besmettingen hangt dan af van de besmettingskans en het aantal keer dat een ziek persoon een gezond persoon ontmoet.

- 14 Neem aan dat elk persoon elke dag 10 mensen van dichtbij ontmoet, en dat de kans dat een ziek persoon een gezond persoon besmet daarbij 5% is. Op de eerste dag zal dan gemiddeld de helft van de zieke personen een ander persoon ziek gemaakt hebben.
  - a. Leg uit dat op de eerste dag ongeveer de helft van de zieke personen een gezond persoon besmet.
  - b. Waarom neemt dit na verloop van tijd af?



### **Immuniteit**

Na verloop van tijd daalt het aantal besmettingen omdat een groot deel van de bevolking immuun geworden is. Een ziek persoon zal per dag nog steeds evenveel ontmoetingen hebben, maar een deel ervan is met personen die immuun zijn. Er vinden dan per zieke minder besmettingen plaats.

- 15 Op een bepaald moment zijn er 400 gezonde personen, 100 zieken en 500 personen die immuun zijn. Van de 10 personen die een ziek persoon per dag ontmoet is slechts een deel gezond. Bij elke ontmoeting is de kans op besmetting 5%.
- Hoeveel gezonde personen komt een ziek persoon per dag tegen?
  - Bereken hoeveel besmettingen er gemiddeld door één ziek persoon per dag veroorzaakt worden.
  - Hoeveel besmettingen zullen er die dag plaatsvinden?

#### **Conclusie: besmetting en genezing**

Om het model te verbeteren moet rekening gehouden worden met de volgende verbanden:

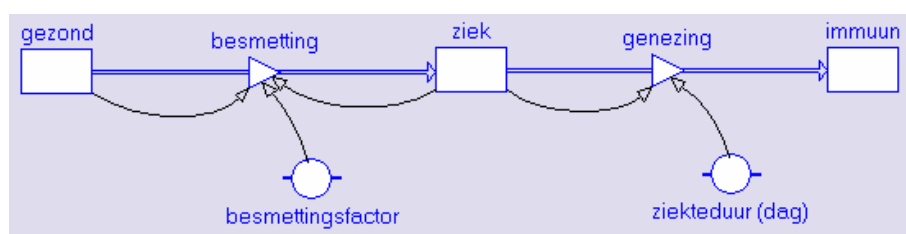
- Het aantal personen dat per dag geneest hangt af van de ziekteduur.
- Het aantal personen dat per dag besmet raakt hangt af van de besmettelijkheid van het virus, het aantal personen dat ziek is én het aantal personen dat (nog) gezond is.

## Een verbeterd model

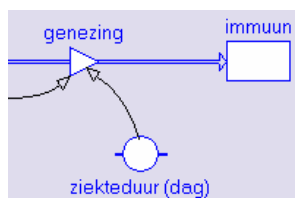
Het onderstaande stroomschema geeft een verbeterd model weer. In het model zijn twee nieuwe grafische elementen te zien die elk een bepaalde constante voorstellen.

- de *ziekteduur* is het aantal dagen dat iemand gemiddeld ziek is.
- de *besmettingsfactor* is de kans dat een gezond persoon bij een contact met een ziek persoon besmet raakt.

De dunne pijlen in het stroomschema zijn de *relatiepijlen*. Die pijlen geven aan welke factoren invloed hebben op de veranderingen.



Figuur 17 - Een verbeterd griepmodel



Figuur 18 - Het ronde symbool met horizontale streepjes links en rechts genaamd ziekte duur stelt een constante voor. De relatiepijl geeft aan dat de ziekte duur invloed heeft op de stroomvariabele genezing. Een dubbeldikke pijl met in het midden een driehoekig symbool stelt een stroomvariabele voor.

- 16 De twee constanten ziekte duur en besmettingsfactor zijn in het verbeterde model weergegeven als ronde symbolen met links en rechts een horizontaal streepje. Elke constante heeft een bepaalde waarde.
- a. Welke waarde heeft de constante *ziekteduur* als per dag 20% van de zieke personen geneest?

In de voorgaande opgave is voor de besmettingsfactor een kans van 5% gekozen. In het model wordt die kans niet als een percentage ingevuld maar als een vermenigvuldigingsfactor (een decimaal getal).

- b. Noteer het decimale getal dat hoort bij de besmettingsfactor in het model.

### Formules voor besmetting en genezing

Het model bevat twee stroompijlen met een driehoekig symbool in het midden. De stroompijlen in het schema geven de veranderingen aan van de aantallen gezonde, zieke en immune personen. De computer berekent die aantallen met behulp van een formule. Een rond of driehoekig symbool bevat een formule, een rechthoekig symbool bevat meestal een getal. In de formule komen de variabelen voor de invloed hebben op de stroomvariabele.

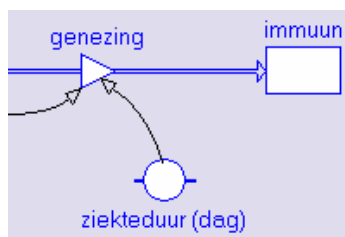
- 17 Voor de besmetting is de volgende formule ingevoerd:

$$\text{besmetting} = \text{ziek} \times 10 \times \text{besmettingsfactor} \times \frac{\text{gezond}}{1000}$$

- a. Geef een toelichting bij deze formule
- b. Gebruik de formule om te controleren hoeveel besmettingen er zijn als er 400 gezonde personen, 100 zieken en 500 personen die immuun zijn.

- 18 De stroomvariabele *genezing* wordt ook voorgesteld door een formule. Het aantal genezingen per dag hangt af van het aantal zieken personen en de kans dat iemand geneest.

- a. Hoe groot is per dag de kans op genezing als de ziekte duur 5 dagen is?
- b. Bereken het aantal genezingen per dag als er 120 zieken zijn.
- c. Stel een formule op om het aantal genezingen per dag te berekenen.



Figuur 19 - Ronde of driehoekige symbolen bevatten een formule of constante, rechthoekige symbolen bevatten (meestal) een getal.

# Kennismaken met modellen

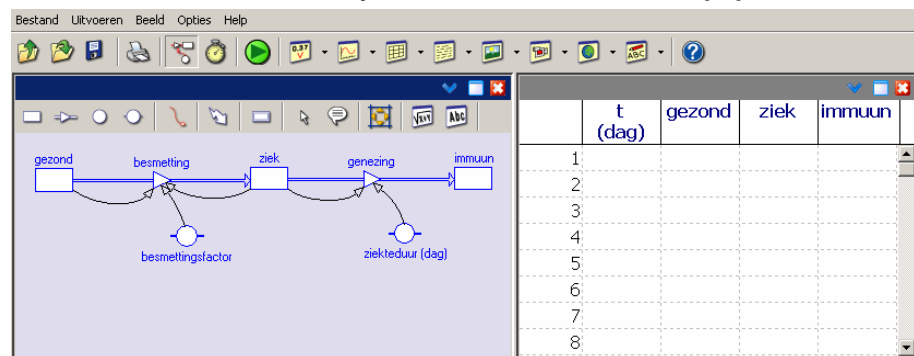
## 1.3 Een griepmodel op de computer

### Startgids, een korte uitleg

Bij dit lespakket hoort een digitale gids (de Startgids) en een website, waarmee je alle computeractiviteiten die aan de orde komen kunt opstarten. Met één druk op de knop open je bijvoorbeeld een modelbestand en kunt er mee aan de slag. Je kunt ook achtergrondinformatie opvragen en software installeren.

Kies in de startgids **Griep epidemie 1** en klik dubbel. Je krijgt op het scherm een model voor een griep epidemie dat je kunt laten doorrekenen.




### Wiskunde D & NLT – Dynamische Modellen – Griep epidemie 1



Figuur 20 - Schermafdruk van Griep epidemie 1

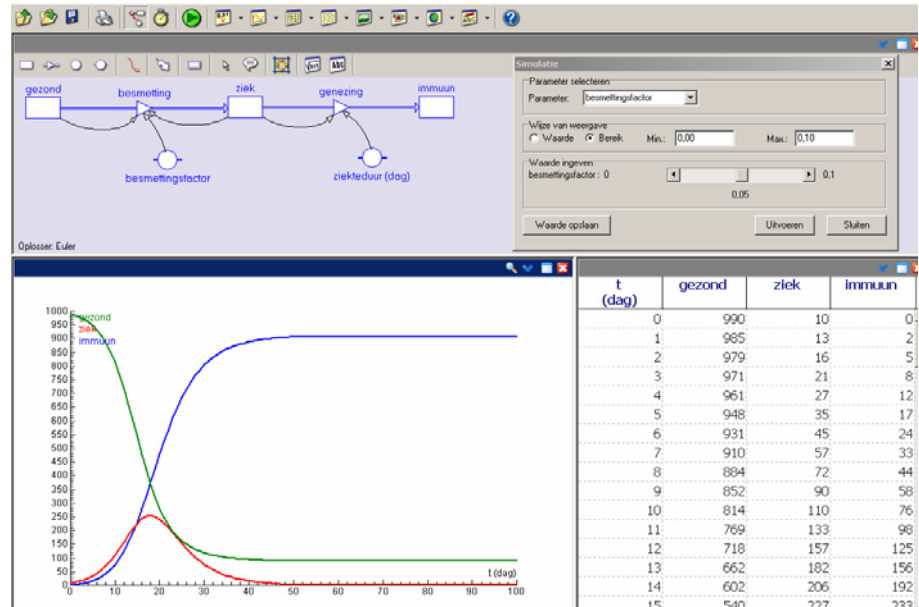


Figuur 21 - Afspeelbuttons in het modeluitvoer-paneel.

- 19 Het model Griep epidemie 1 is gereed voor gebruik.
  - a. Open in het modelvenster het modeluitvoer-paneel. Klik op de knop , de play -knop in het modeluitvoer-paneel. Dit paneel is zodanig ingesteld dat de berekening altijd start vanuit de beginsituatie en langzaam verder de toestand in opeenvolgende dagen doorrekent. Tevens staan de momentane toestandswaarden in het model bij de grafische elementen.
  - b. Stop de computerberekeningen na 7 dagen door op de blauwe stop-knop  in het modeluitvoer-paneel te klikken en neem de berekende getallen over in bovenstaande tabel.
  - c. Heeft de epidemie na een week het maximum al bereikt?  
Het computermodel is verder zodanig ingesteld dat je door kunt rekenen tot 100 dagen.
  - d. Maak eerst een voorspelling over de toestand op dag 100.
  - e. Sluit het modeluitvoer-paneel en klik op  om het computermodel snel door de rekenen en controleer de voorspelling.
  - f. Ga na vanaf welke dag de toestand stabiel is.
- 20 De hoofdvragen bij het voorspellen van het verloop van een griepgolf zijn:
  - Hoe hoog is de piek van de epidemie?
  - Hoeveel procent van de bevolking krijgt uiteindelijk griep?
    - a. Beantwoord de twee hoofdvragen bij dit model.
    - b. Men spreekt van een epidemie als tenminste 5% van de bevolking ziek is. Hoeveel dagen duurde deze griep epidemie?

Kies in de startgids **Griep epidemie 2** en klik dubbel. Dit is hetzelfde model als Griep epidemie 1, maar nu met een grafiek erbij. Ook kun je de twee factoren die het verloop van de griep bepalen, de *ziekteduur* en de *besmettingsfactor*, veranderen. Dit kan ook via een schuifbalk zoals in onderstaande schermafdruck te zien is

### Wiskunde D & NLT – Dynamische Modellen – Griep epidemie 2



Figuur 22 - Schermafdruck van Griep epidemie 2

- 21 De grafieken in figuur 22 laten zien hoe het verloop van de griepgolf volgens het model Griep epidemie 2 is. In het diagram is het aantal zieke, gezonde en immune personen weergegeven.
- Is de vorm van de grafiek van de griepgolf (het aantal zieke personen) nu wel realistisch? Licht toe.
  - Controleer of de hoogte van de piek in de griepgolf overeen komt met de waarde die je bij de vorige opgave gevonden hebt.
  - Hoe kun je in de grafiek aflezen hoeveel procent van de bevolking uiteindelijk de griep gehad heeft?
  - De grafieken van *gezond* en *immuun* hebben de vorm van een langgerekte S. Leg uit hoe dat komt.

### Invloed van veranderingen

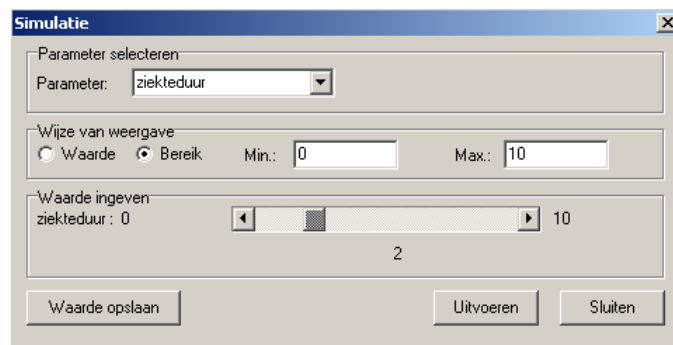
Het model kent twee factoren die invloed hebben op de griep epidemie, de *ziekteduur* en de *besmettingsfactor*. Met het computermodel kunnen we snel nagaan wat de invloed van deze twee factoren is, maar eerst wordt er een voorspelling opgesteld over de invloed die deze twee factoren hebben.

- 22 De *besmettingsfactor* hangt onder andere af van het type virus. Er zijn veel verschillende griepvirussen. Bij het ene virus is de kans op besmetting groter dan bij een ander virus.
- Voorspel hoe de griepgolf zal verlopen als de *besmettingsfactor* niet 5% maar 10% is. Teken je voorspelling in de bovenstaande grafiek.
  - Zal een grotere *besmettingsfactor* ook invloed hebben op het aantal personen dat uiteindelijk de griep krijgt?
- 23 De *ziekteduur* heeft ook invloed op de griepgolf. Als mensen langer ziek zijn kunnen ze meer gezonde personen besmetten. Door het gebruik van antivirale middelen kan de *ziekteduur* bekort worden.

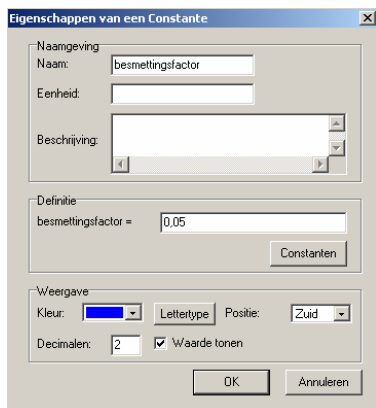
- a. Voorspel hoe de griepgolf zal verlopen als de *ziekteduur* 10 dagen is. Schets je voorspelling in het diagramvenster via de menukeuze 'grafiek schetsen'.
- b. Zal een langere *ziekteduur* ook invloed hebben op het aantal personen dat de griep krijgt?

### Variëren van parameters in model Epidemie 2

In de eerdere schermafdruk (Figuur 22) zag je al een schuifbalk staan waarmee je de *besmettingsfactor* kunt instellen; in figuur 23 zie je het simulatiepaneel voor de *ziekteduur* ingesteld als schuifbalk. Met behulp van zo'n schuifbalk is de invloed van een factor of startwaarde op het ziekteverloop te onderzoeken. Dit kan overigens ook door in een simulatiepaneel alleen een getalswaarde te veranderen.



Figuur 23 - Voorbeeld van een schuifbalk in GriepEpidemie 2



Figuur 24 - Eigenschappenvenster van een constante.

- 24 De getalswaarde van *gezond*, *ziek* en *immuun* en van de constanten *besmettingsfactor* en *ziekteduur* kun je in het modelvenster op het scherm zichtbaar maken.
  - a. Plaats de cursor in het computermodel boven een grafisch element dat bij een van de genoemde variabelen hoort. Een pop-up venster verschijnt waarin de startwaarde af te lezen is. Lees de beginwaarden voor alle variabelen af.
  - b. Plaats de cursor in het computermodel ook eens boven de stroompijlen. Wat verschijnt nu in beeld?
  - c. Rechtsklik op een grafisch element dat bij een van bovengenoemde variabelen hoort en selecteer 'Eigenschappen'. Je krijgt een venster waarin de eigenschappen van het grafische element staan, inclusief de definitie (die bij een constante uiteraard de getalswaarde is). Ga na wat je te zien krijgt als je de eigenschappen van het grafische element *genezing* opvraagt. Het oproepen van het eigenschappenvenster kan overigens ook gedaan worden door dubbelklikken op het grafische element.
- 25 Open het simulatiepaneel door in het modelvenster de menukeuze *Simuleren...* te selecteren. Kies in het simulatiepaneel de constante *besmettingsfactor*. De getalswaarde van deze constante is zichtbaar en kan op elk moment veranderd worden, ook als het model loopt.
  - a. Stel de *besmettingsfactor* in op 10% en laat het model lopen.
  - b. Klopte jouw voorspelling van de griepgolf bij opgave 21 ongeveer? Zo nee, leg dan uit waarom de grafiek anders is.
  - c. Hoeveel % van de bevolking krijgt volgens dit model de griep?
  - d. Sluit het simulatiepaneel en reken het model opnieuw door. De originele grafieken komen terug omdat een constante weliswaar veranderd werd in het simulatiepaneel, maar deze verandering niet vastgelegd werd.



- 26 De invloed van de *ziekteduur* kan op dezelfde manier veranderd worden.
- Roep het simulatiepaneel op, kies de constante *ziekteduur* en stel de weergave in op een bereik van 0 tot 10 zoals in Figuur 23.
  - Stel de *ziekteduur* in op 10 dagen en laat het model lopen.
  - Klopte jouw voorspelling van de griepgolf bij opgave 22 ongeveer? Zo nee, leg dan uit waarom de grafiek anders is.
  - Hoeveel % van de bevolking krijgt volgens dit model de griep?
- 27 Bij een ernstige griepepidemie kan de overheid besluiten om op grote schaal antivirale middelen te verstrekken. Dit is niet een echt medicijn, maar het verkort de *ziekteduur* met 2 dagen. Een dergelijke aanpak is echter wel erg duur.
- Verwacht je dat een dergelijk medicijn veel invloed kan hebben op de griepgolf?
  - Onderzoek met het model wat de invloed is als iedereen die ziek wordt het middel gebruikt.

#### Werken met een computermodel

Een computermodel biedt veel mogelijkheden tot testen en uitproberen. Het model kan verschillende malen gerund worden onder verschillende condities. Zo kan de invloed van één onderdeel goed onderzocht worden. Enkele mogelijkheden zijn:

- De beginsituatie (de niveauvariabelen) kan anders gekozen worden.
- De invloed van de constante factoren kan vergeleken worden.
- De tijdsduur en de tijdstap kan aangepast worden.

#### Evaluatie en reflectie

Een model moet niet alleen de werkelijkheid zo goed mogelijk beschrijven, het moet ook geschikt zijn om voorspellingen te doen voor de toekomst. Dat betekent dat verschijnselen die in werkelijkheid optreden ook zichtbaar moeten zijn in het model. Daarnaast moet getest worden of het model betrouwbaar is.

- 28 Het model Epidemie 2 houdt op een bepaalde manier rekening met de ziekteduur en de besmettingsfactor.
- Noem twee eigenschappen van het model Epidemie 2 die goed passen bij de werkelijkheid.
  - Noem één aspect aan het model dat verbeterd kan worden of waarmee het model uitgebreid kan worden.

# Kennismaken met modellen

## 1.4 Een realistisch griepmodel

Het verbeterde griepmodel geeft al een veel realistischer beeld van een griep epidemie, maar er ontbreken nog veel factoren en verschijnselen die bij een echte epidemie een rol spelen. Het model van de griep epidemie kan dus nog verder verbeterd worden.

### Ontwikkelen en testen

Het ontwikkelen van modellen gaat vaak op dezelfde manier. Het eerste model is vrij eenvoudig, daarna worden er steeds verbeteringen aangebracht. Verschijnselen en factoren die in de werkelijkheid een rol spelen worden aan het model toegevoegd. Dat proces gaat door totdat het model goed genoeg is voor het doel waarvoor het gebruikt moet worden. Om een verbeterd model te testen wordt de uitkomst van het model vergeleken met gegevens uit de werkelijkheid. Daarbij wordt onderzocht of het mogelijk is het model zo in te stellen dat de resultaten redelijk overeen komen met de werkelijkheid.

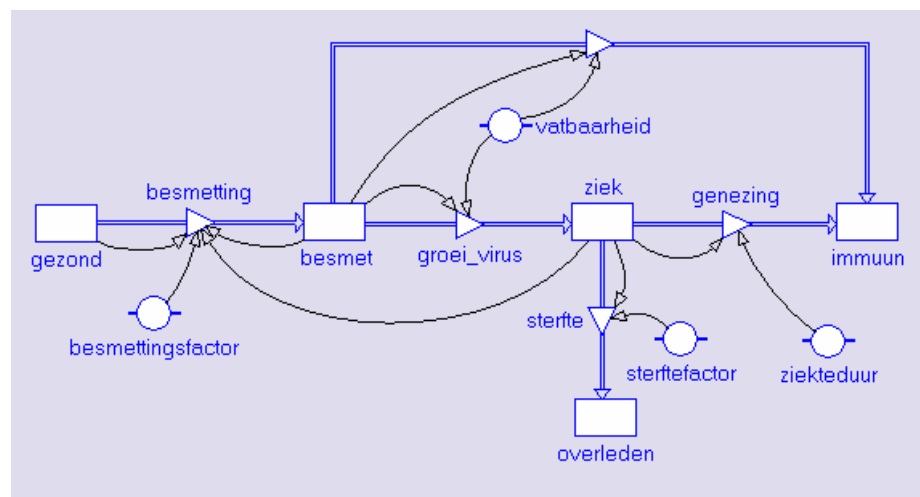
### Verbeteringen aan het griepmodel

Om het model van de griep epidemie nog beter aan te laten sluiten op de werkelijkheid moeten de onderstaande verschijnselen en factoren aan het model worden toegevoegd:

1. Personen die besmet raken zijn niet direct ziek; pas na een dag of twee beginnen de eerste ziekteverschijnselen.
2. Niet iedereen die besmet raakt wordt ook ziek. Bij een behoorlijk deel van de bevolking werkt het afweersysteem goed genoeg om het virus uit te schakelen.
3. De griep kan ook dodelijk zijn. Elk jaar overlijden er in Nederland honderden mensen aan de griep. De kans op overlijden is sterk afhankelijk van het type virus dat de ziekte veroorzaakt.

In het model Griep epidemie 3 zijn deze drie verschijnselen opgenomen.


### Wiskunde D & NLT - Dynamische Modellen - Griep epidemie 3



Figuur 25 - Griep epidemie 3

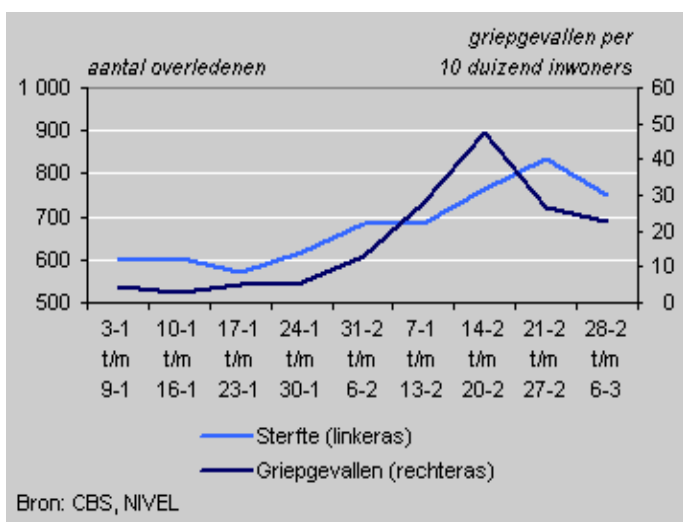
- 29 Het model Epidemie 3 kent een nieuwe niveauvariabele *besmet*, het aantal personen dat al wel besmet maar nog niet ziek is.
- Hoe is in het model te zien dat een deel van de personen die besmet is geraakt niet ziek wordt? Wat gebeurt er bij deze personen?
  - Welke constante in het model bepaalt welk deel van de besmette personen wel ziek wordt en welk deel niet?
  - Welke twee niveauvariabelen zorgen voor nieuwe besmettingen?
- 30 Het model houdt ook rekening met het feit dat er elk jaar mensen overlijden aan de griep. De stroomvariabele *sterfte* is in het model afhankelijk van het aantal zieke personen en de *sterftefactor* (de kans per dag om te overlijden aan de griep).
- Geef in je eigen woorden aan wat de stroomvariabele *sterfte* voorstelt. Gebruik in je uitleg ook de eenheid van de variabele.
  - Met welke formule zal de variabele *sterfte* berekend worden?
  - Leg uit dat de constante *sterftefactor* een zeer klein getal moet zijn.

Kies in de startgids **Griepepidemie 3**. Je krijgt op het scherm het uiteindelijke model voor een griepepidemie.

- 31 Het model start met 100.000 gezonde personen, 100 personen die besmet zijn en 10 personen die ziek zijn.
- Start het model met de Start-knop . Noteer hoeveel personen er aan het einde gezond, besmet, ziek of immuun zijn.
  - Hoeveel personen liggen tijdens de piek van de griepgolf in bed?
  - Hoeveel personen overlijden er in totaal aan de griep?
  - Vind je de resultaten van dit model realistisch? Leg uit waarom wel/niet.

## Het model testen

Het model is nu compleet genoeg om een test uit te voeren. Bij een test wordt onderzocht of het model in staat is om een werkelijke situatie na te bootsen. Als voorbeeld worden de gegevens gebruikt van de griepgolf die in februari 2005 Zuid-Nederland trof. Lees eerst het artikel.



Figuur 26 - Griepepidemie in Zuid-Nederland in februari 2005

### In februari hogere sterfte in Zuid-Nederland

Bron: [www.cbs.nl](http://www.cbs.nl)

**In Zuid-Nederland zijn in februari 2005 bijna 3 duizend mensen overleden. Dit is bijna 600 meer dan in de vier weken daarvoor en ook 600 meer dan gemiddeld voor februari.**

De hogere sterfte in Zuid-Nederland valt vrijwel samen met een griepgolf die door het NIVEL is waargenomen. In de week van 14 tot en met 20 februari bereikte deze een piek. Toen waren er per 10 duizend inwoners van Zuid-Nederland 48 patiënten met een ziektebeeld dat op griep wijst.

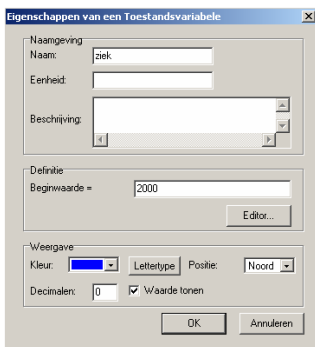
### Week na griepgolf hoogste sterfte

De sterfte in Zuid-Nederland was het hoogst in de week van 21 tot en met 27 februari, een week na de piek in de griepgolf overleden 210 personen aan de gevolgen van de griep. Uit onderzoek is bekend dat er enige tijd verstrijkt tussen het optreden van griep en het eventuele overlijden aan de gevolgen van griep.

## Gegevens van de griepgolf in Zuid-Nederland

De gegevens van de griepgolf die voor het model van belang zijn kunnen als volgt samengevat worden.

- De totale bevolking van Zuid-Nederland bestaat uit 4 miljoen personen.
- Bij de start van de epidemie waren 10.000 personen besmet en 2000 personen ziek. Er was (nog) niemand immuun voor deze soort griep.
- Op het hoogtepunt waren er ongeveer 20.000 personen ziek in bed.
- In totaal kreeg ongeveer 5% van de bevolking de griep.
- In totaal overleden er tijdens de griepgolf circa 1000 personen aan de griep.



Figuur 27 - Met behulp van de editor kan de startwaarde van een variabele aangepast worden.

- 32 De beginsituatie wordt gekenmerkt door het aantal personen dat gezond, besmet, ziek of immuun is.
- Noteer de waarden voor de beginsituatie in het model. Dubbelklik daarvoor op het symbool waardoor de editor geopend wordt. Noteer de juiste waarde in elke editor.
- Het uiteindelijke model kent vier constanten die afhankelijk zijn van het type virus dat de epidemie veroorzaakt.
- Welke vier factoren zijn dat?
  - Reken het model door met de waarden voor de constanten die van tevoren ingevuld zijn. Noteer de eindresultaten.
  - Vergelijk de resultaten van het model met de gegevens van de werkelijke griepgolf. Welke resultaten zijn te hoog, welke te laag?
  - Verander de waarden van deze vier constanten en laat het model met de nieuwe waarden lopen. Test verschillende combinaties van de waarden en onderzoek of je met dit model een resultaat kunt krijgen dat past bij de gegevens van Zuid-Nederland. Noteer de waarden van de vier constanten.

### Modelleren in stapjes

Bij de start van het model van de griepepidemie is gekozen voor een zeer simpel model. Door de resultaten van het model te vergelijken met de werkelijkheid zijn het model uitgebreid en verbeterd. Het bouwen van een computermodel verloopt vaak in stapjes.

Het uiteindelijke model houdt rekening met immuniteit, besmettelijkheid, sterftkans, besmettingstijd, ziekte duur en het afweersysteem. Is het model daarmee compleet? Is het een goede benadering van de werkelijkheid? Waarvoor is het model te gebruiken? Dit soort vragen spelen bij elk model een belangrijke rol.

- 33 Een model moet een realistische beschrijving zijn van de werkelijkheid. Is het uiteindelijke model van de griepepidemie nu het juiste model? Dat hangt vooral af van de eisen die aan het model gesteld worden. Ga met behulp van de onderstaande vragen na waarvoor het model geschikt is.
- Vind je dat het model geschikt is om het verschijnsel van een griepepidemie te begrijpen en te verklaren? Geef aan waarom je het model wel of niet geschikt vindt.
  - Vind je dat het model geschikt is om een oude griepepidemie na te bootsen? Geef aan waarom je het model wel of niet geschikt vindt.
  - Vind je dat het model geschikt is om een voorspelling te doen voor een nieuwe griepepidemie? Geef aan waarom je het model wel of niet geschikt vindt.
  - Zou je als overheid op basis van de voorspelling van dit model beslissingen nemen over bijvoorbeeld een grote inentingscampagne? Leg uit waarom wel/niet.