

# Vorm en ruimte



## Verhoudingen

# Inhoudsopgave

1	Verhoudingen	
	Wat we met "verhouding" bedoelen	3
	Het verband met breuken	6
2	Oppervlakte en inhoud	
	Lengte, oppervlakte en inhoud	7
	Figuren vergroten	8
	Oppervlaktediagrammen	13
3	Rechthoeken	
	De verhouding tussen de zijden	16
	Gelijkvormige rechthoeken	18
	Spiralen	20
	A-formaten	22
4	De gulden rechthoek	25
5	Veelhoeken	
	Van alles over regelmatige veelhoeken	31
	Het vierkant	33
	De regelmatige zeshoek	34
	De regelmatige vijfhoek	35

© 2009 cTWO

Experimentele uitgave voor Vorm en ruimte, vwo, wiskunde C  
versie 2 (april 2009)

auteur: Leon van den Broek

met medewerking van: Cees Garst, Nicolette van de Kuilen, Agnes Verweij

# 1 Verhoudingen

Wat we met "verhouding" bedoelen



## 1 Wat betekenen de volgende uitspraken?

- *De verhoudingen bij een hazewind en een tekel zijn heel verschillend.*
- *In verhouding hebben apen langere armen dan mensen.*
- *Verhoudingsgewijs zijn er weinig vrouwelijke hoogleraren.*
- *Belangrijk is de prijs-kwaliteit-verhouding.*

In deze zinnen komt het woord “verhouding” voor. “Verhouding” komt in het Nederlands ook voor als “relatie”, bijvoorbeeld in: “Jan heeft een verhouding met de dochter van de dominee” of “In die commissie waren de verhoudingen volledig zoek”. Maar daar hebben we het nu niet over. Onze verhouding heeft met hoeveelheden of groottes te maken. Wat verhouding inhoudt is moeilijk precies en algemeen te zeggen. Het volgende voorbeeld zegt wat we met verhouding bedoelen.

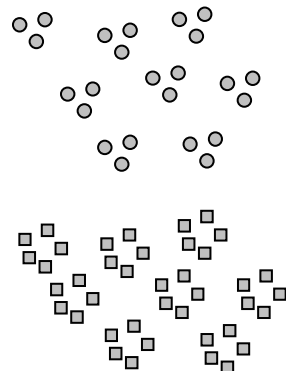
### Voorbeeld

Hiernaast staan 24 cirkeltjes en 40 vierkantjes. Tegenover elk drietal cirkeltjes staat een vijftal vierkantjes en omgekeerd. De verhouding tussen de aantallen cirkeltjes en vierkantjes is 3 : 5.

Spreek uit: *drie staat tot vijf.*

We schrijven wel  $24 : 40 = 3 : 5$ .

Er zijn  $\frac{3}{5}$  keer zoveel driehoekjes als vierkantjes.

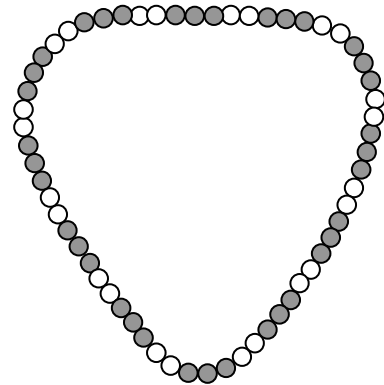


- 2 Zeg in eigen woorden wat de volgende uitspraken betekenen.
- *Het aantal meisjes verhoudt zich tot het aantal jongens als 3 staat tot 4.*
  - *Voor goed beton meng je de hoeveelheden cement, zand en grind in de verhouding 1 : 2 : 3.*
  - *De verhouding tussen wateroppervlak en landoppervlak op aarde is ongeveer 2 : 1.*

**Definitie**

De hoeveelheden van soort A en soort B verhouden zich als 3 : 5 betekent dat met elke 3 eenheden van A 5 eenheden van B horen, en omgekeerd.

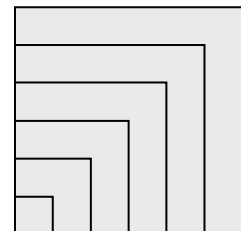
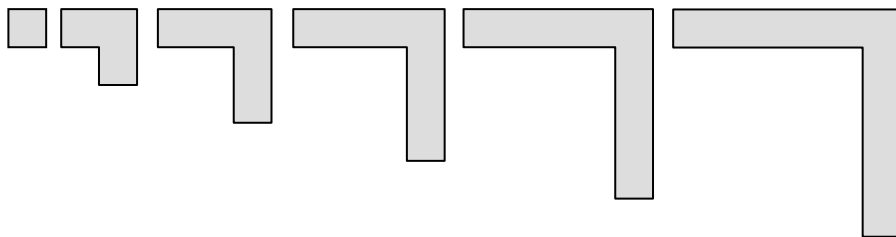
- 3 Anne heeft een halsketting gemaakt van witte en zwarte kralen.
- a Wat is de verhouding tussen het aantal witte en het aantal zwarte kralen?
  - b Hoe schrijf je dat op?  
Hoe spreek je dat uit?
  - c Hoeveel keer zoveel zwarte als witte kralen heeft de halsketting?  
Hoeveel keer zoveel witte als zwarte?



Als je de verhouding van twee hoeveelheden geeft, gaat het niet om de absolute aantallen, maar om hoeveel keer zo groot de ene hoeveelheid is als de andere, en dat dan liefst uitgedrukt met (zo klein mogelijke) gehele getallen.

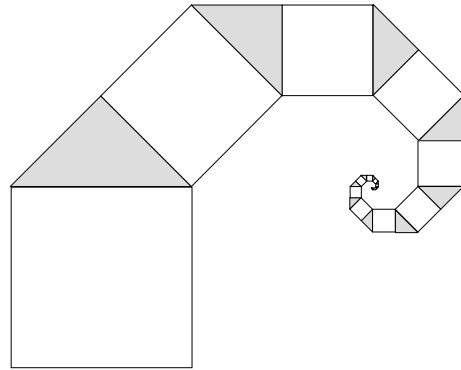
- 4 Schrijf de volgende verhoudingen met zo klein mogelijke gehele getallen.
- 33 : 77  
 3,5 : 21  
 2 : 4 : 6 : 8 : 10  
 8 : 24 : 72 : 216  
 777 : 1110  
 123 : 82

- 5 Een vierkant wordt verknipt in vijf  
winkelhaken en één vierkantje, alle van  
dezelfde breedte.



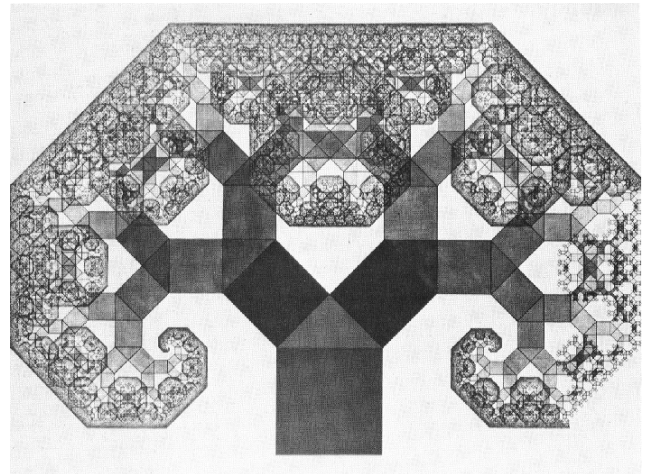
- a Let op de oppervlakte van de zes stukken.  
Wat is hun verhouding?
- b Let op de omtrek van de zes stukken.  
Wat is hun verhouding?

- 6 Begin met het witte vierkant onderaan. Daarop zetten we een geodriehoek. Op de rechter zijde van de geodriehoeken zetten we een vierkant. Enzovoort. Zie de figuur. Zodoende ontstaat er een oneindige “pythagorastak”. We maken de vierkanten wit en de geodriehoeken grijs.
- a Wat is de verhouding tussen de grijze en de witte oppervlakte?
  - b Hoeveel procent van de hele pythagorastak is grijs?

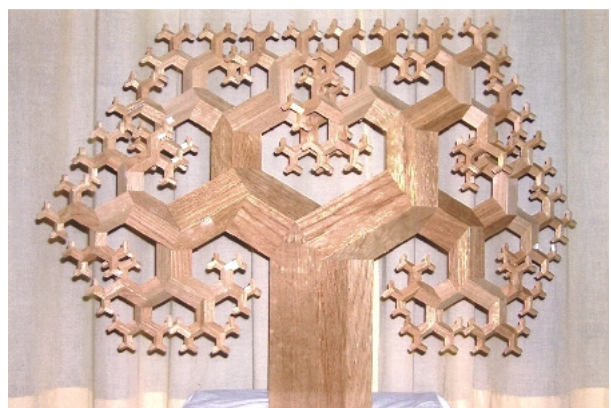


Je maakt een *hele* boom als je steeds op *beide* zijden van de geo's een vierkant zet.

Tijdens zijn werk in 1941 tekende ir. A. Bosman de eerste Pythagorasboom.



Een in hout uitgevoerde Pythagoras-boom van prof. Koos Verhoeff (1987), vervaardigd door Hans de Koning.



## Het verband met breuken

Verhoudingen kom je overal tegen in het dagelijks leven. Het gaat dan altijd om twee (of meer) hoeveelheden. Als je verhoudingen goed begrijpt, is het een kleine stap naar breuken.

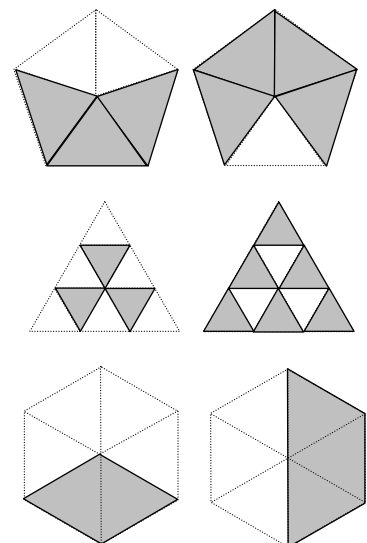
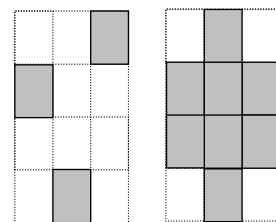
### Voorbeeld

Een koe is op de veemarkt veel duurder dan een schaap. De prijzen voor een schaap en een koe verhouden zich als 3 : 11.



Als we nu de prijs voor een koe als *eenheid* nemen, is de prijs van een schaap een deel van die eenheid. We zeggen het *drie-elfde-deel*, en schrijven  $\frac{3}{11}$ .

- 7 a Wat is de verhouding tussen de grijze oppervlakte in het linker en die in het rechter plaatje?
- b Als we het grijze deel van het rechter plaatje als eenheid nemen, met welke breuk kunnen we dan de oppervlakte van het grijze deel van het linker plaatje schrijven?
- c Dezelfde vragen voor de volgende tweetallen plaatjes.



## 2 Oppervlakte en inhoud

### Lengte, oppervlakte en inhoud

- 8 Ik las in de krant dat Mars ongeveer half zo groot is als de aarde.
- a Wat vind jij dat deze informatie je vertelt?

Je kunt de informatie over Mars op drie manieren interpreteren. Het kan namelijk over de diameter, de oppervlakte en het volume gaan.

Bij de volgende zinnen ligt één interpretatie voor de hand.

- *Duitsland is bijna 9 keer zo groot als Nederland.*
- *Een "fluitje" bier is half zo groot als een "emmertje".*
- *Karel is anderhalf keer zo groot als Marietje.*

- b Op welk aspect let je in deze drie voorbeelden: lengte, oppervlakte of inhoud?

Wat bedoelen we met "groter"? Hebben we het dan over lengte, oppervlakte of inhoud? We vergelijken de aarde met de maan.

diameter aarde:	12.756 km
diameter maan:	3.476 km
oppervlakte aarde:	511.186.000 km <sup>2</sup>
oppervlakte maan:	37.959.000 km <sup>2</sup>
inhoud aarde:	1.086.781.300.000 km <sup>3</sup>
inhoud maan:	21.990.643.000 km <sup>3</sup>

- c Hoeveel keer zo groot is de aarde als de maan, in elk van de drie aspecten?

- 9 In het tuincentrum worden plantjes Delphinium Atlantis (Ridderspoor) te koop aangeboden. De aanbevolen plantdichtheid is 7 plantjes per vierkante meter.
- a Hoe ver moet ik die dan ongeveer van elkaar zetten?

In humusrijke aarde komen wel 400 regenwormen voor per vierkante meter. 's Zomers leven ze dicht onder de oppervlakte. Iemand steekt met zijn schop humusrijke aarde uit zijn tuin. De schop maakt een gat van 15 bij 15 cm.

- b Hoeveel regenwormen mag je daarin verwachten?

Je spreekt van een "blinde" muur als hij geen ramen of deuren heeft. Een steen is 21 cm lang en 7 cm hoog. Verder moet je rekening houden met de voegen: die zijn 1,5 cm breed.

- c Hoeveel stenen heb je gemiddeld nodig per m<sup>2</sup> blinde muur?

Veronderstel nu dat de stenen 10,5 cm bij 3,5 cm zijn en de voegen 0,75 cm.

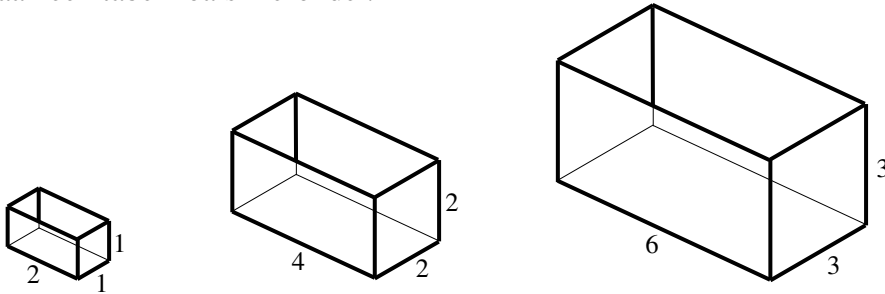
- d Kun je snel zeggen hoeveel stenen je in dit geval gemiddeld nodig hebt per m<sup>2</sup> blinde muur? (Niet opnieuw de berekening van vraag c uitvoeren.)



## Figuren vergroten

- 10 Een aquarium had vroeger randen van hoekijzer, tegenwoordig worden ze ook helemaal van glas gemaakt. De glasplaten worden met een speciale lijm aan elkaar vastgemaakt. De drie aquaria hieronder zijn van boven open. De maten staan erbij in decimeters.

- a Zijn de aquaria gelijkvormig? Waarom?  
b Maak een tabel zoals hieronder.



	kleinste	middelste	grootste
totale lengte lijmnaden			
totale oppervlakte glas			
inhoud			

- c Hoeveel keer past het kleine aquarium in elk van de andere twee? Laat dat ook zien in de plaatjes op het werkblad.

Hiernaast staat een plaatje van de uitgestorven olifantsvogel. Deze loopvogel kon 3,50 meter hoog worden, met een gewicht van 500 kilo-gram. Hij heeft tot ongeveer 1700 op Madagascar geleefd en is waarschijnlijk door toedoen van de mens uitgestorven.



- 11 Op een niet te eenvoudig kopieerapparaat kun je afbeeldingen vergroten en verkleinen. Met een tekenprogramma op de computer kun je ook in één richting verkleinen. Beschouw het plaatje linksboven als het originele plaatje.

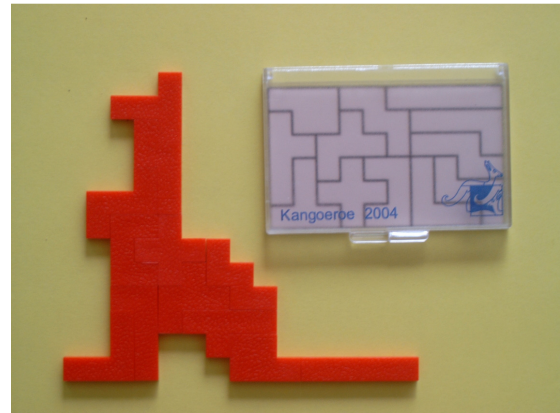
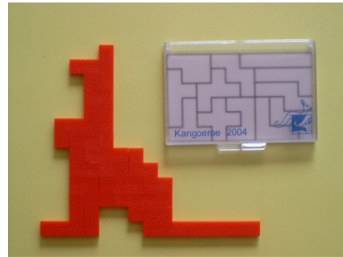
- a Tot hoeveel procent is het verkleind om de andere drie plaatjes te krijgen?  
b Wat is er met de oppervlakte van het originele plaatje gebeurd?  
c Als je een foto in beide richtingen (lengte en breedte tot 40% verkleint, wat gebeurt er dan met de oppervlakte?





## Stelling

1. Als je een vlakke figuur in beide richtingen (horizontaal en verticaal) met factor  $f$  vermenigvuldigt, wordt zijn oppervlakte met  $f^2$  vermenigvuldigd.



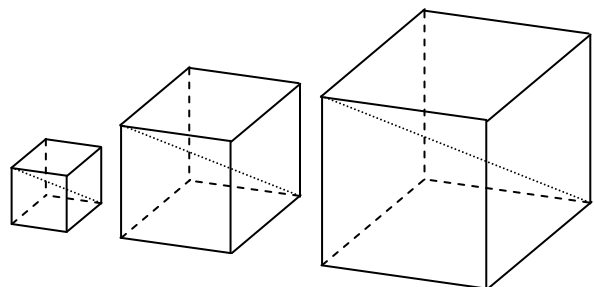
2. Als je een ruimtelijke figuur in alledrie de richtingen (naar voren, naar opzij, naar boven) met factor  $f$  vermenigvuldigt, wordt zijn inhoud met  $f^3$  vermenigvuldigd.



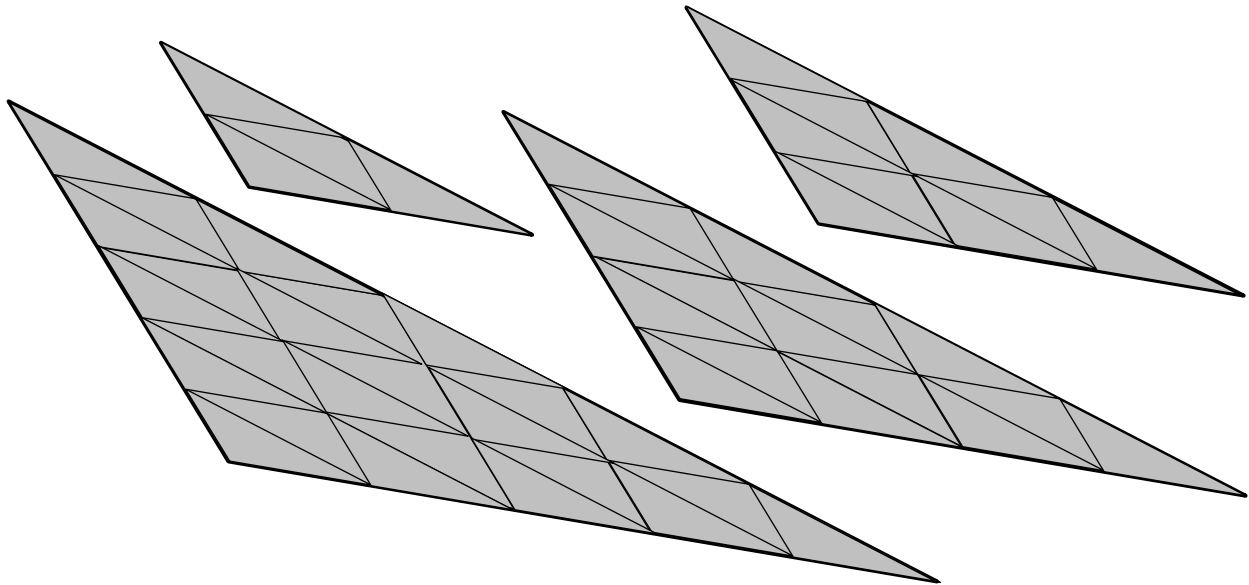
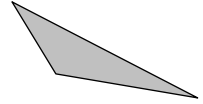
12 De drie kubussen hiernaast hebben ribben die zich verhouden als 1 : 2 : 3.

In elk van de kubussen nemen we een lichaamsdiagonaal: die loopt van een hoekpunt naar het daar tegenover gelegen hoekpunt (door het inwendige van het lichaam).

- Hoe verhouden zich de lichaamsdiagonalen van de kubussen?
- Hoe verhouden zich de oppervlakten van de kubussen?
- Hoe verhouden zich de inhouden van de kubussen ?



De stelling van de vorige bladzijde kan geïllustreerd worden op de volgende wijze. Neem een heleboel exemplaren van een klein driehoekje; dat hoeft geen speciale vorm te hebben. Daarmee kun je grote driehoeken bouwen die gelijkvormig zijn met dat driehoekje:

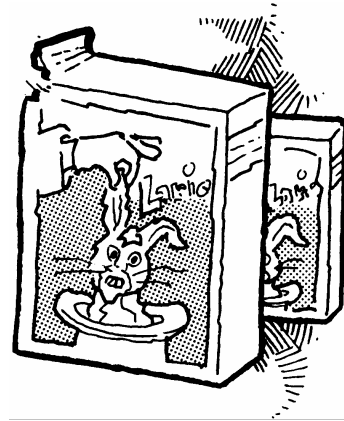


- 13 a** Hoeveel kleine driehoekjes heb je nodig om elk van deze vier vergrotingen te bouwen?  
**b** Wat heeft dit met de stelling van de vorige bladzijde te maken?

- 14** Het waspoeder Larie wordt verkocht in twee verpakkingen. Van de grote doos zijn de afmetingen 1,5 keer zo groot als van de kleine doos.

De kleine doos kost €5,00, de grote doos €16,25. Beide dozen zijn vol.

In welke verpakking is het wasmiddel het duurste?



Claes Oldenburg, geboren in 1929, is een Zweeds-Amerikaans beeldhouwer. Hij heeft verschillende kunstwerken gemaakt die een vergroting zijn van dagelijkse gebruiksvoorwerpen. Bijvoorbeeld de wasknijper in Philadelphia (1976), 14 meter hoog.



- 15 Een gewone wasknijper is 7 cm hoog en weegt 6 gram.  
Veronderstel dat de in Philadelphia een goed schaalmodel is van de wasknijper waar je moeder de was mee ophangt, en van hetzelfde materiaal gemaakt.
- a Wat is dan het gewicht van de reuzen-wasknijper?

Het veertje van een gewone wasknijper weegt 2,8 gram.

- b Wat weegt de veer van de reuzen-wasknijper?

- 16 Op 29 oktober 2006 werd een nieuw record Grootste Hamburger gevestigd in Clinton (New Jersey). De diameter van het vleesmonster was 71 cm. Een normale hamburger heeft een diameter van 10 cm en weegt 135 gram.

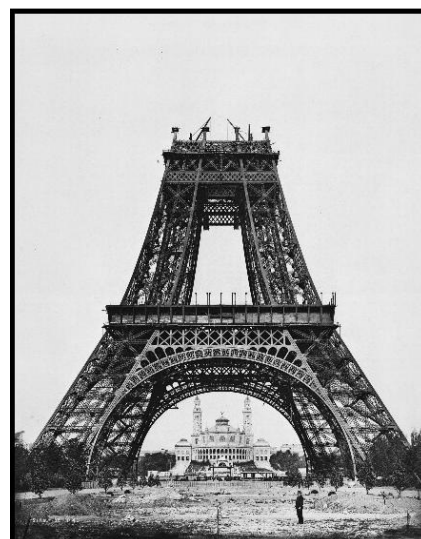
Hoeveel zal het record gewogen hebben? [Inmiddels is het record al weer gebroken.]



- 17 In 1889 werd de beroemde Eiffeltoren voltooid, 300 meter hoog, toen het hoogste bouwwerk ter wereld. Enkele gegevens:
- de toren weegt 7000 ton, dat is 7 miljoen kg,
  - het vierkante grondvlak is ongeveer  $16000 \text{ m}^2$ ,
  - de vier poten zijn elk 26 meter breed.

Veronderstel dat je een schaalmodel van de Eiffeltoren gaat maken van hetzelfde materiaal als de toren zelf. Je maakt het model 1 meter hoog.

- a Hoe breed worden de poten van je model?



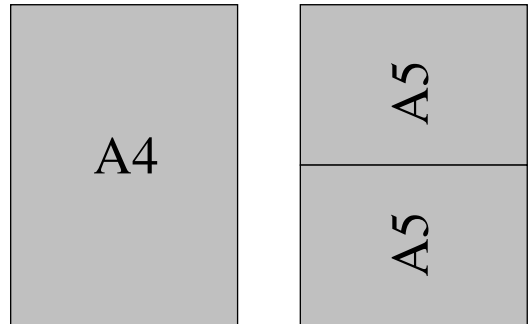
- b Hoe groot wordt de oppervlakte van het grondvlak?
- c Hoeveel gaat je model wegen?

Op 57 meter hoogte bevindt zich een restaurant met een vloeroppervlakte van  $5000 \text{ m}^2$ .

- d Hoe hoog is dat in het schaalmodel en hoe groot is daarin het vloeroppervlak?

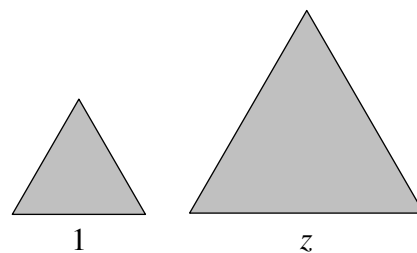
- 18 Een A4-tje is het papierformaat waarop (waarschijnlijk) deze tekst is gedrukt. Een A5-je krijg je door een A4-tje dubbel te vouwen. Een A4-tje en een A5-je zijn gelijkvormig. Als je de zijden van een A5-je met een zeker getal vermenigvuldigt, krijg je de zijden van een A4-tje. Uit stelling 1 (blz.9) volgt welk getal dat is.

Leg dat uit.



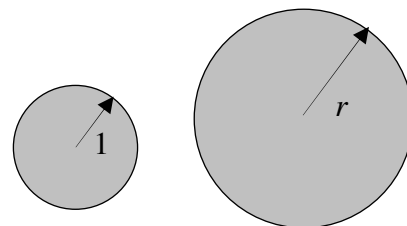
- 19 De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 1 is  $\frac{1}{4}\sqrt{3}$  en dat is ongeveer 0,433.

- a Wat is de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde 10?
- b Wat is de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde  $z$ ?



De oppervlakte van een cirkel met straal 1 is  $\pi$  en dat is ongeveer 3,14.

- c Wat is de oppervlakte van een cirkel met straal 10?
- d Wat is de oppervlakte van een cirkel met straal  $r$ ?

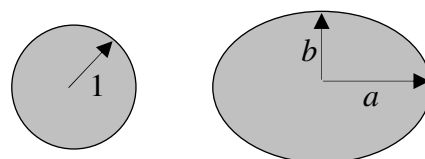


Als je een cirkel met straal 1 in horizontale richting met factor 2 oprekt en in verticale richting met factor 3, krijg je een ellips.

- e Wat is de oppervlakte van die ellips?

Als je een cirkel met straal 1 in horizontale richting met factor  $a$  oprekt en in verticale richting met factor  $b$ , krijg je een ellips.

- f Wat is de oppervlakte van die ellips?



## Oppervlaktediagrammen

- 20 De wereldkaart die iedereen gewend is, geeft een sterk vervormd beeld van de werkelijkheid. Door de gangbare manier waarop de aardbol op een plat vlak wordt geprojecteerd, lijken landen groter naarmate ze dichterbij de polen liggen. Groenland lijkt op kaart 1 vier keer zo groot als Congo, terwijl het in feite iets kleiner is.

Op kaart 2 is de grootte van de landen wel correct: als een land er op kaart 2 bijvoorbeeld 3 keer zo groot uitziet als een ander land, heeft dat eerste land in werkelijkheid ook een 3 keer zo grote oppervlakte. Sommige landen zien er sterk vervormd uit; andere niet.

- a Welke landen worden sterk vervormd?

In plaats van de oppervlakte kun je ook een andere eigenschap van een land door zijn grootte op de kaart weergeven, zoals het aantal inwoners. Zo zie je op kaart 3 in één oogopslag hoe groot het aandeel is van een land in de totale wereldbevolking.

- b Welke twee landen hebben de meeste inwoners?

In kaart 3 is de bevolkingsdichtheid (dat is aantal inwoners per vierkante kilometer) maatgevend. Op elke  $\text{mm}^2$  van het kaartje wonen evenveel mensen.

- c Leg dat uit.

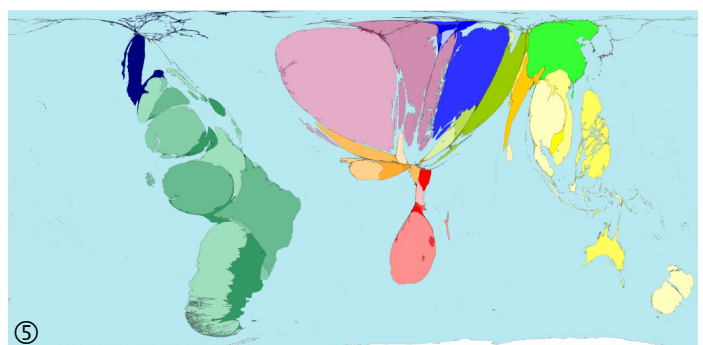
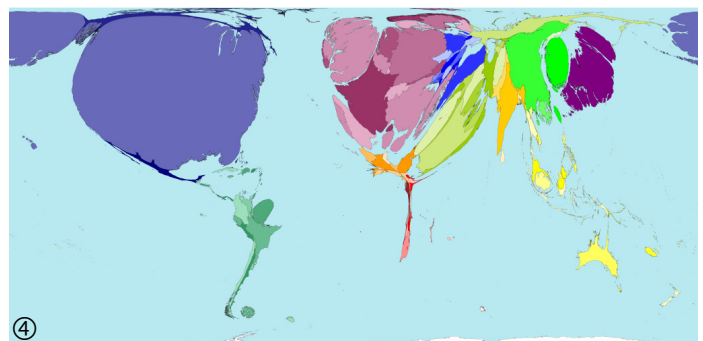
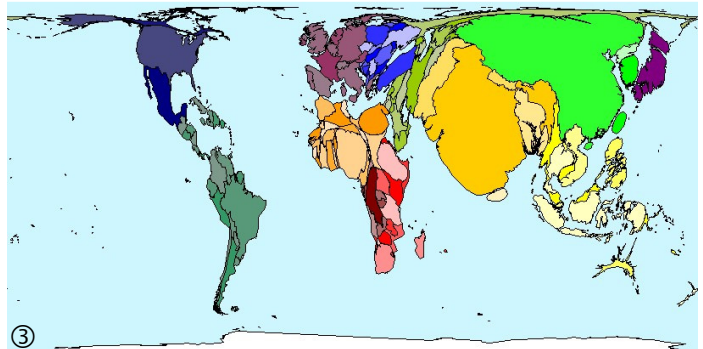
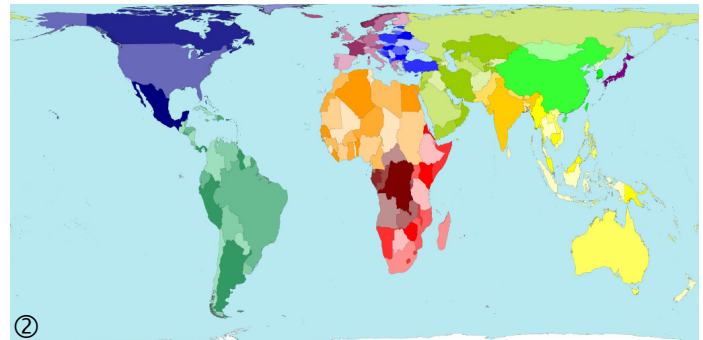
Op kaart 4 zijn de militaire uitgaven van een land maatgevend voor zijn oppervlakte.

- d Wat is de verhouding ongeveer tussen de militaire uitgaven van de VS en Japan?

Op kaart 5 kun je de fruitexport aflezen van de verschillende landen.

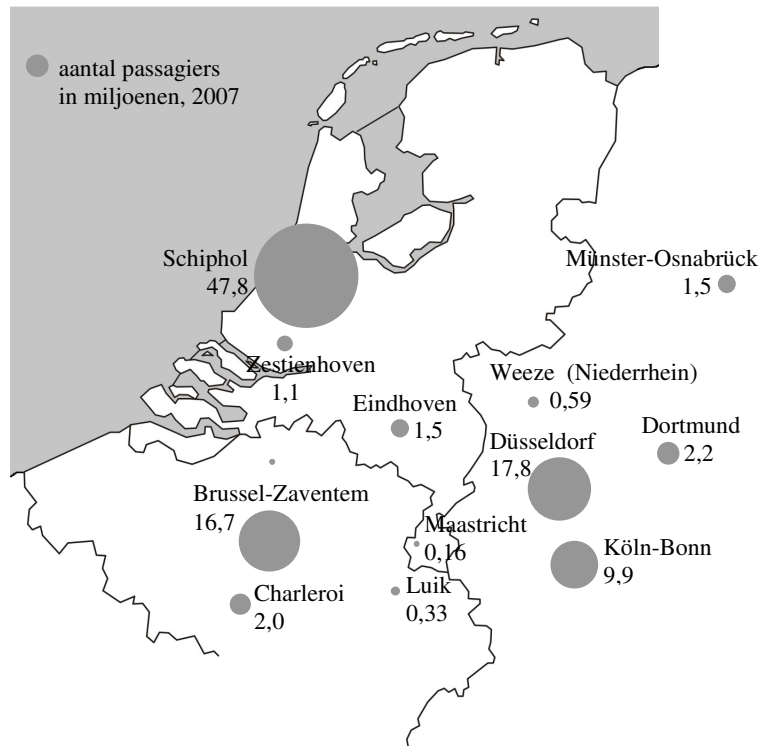
- e Welk land is de grootste fruitexporteur?

Zo kun je wereldkaarten maken aan de hand van allerlei aspecten. Zie [www.worldmapper.org](http://www.worldmapper.org).



Het idee van de kaarten op de vorige bladzijde is dat de grootte van een land evenredig is met zijn waarde van het af te beelden aspect. Daarbij wordt de werkelijke vorm zoveel mogelijk behouden. Maar sommige landen worden toch onherkenbaar. Wel blijft de onderlinge positie correct: bijvoorbeeld ligt de VS tussen Canada en Mexico in, en dat is op elk van die kaarten ook zo.

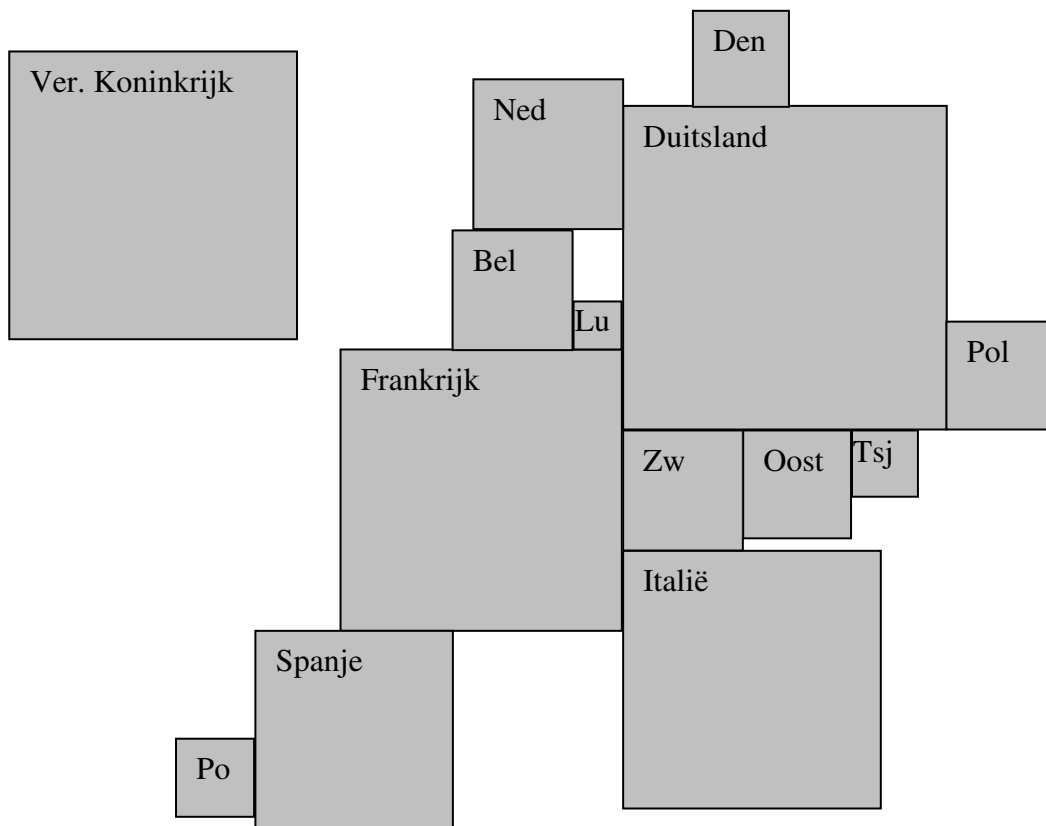
- 21 Met hetzelfde idee is de kaart hiernaast gemaakt. Er staan de luchthavens op waarvan Schiphol concurrentie ondervindt.



De oppervlakte van een cirkel geeft de grootte van de lucht-haven aan: het aantal passagiers dat in 2007 werd vervoerd.

Ga na of de cirkels “Schiphol” en “Dortmund” in de juiste verhouding zijn getekend.

- 22 De VS en Japan hebben het grootste BNP (bruto nationaal product). Dat is wat door de mensen in het land met zijn allen in een jaar verdiend wordt. Daarna komen veel West-Europese landen. In het kaartje hiernaast zijn die landen weergegeven door vierkanten.



Duitsland heeft als nummer drie van de wereld een BNP van 2.900 miljard dollar.

- Wat is het BNP van Nederland?
- Welk land heeft ongeveer een even groot BNP als België?
- Hoeveel keer zo groot is het BNP van Frankrijk als het BNP van Luxemburg?

Het BNP van Frankrijk is veel groter dan dat van Luxemburg. Toch kun je zeggen dat Luxemburg een rijker land is dan Frankrijk.

- Leg dat uit.

### 3 Rechthoeken

#### De verhouding tussen de zijden

De meest voorkomende ruimtelijke vorm is de balk. Denk maar aan een boek, kamer, kast, doos, bus, lift, broodtrommel, ... De zes grensvlakken van een balk zijn rechthoeken. Soms is de dikte van de vorm helemaal niet belangrijk; dan kunnen we de vorm zelf als rechthoek opvatten. Dat is bijvoorbeeld het geval bij een schilderij, of een ruit (in een raam).

- 23 Eigenlijk komen rechthoeken in de natuur niet voor, omdat alles wel enige dikte heeft. Maar die is soms erg klein. Het gaat dan om de andere twee dimensies.
- a Weet jij nog andere voorbeelden dan een schilderij en een ruit?

De balk komt vaak voor in het dagelijks leven.

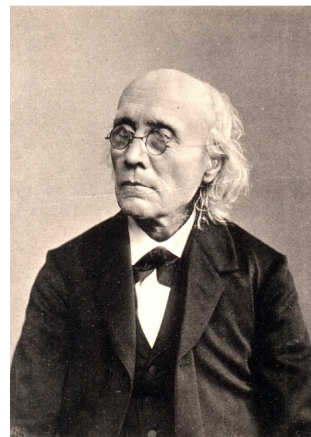
- b Welke andere wiskundige ruimtelijke vorm komt ook vaak voor?

Rechthoeken zijn verschillend van vorm. Ze variëren van vierkant tot zeer langwerpig. We letten op de verhouding van de zijden. Bij een vierkant is die verhouding 1 : 1.

- 24 Stel dat je hartsvriendin binnenkort jarig is en jij voor haar een persoonlijke felicitatiekaart gaat ontwerpen. Je begint ermee een rechthoek te kiezen.
- a Welke verhouding vind jij mooi voor de felicitatiekaart?
- b Welke verhouding vind jij mooi voor tegels op de badkamer, voor een vloerkleed in de huiskamer en voor een vriendenboekje?

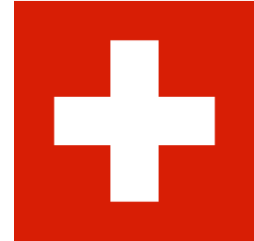
Soms kun je bij voorbaat weinig zeggen over een redelijke verhouding van een rechthoek. Bijvoorbeeld bij een raam in de huiskamer; welke verhouding daarvoor redelijk (of mooi) is, hangt onder andere af van de andere ramen en van de grootte van de huiskamerwand.

Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887) was een experimenteel psycholoog in Leipzig. Hij legde proefpersonen een heleboel rechthoeken met verschillende verhoudingen voor, met de vraag welke rechthoek(en) ze het mooist en welke ze het lelijkst vonden. Zijn conclusie was dat de mensen die rechthoeken kozen waarvan de zijden zich verhouden als ongeveer 1 : 1,6, ofwel 5 : 8. Later hebben anderen zijn experimenten in twijfel getrokken. Wij komen later op deze verhouding terug.





Van bijna alle landen is de vlag rechthoekig. Maar ze hebben niet allemaal dezelfde vorm. Zo is de Zwitserse vlag vierkant en de Nederlandse niet. Een land legt officieel vast in welke hoogte-breedteverhouding zijn vlag gemaakt moet worden. Dat noemt men de ratio. Hieronder staan de vlaggen van het Verenigd Koninkrijk, Duitsland, Nederland en Zwitserland, alle met een breedte van 30 mm. Ze zijn achtereenvolgens 15, 18, 20 en 30 mm hoog.



- 25 a Schrijf voor elk van deze vier vlaggen de verhouding hoogte : breedte (de ratio dus) zo eenvoudig mogelijk.  
 b Teken de vier vlaggen ook met eenzelfde *hoogte* van 30 mm (en de breedte dus aangepast).

De meeste vlaggen hebben de ratio 2 : 3 (de breedte is 1,5 keer de hoogte), maar sommige hebben heel aparte verhoudingen.

De ratio van de vlag van Alaska 125 : 177.

De ratio van de vlag van Togo is 500 : 809.

Deze twee verhoudingen zijn heel speciaal; we komen hier later op terug.

Opmerkelijk is de ratio van de vlag van België. Die is 13 : 15. De reden van deze ongebruikelijke verhouding is onbekend.



Een vlag van een land kun je in verschillende afmetingen hebben. De groottes verschillen, maar de vorm is hetzelfde.

Rechthoeken waarbij de *verhouding* tussen hoogte en breedte hetzelfde is heten **gelijkvormig**.

## Gelijkvormige rechthoeken

Wanneer zijn twee rechthoeken gelijkvormig? Dat kun je op een heleboel manieren zeggen.

### 1) Als de verhouding van de zijden bij beide rechthoeken hetzelfde is.

- 26 Een rechthoek van 22 bij 33 is gelijkvormig met een rechthoek waarvan een zijde 18 is.  
a Hoe lang is de andere zijde?

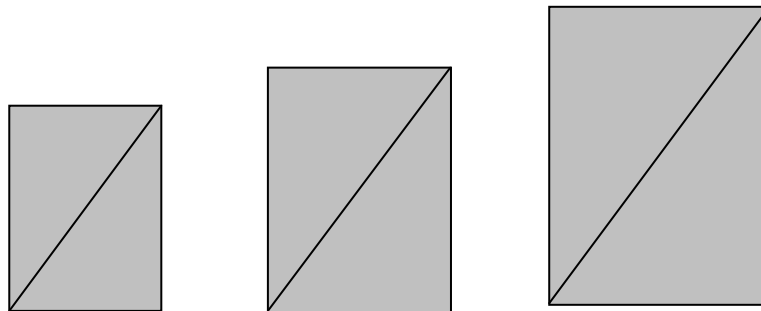
Een rechthoek van 22 bij 33 is gelijkvormig met een rechthoek waarvan een zijde  $a$  is.  
b Hoe lang is de andere zijde (uitgedrukt in  $a$ )?

### 2) Als de ene rechthoek uit de andere ontstaat door een vergroting.

Dit gebeurt op een (niet te eenvoudig) kopieerapparaat. De ene zijde wordt vermenigvuldigd met een zekere factor en de andere zijde wordt met *dezelfde* factor vermenigvuldigd.

- 27 Een foto van 12 breedte en 16 cm hoogte wordt op een pagina geplaatst. Hij moet een ruimte van 12 cm hoogte opvullen.  
a Met welke factor moet worden vermenigvuldigd?  
b Hoe breed komt de foto op de pagina?

### 3) Als de rechthoeken in dezelfde stand staan, lopen de diagonalen evenwijdig.



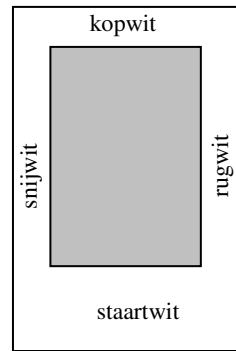
Van de bladzijden in een boek is een vast rechthoekig deel bedrukt: de zogenaamde *zetspiegel*. Daarbuiten zit de zogenaamde marge. De marge aan de bovenkant heet het kopwit, aan de onderkant het staartwit en opzij ervan het rugwit en snijwit.

Hoe groot je die delen maakt, is een kwestie van smaak. Er zijn verschillende methodes om de zetspiegel te construeren. Die methodes zijn toepasbaar op elk formaat papier.



Gebedenboek, ca 1500

- 28 a Is het bedrukte deel hiernaast gelijkvormig met de hele bladzijde? Kijk naar de diagonalen.



Als een bladzijde niet vierkant is en je maakt de stroken wit om het bedrukte deel even groot, dan is het bedrukte deel niet gelijkvormig met de hele bladzijde.

- b Onderzoek of dat zo is aan de hand van enkele voorbeelden.

Je hebt een bladzijde van 20 bij 30 cm. Je maakt een zetspiegel die gelijkvormig is met de pagina zelf. Het snij- en rugwit zijn samen 9 cm breed.

- c Hoe hoog moet je dan het kop- en staartwit samen maken?

- 29 We bekijken een bladzijde met breedte en hoogte die zich verhouden als 5 : 8.

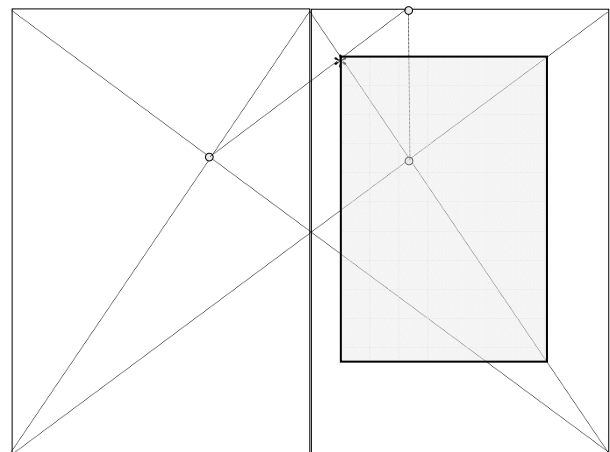
Teken zo'n pagina.

Kies breedten van het rugwit, kopwit, snijwit en staartwit die zich verhouden als 2 : 3 : 3 : 5.

Teken twee zetspiegels op de pagina.

Leg uit dat de zetspiegel altijd gelijkvormig is met de pagina.

We bespreken hier een van de methodes om de zetspiegel te bepalen: *de methode Van de Graaf*. Hij werkt met diagonalen. We beginnen met een "spread": dat zijn twee pagina's naast elkaar, zoals bij een opengeslagen boek.

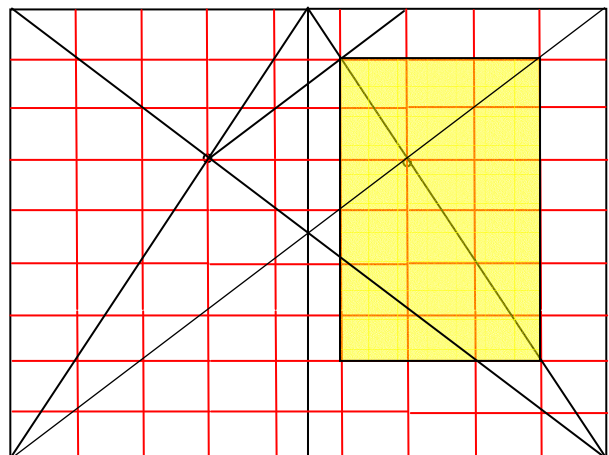


- 30 Op het werkblad staat nevenstaande figuur ook.

Probeer uit te vinden in welke volgorde de lijnen getrokken worden om het grijze veld, de bladspiegel, uiteindelijk te vinden.

Het kan ook anders. Leg een rooster van 9x9 rechthoekjes over de spread. Daar past het te bedrukken deel precies in.

- 31 a Welk deel wordt bedrukt in de methode Van de Graaf?  
b Wat zijn de verhoudingen rugwit : snijwit en kopwit : staartwit ?



## Spiralen

32 Iemand legt enkele gelijkvormige rechthoeken in dezelfde stand met de linksonder-hoek op elkaar. Maak een tekening.

a Wat weet je dan te vertellen over de rechtsboven-hoekpunten?

Teken een rechthoek en kies willekeurig drie punten op een van zijn diagonalen. Trek door die punten lijnen evenwijdig aan de zijden van de rechthoek.

b Zie je gelijkvormige rechthoeken in de figuur die je dan hebt? Hoeveel?

Iemand legt twee gelijkvormige rechthoeken met een hoek op elkaar, maar nu in verschillende stand: de ene rechthoek is een kwartslag gedraaid ten opzichte van de andere.

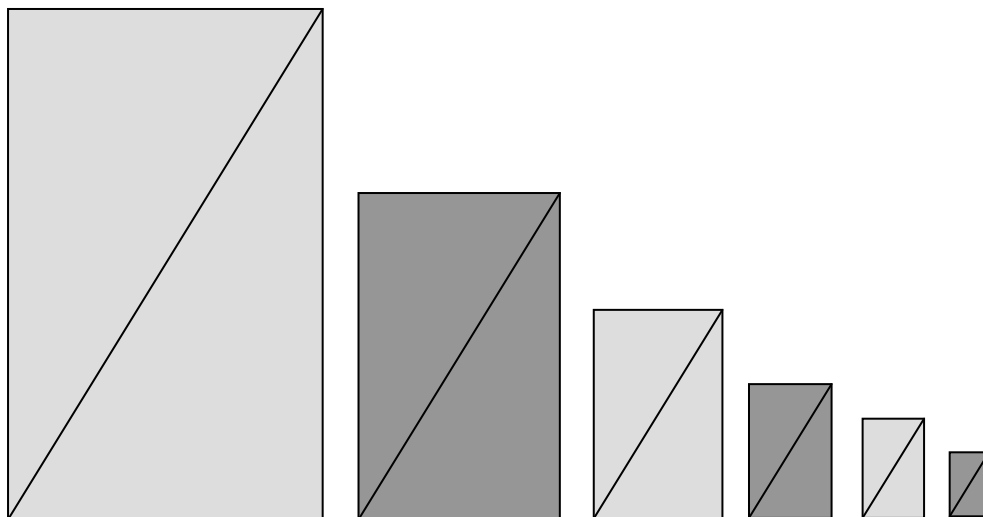
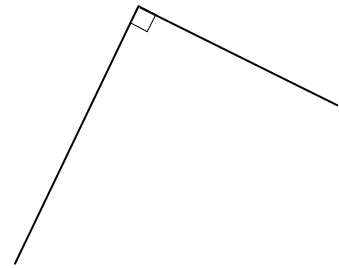
c Maak een tekening.

Een diagonaal van de ene rechthoek staat loodrecht op een diagonaal van de andere rechthoek.

d Leg dit uit.

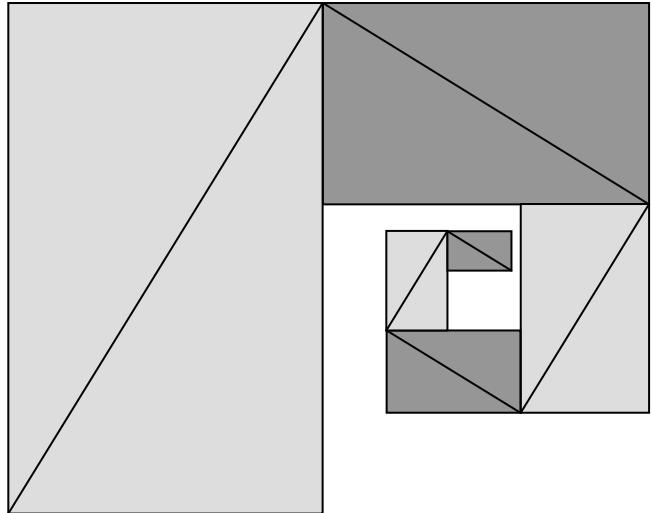
Teken twee lijnstukken, loodrecht op elkaar; zoals hiernaast.  
Teken de rechthoek waarvan het ene lijnstuk diagonaal is en ook de rechthoek waarvan het andere lijnstuk diagonaal is; beide rechthoeken met verticale en horizontale zijden.

e Leg uit dat de rechthoeken gelijkvormig zijn.  
Tip: draai een van de rechthoeken een kwartslag.



Vijf rechthoeken. Een volgende rechthoek krijg je steeds door de vorige met dezelfde factor te vermenigvuldigen, namelijk 0,64. De rechthoeken zijn dus gelijkvormig. Dat kun je ook aan hun diagonalen zien. De rechthoeken zijn om en om licht- en donkergrijs. De donkergrijze draaien we een kwartslag. Vervolgens leggen we er een spiraal mee.

Let op de diagonalen. Die maken rechte hoeken.



- 33** Maak zelf ook zo'n spiraal. Begin met een rechthoek van 5 bij 10. Vermenigvuldig de zijden steeds met 0,75 om de volgende rechthoek te maken.

Op blz. 18 heb je drie manieren gezien waarmee je kunt nagaan of twee rechthoeken gelijkvormig zijn. We hebben er nu een vierde manier bij.

- 4) Als de rechthoeken onderling een kwartslag gedraaid zijn, staan de diagonalen loodrecht op elkaar.**

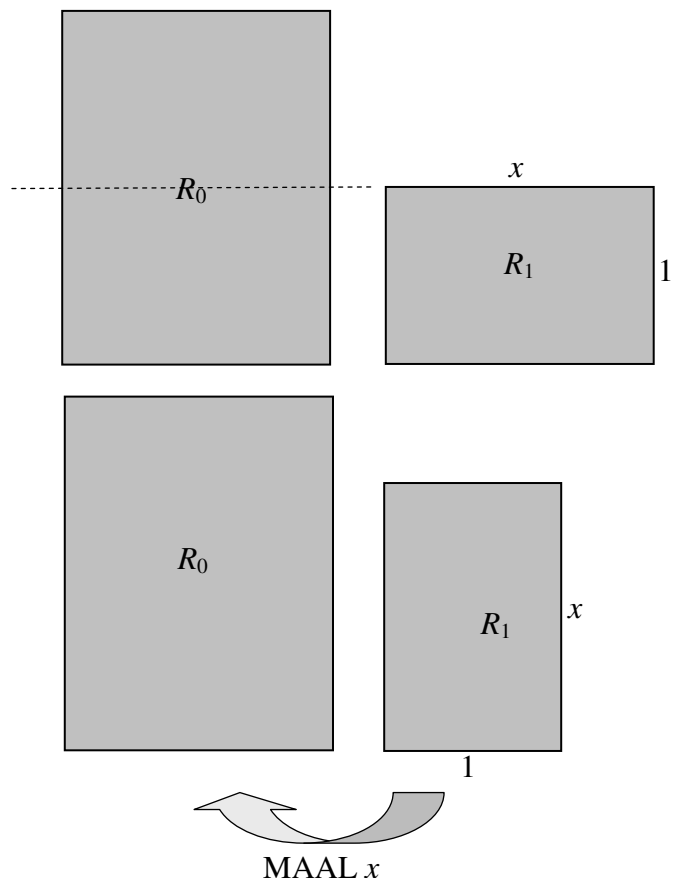
## A-formaten

We gaan twee soorten rechthoeken uitgebreid behandelen: de *A-formaten* en in een volgend hoofdstuk *gulden rechthoeken*.

- 34** Knip een rechthoekig vel papier van 15 bij 20 cm. Vouw het beurtelings horizontaal en verticaal dubbel. Noem de rechthoek waarmee je begon  $R_0$ , de dubbelgevouwen rechthoek  $R_1$ , die weer dubbelgevouwen heet  $R_2$ , enzovoort.
- Ga na dat  $R_0, R_2, R_4, \dots$  gelijkvormig zijn.  
Ga na dat ook  $R_1, R_3, R_5, \dots$  gelijkvormig zijn.
  - Stel dat je was begonnen met een vierkant vel papier.  
Ga na dat ook dan  $R_0, R_2, R_4, \dots$  gelijkvormig zijn. En ook  $R_1, R_3, R_5, \dots$ .
- 35** We gaan verder met het vouwen in de vorige opgave. De rechthoeken met een even nummer zijn onderling gelijkvormig en ook de rechthoeken met een oneven nummer. Maar in opgave 34 was een rechthoek met even nummer niet gelijkvormig met een rechthoek met oneven nummer.  
Bij een speciale verhouding van  $R_0$  zijn *alle* rechthoeken  $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, \dots$  gelijkvormig.
- Probeer uit te zoeken hoe groot de verhouding van de zijden van  $R_0$  (ongeveer) moet zijn.

Neem even aan dat de korte zijde van  $R_1$  lengte 1 heeft. De lange zijde van  $R_1$  noemen we  $x$ .

- Wat zijn dan de zijden van  $R_0$ ?



Omdat  $R_0$  en  $R_1$  gelijkvormig zijn is er een vermenigvuldigingsfactor die de zijden van  $R_1$  omrekenet naar de zijden van  $R_0$ .

Aan de korte zijde van  $R_0$  en  $R_1$  kun je zien dat die factor  $x$  is.

Let nu op de lange zijde van  $R_0$ :

- je weet hoe lang die is (vraag b),
- je krijgt die lengte ook door de lange zijde van  $R_1$  met factor  $x$  te vermenigvuldigen.

- Welke vergelijking moet dus voor  $x$  gelden?

- Hoe groot is  $x$  dus?

- Hoe groot is  $x$  als we voor de korte zijde van  $R_1$  niet 1 gekozen hadden, maar 10?

- Hoe groot is  $x$  als we voor de korte zijde van  $R_1$  niet 1 gekozen hadden, maar  $a$ ?

De blaadjes waarop jouw proefwerken staan gedrukt, hebben deze verhouding: als je ze dubbelvouwt krijg je een rechthoek die *gelijkvormig* is met het uitgevouwen vel. Diezelfde verhouding tref je aan bij een krantenpagina, bij briefkaarten, enz.

Je noemt dat een A-formaat. Dat wordt tegenwoordig het meest gebruikt.

Het grootste A-formaat is A0. Dat is een vel met een oppervlakte van  $1 \text{ m}^2$ , waarvan de hoogte  $\sqrt{2}$  keer zo groot is als de breedte.  $\sqrt{2} \approx 1,4143$ .

Tegenwoordig zijn de A-formaten de meest gebruikte papierformaten

De verhouding van de zijden van een A-formaat is  $1 : \sqrt{2}$ .

Als je een A-formaat papier dubbelvouwt, krijg je weer een A-formaat.

Alle vellen van een A-formaat zijn gelijkvormig.

De verhouding van de zijden  $1 : \sqrt{2}$  hadden we ook al in opgave 18 gezien.

**36 a** Wat zijn de afmetingen van een A0-vel in mm?

Een A1-vel krijg je door een A0-vel dubbel te vouwen.

**b** Wat is dus de oppervlakte van een A1-vel?

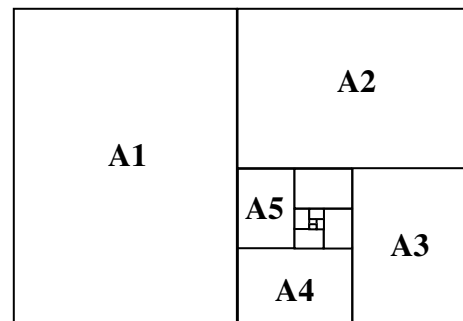
En wat zijn de afmetingen?

Een opgevouwen krant (niet op tabloid-formaat) heeft het A1-formaat.

**c** Controleer de afmetingen van een opgevouwen krant.

**d** Maak een tabel zoals hieronder:

	oppervlakte	lengte	breedte
A0	$1 \text{ m}^2$	1189 mm	841 mm
A1			
A2			
A3			
A4			
A5			
A6			
A7			
A8			
A9			
A10			



Elk van deze groottes kom je dagelijks tegen.

**e** Probeer van elk een voorbeeld te vinden.

**f.** Hoeveel A6-jes passen er op een A1?

- 37 a** Maak een spiraal met de rechthoeken  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  (net als op bladzijde 21), zo dat de rechthoeken  $A_0, A_2, A_4, \dots$  de lange zijde verticaal hebben en de rechthoeken  $A_1, A_2, A_3, \dots$  de lange zijde horizontaal hebben.

De spiraal met A-formaten is heel bijzonder. De rechthoeken sluiten exact op elkaar aan: er blijven geen ruimtes over zoals bij de spiralen van opgave 33 en het voorbeeld daarvoor het geval was. Als je de spiraal oneindig lang zou kunnen vervolgen, zou een hele rechthoek exact worden opgevuld.

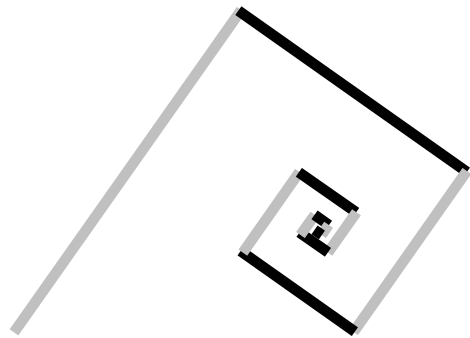


- b** Leg uit dat een volgend A-formaat precies past in de overgebleven ruimte.

We letten nu op de diagonalen die een spiraal met rechte hoeken vormen. Hiernaast zijn de diagonalen om en om grijs en zwart.

Vergelijk twee opeenvolgende grijze diagonalen.

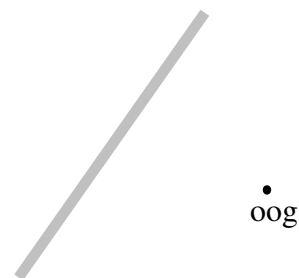
- c** Toon aan dat een grijze diagonaal half zo lang is als de vorige grijze diagonaal.



Er is een punt waar de diagonalen omheen lijken te draaien. Dat centrale punt is het zogenaamde *oog*  $O$  van de spiraal.

Hiernaast en op het werkblad is – sterk vergroot – het oog en een van de grijze diagonalen getekend.

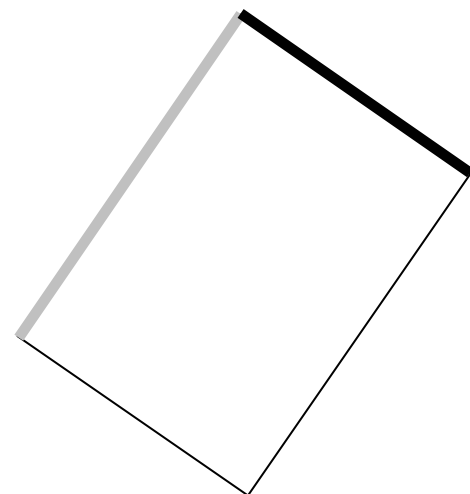
- d** Teken de volgende (kleinere) diagonaal.



Je kunt een rechthoek om de spiraal heen tekenen.

- e** Hoe kun je snel binnen de rechthoek het oog vinden?

Tip: Kijk naar de spiraal bij vraag b. De knikken van grijs naar zwart liggen op een rechte lijn, en ook de knikken van zwart naar grijs.



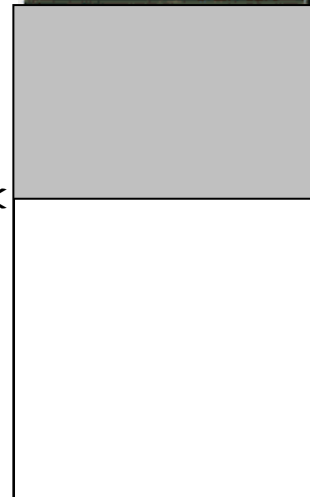


## 4 Gulden rechthoeken

De beroemde Zwitserse architect Le Corbusier (1887 – 1965) paste vaak de "gulden verhouding" toe in zijn ontwerpen. Een voorbeeld is het gebouw van de Verenigde Naties in New York, dat bestaat uit drie op elkaar gestapelde gulden rechthoeken.

Typerend voor een gulden rechthoek is de volgende eigenschap:

*Als je er een vierkant van af knipt, krijg je een rechthoek die gelijkvormig is met de oorspronkelijke.*



- 38** Knip twee rechthoeken van 13 bij 8 cm.  
Knip van een van de rechthoeken een vierkant af; je houdt een kleinere rechthoek over.

**a** Onderzoek of de grote rechthoek en de kleinere rechthoek gelijkvormig zijn.

**b** Bereken het quotiënt  $\frac{\text{langte}}{\text{breedte}}$  voor de grote rechthoek en ook voor de kleinere rechthoek die je overhield.

Je ziet dat de verhouding van de zijden van de grote en van de kleinere rechthoek niet precies gelijk zijn (het scheelt niet veel!) Dus zijn ze de rechthoeken niet gelijkvormig (ofschoon ze dat op het eerste gezicht wel lijken te zijn). Dus is de 13×8-rechthoek geen gulden rechthoek. (Maar hij zit wel dicht bij een gulden rechthoek.)

Als je een vierkant afknijpt van de 8×5-rechthoek houd je weer een rechthoek over; en je kunt dat proces daarna nog drie keer herhalen.

**c** Maak een tabel voor de afmetingen van de rechthoeken: elke volgende rechthoek krijg je door een vierkant van de vorige rechthoek af te knippen.

langte	8				
breedte	5				

Als je van een rechthoek een vierkant af knijpt, houd je een rechthoek over, die in het algemeen niet gelijkvormig is met de rechthoek waarmee je begon. Is het wel mogelijk dat de rechthoek die je overhoudt gelijkvormig is met de oorspronkelijke? Ja, zo'n rechthoek bestaat en die gaan we zoeken in de volgende opgave.

39 Noem de korte zijde van de rechthoek 1 en de lange zijde  $x$ .

a Wat zijn de zijden van de rechthoek die overblijft als je er een vierkant vanaf knipt?

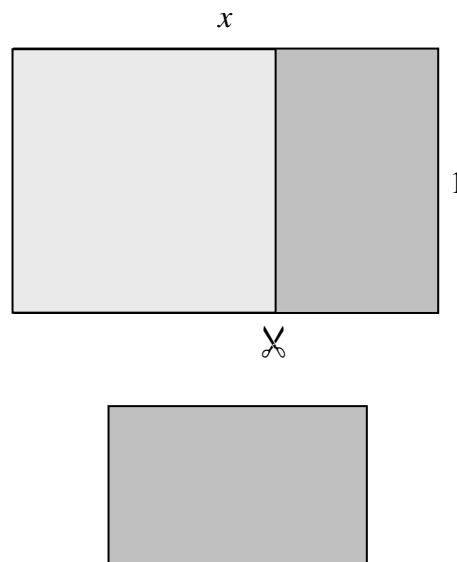
We zoeken nu die waarde van  $x$ , waarbij de grote en de kleine rechthoek gelijkvormig zijn.

Van de grote rechthoek is de korte (verticale) zijde 1. Van de kleine rechthoek is de korte zijde  $x-1$ . We moeten de grote rechthoek dus met  $x-1$  vermenigvuldigen om er de kleine rechthoek van te maken.

b Leg uit dat hieruit volgt dat  $x \cdot (x-1) = 1$ .

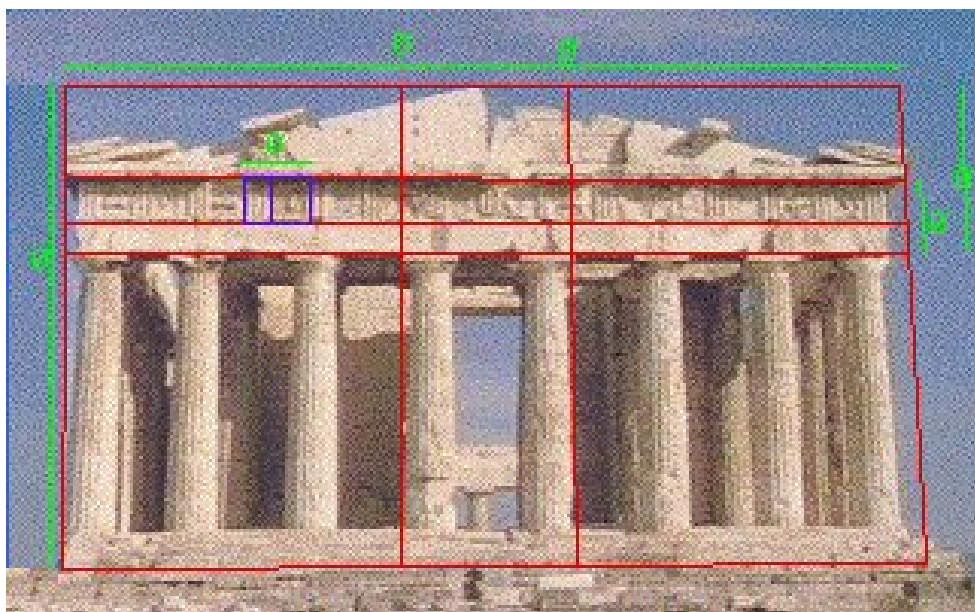
c Leidt hieruit af dat  $x^2 - x - 1 = 0$ .

d Bepaal  $x$ .



Rechthoeken met deze verhouding van de zijden noemt men wel **gouden rechthoeken**. Sommigen vinden dat een gulden rechthoek de perfecte, ideale vorm heeft. De experimenten van Gustav Fechner zouden wijzen in deze richting (blz. 16). Er zijn mensen die zover gaan dat ze denken dat deze rechthoeksvorm fundamenteel is in de natuur.

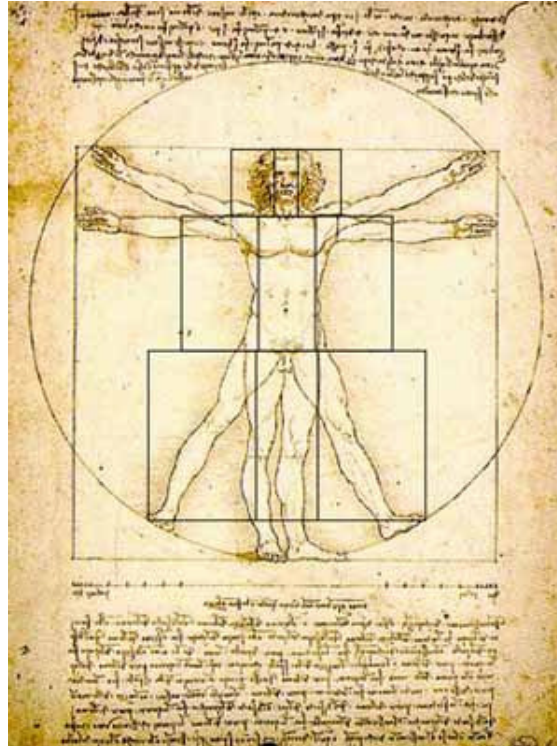
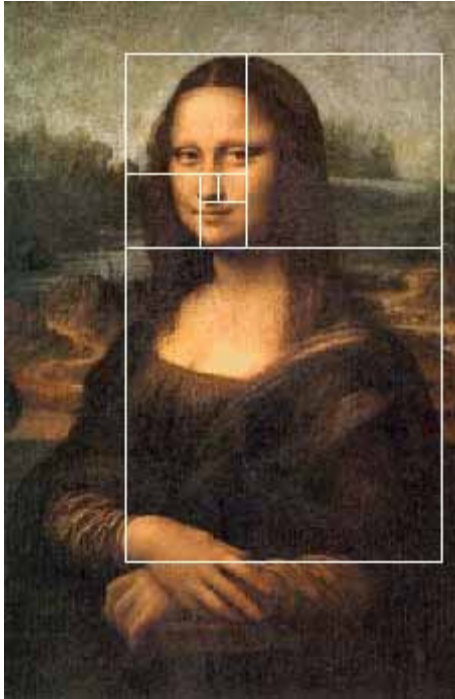
Aanhangers van de gulden rechthoek vinden dat hij mooi past op het Parthenon in Athene, zoals hieronder te zien is.



Het getal  $x$  dat je in opgave 39 hebt berekend heeft een eigen naam (zoals het getal  $\pi = 3,1415\dots$  een eigen naam heeft). Het heet  $\phi$  (spreek uit *fië*).

De verhouding van de zijden van een gulden rechthoek is  $1 : \phi$ . Hierbij is  $\phi$  oplossing van de vergelijking  $x^2 - x - 1 = 0$ . Je rekenmachine geeft  $\phi \approx 1,6180\dots$ . Op blz. 37 komen we hierop terug.

Ook zouden schilders bij voorkeur gebruik maken van de gulden rechthoek, bewust of onbewust. Zo zou Leonardo da Vinci de gulden rechthoek hebben toegepast in de *Mona Lisa* en in de *Vitruviusman* (een studie naar verhoudingen bij het menselijk lichaam). De *Vitruviusman* komt voor op de Italiaanse versie van de Euro. Sceptici zeggen dat je zo wel altijd bij een tekening een gulden rechthoek kunt tekenen.



40 Hieronder staat een lijnstuk. Het is verdeeld in twee stukken die zich verhouden als  $1 : \varphi$



Ga dat na.

Als een lijnstuk verdeeld is in twee stukken die zich verhouden als  $1 : \varphi$ , zeggen we dat het lijnstuk verdeeld is volgens **de gulden snede**.

41 Hiernaast staat het beroemde schilderij *De overgave van Breda* van Velasquez, 1634-1635.

- a Ga na dat de horizon de hoogte van het schilderij verdeelt volgens de gulden snede.
- b Ga na dat de meest linkse lans de breedte van het schilderij verdeelt volgens de gulden snede.

Onzeker is of Velasquez de gulden snede bewust voor het schilderij gebruikt heeft.



Er is een hele cultus ontstaan rond de gulden snede. Er worden magische krachten aan toegekend. Dat wordt ook in de hand gewerkt door zijn naam. Een tweede naam voor de gulden snede is de Goddelijke verhouding, zoals Luca Pacioli hem noemde, eind vijftiende eeuw.

Luca Pacioli, (1445 - 1517) was een Italiaans wiskundige en Franciscaner monnik. Hij was een rondreizende wiskundedocent tot hij in 1497 in Milaan ging werken. Daar werkte hij samen met onder meer de vermaarde kunstenaar en wetenschapper Leonardo da Vinci, die hij wiskundeles gaf.

Pacioli publiceerde verschillende werken over wiskunde. In 1497 schreef hij het eerste deel van de *Divina proportione* (Goddelijke verhouding). Hij bespreekt daarin de wiskunde van de gulden snede. In 1509 breidde hij het boek uit met een verhandeling over verhoudingen in de architectuur. Opvallend genoeg komt de gulden snede daarin niet ter sprake. Luca Pacioli beveelt eenvoudige verhoudingen in de architectuur aan, zoals 1:2, 1:3, 3:4, 2:3, etc.

- 42 a Teken een vierkant. Verdeel het met een horizontale lijn volgens de gulden snede  
 b Teken een rechthoek zoals hieronder. Verdeel deze met een verticale lijn volgens de gulden snede.



## De Gulden Geur

Mede dankzij Dan Brown (de *Da Vinci code*) mag het gulden getal zich in een hernieuwde belangstelling verheugen. Het gulden getal (phi) heeft ongeveer de waarde 1,618. Exact:  $\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$ .

Alles wat voldoet aan de gulden verhouding (ook wel de goddelijke verhouding) is mooi. Zo simpel is dat. Als de verhouding tussen de afstand van uw voeten tot uw navel en die van uw navel tot uw hoofd ongeveer is als 1 : 0,6 dan voldoet u aan het gulden getal en is uw lichaam mooi. Jammer genoeg worden wij Nederlanders steeds langer en zit deze lengtetoeename vooral in onze benen, dus wij worden steeds lelijker. Aziaten worden ook steeds langer, waardoor die juist steeds dichterbij het goddelijke lichaam komen.

In 1984 schreef Dom Néroman: "(...) als van een ras de navel te laag zit voor de grote meerderheid der individuen, dan heeft dit ras zijn tijd van volgroeiheid nog niet bereikt."

Professor Bliskunov (Kiev) biedt op basis van het gulden getal beenverlengingen aan. Hij heeft zelfs een octrooi op een methode om benen (botten) te verlengen. Andere plastisch chirurgen corrigeren de positie van de tanden op basis van het gulden getal. Het goddelijke gezicht tenslotte dient in een rechthoek met verhoudingen volgens het gulden getal (de gulden snede) te passen.

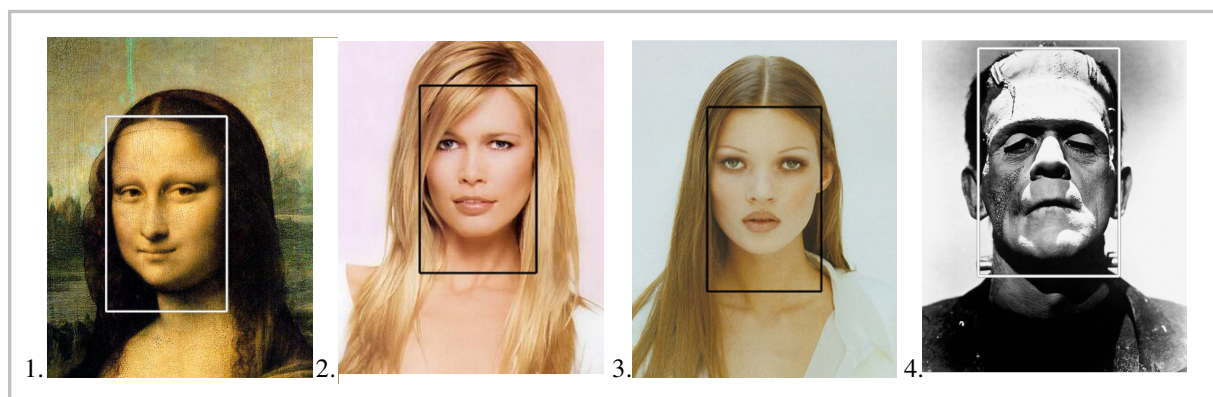
We nemen de proef op de som. Mona Lisa (figuur 1): helaas, haar gezicht zal door de plastisch chirurg iets moeten worden opgerekt.

Claudia Schiffer (figuur 2): ook Claudia zal door de chirurg moeten worden aangepakt.

Kate Moss (figuur 3): hopeloos, hier kan zelfs de beste plastisch chirurg niets mee!

Frankenstein (figuur 4): perfect, niets meer aan doen!

*Th. Raergeur*



Met toestemming overgenomen uit het blad *Product*, september 2005

Verhouding is het belangrijkste onderwerp in de architectuur. Dat was al zo bij de beroemde Romeinse architect Vitruvius (85-20 v. Chr.). Hij was meetkundig goed onderlegd en baseerde alle ontwerpen van tempels op vaste verhoudingen. Hij hanteerde een zekere maat, de zogenaamde “modulus”; die kwam steeds een geheel aantal keren terug in alle afmetingen. Hij ontleende de verhoudingen aan het menselijk lichaam. Opvallend is dat de gulden snede geen speciale rol heeft.

Pas in de negentiende eeuw wordt de gulden snede gepropageerd als ideale verhouding. Adolf Zeising (1810–1876) deed onderzoek naar verhoudingen in de natuur en in de kunst. Hij raakte ervan overtuigd dat de gulden snede fundamenteel is in alle vormen die streven naar schoonheid in de natuur en op het terrein van figuratieve kunst. De meest perfecte realisering hiervan vindt hij in het menselijk lichaam.

Le Corbusier (1887–1965) is een van de bekendste architecten van de twintigste eeuw. Hij werd als Charles-Edouard Jeanneret geboren in Zwitserland, (halverwege de jaren '20 nam hij de Franse nationaliteit aan). 'Le Corbusier' was het pseudoniem waaronder hij schreef in het tijdschrift *Esprit Nouveau*; later werd 'Le Corbusier' als naam zijn handelsmerk. Ook ontwierp Le Corbusier meubels en kunstwerken.



Woning te Weissenhof-Siedling, Stuttgart

**43** Zoek de gulden verhouding in de woning.

Tussen 1940 en 1950 ontwikkelde Le Corbusier *de Modulor*, een maatsysteem, gebaseerd op de gulden snede. Net als Vitruvius neemt hij verhoudingen die ontleend zijn aan het menselijk lichaam. Die verhoudingen past hij bewust in zijn bouwwerken toe, maar als het hem niet goed uitkomt, wijkt hij daarvan af.

- 44 De modulator heeft schalen: de blauwe (rechts) en de rode (links). Uitgangspunt zijn een mannelijke figuur van 1829 mm (tot zijn kruin) en met opgeheven hand van 2261 mm. Daarvan worden de andere maten afgeleid. In beide schalen is de verhouding van twee opeenvolgende maten steeds de gulden verhouding.
- a Ga dat na voor enkele gevallen.

Kies een van de twee reeksen, blauw of rood. Tel in die reeks twee opeenvolgende getallen op.

b Welk getal krijg je dan in diezelfde reeks?

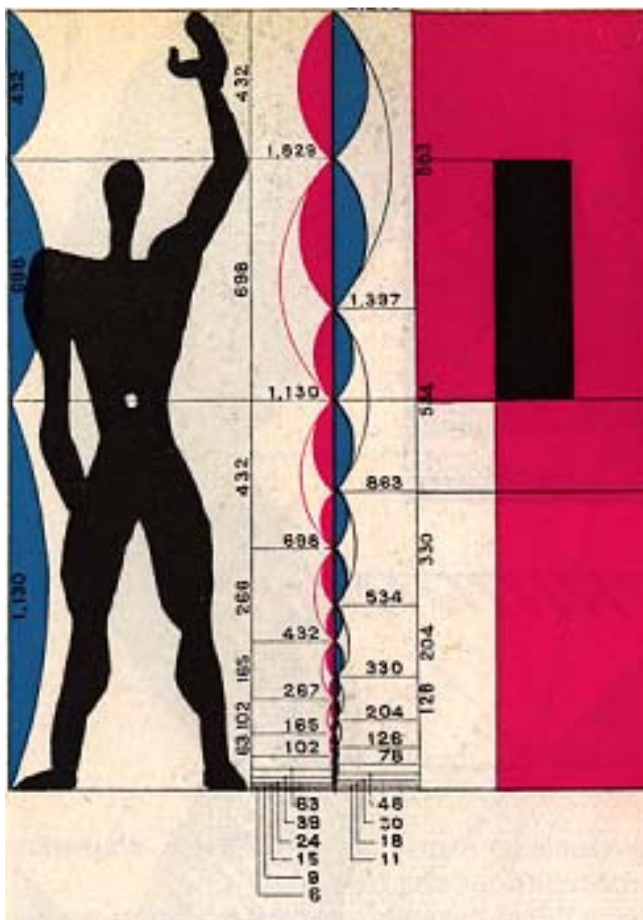
c Controleer of dat op meerdere plaatsen in de reeksen het geval is.

Noem een getal in een van de reeksen:  $a$ .

- d Wat is dan het getal dat daar direct boven staat (gebruik  $\phi$  in je antwoord)?  
En wat is het getal dat daar weer boven staat?

De bewering is dat  $a + \phi a = \phi^2 a$ .

- e Leg uit dat dat klopt.



rood	blauw	
	2261	hand
1829		kruin
	1397	borst
1130		navel
	863	middel
698		bovenbeen
	534	knie
432		
	330	
267		
	204	
165		
	126	
102		
	78	
63		
	48	
39		
	30	
24		
	18	
15		
	11	
9		
6		

## 5 Regelmatige veelhoeken

Vier plaatjes met regelmaat.



Sneeuwkristal



Zevenster

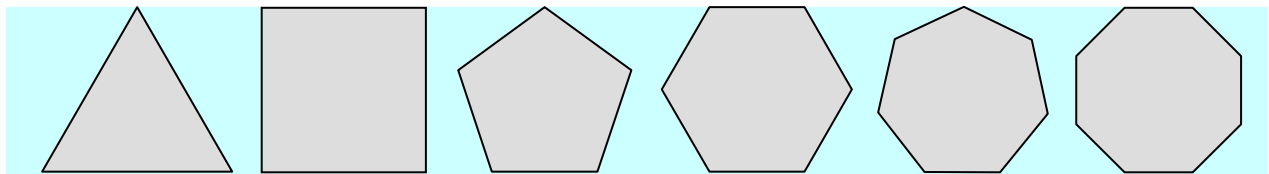


Roosvenster in St Maria del Fiore (Florence)



Luchtfoto piramide van Gizeh

### Van alles over regelmatige veelhoeken



Zes regelmatige veelhoeken zijn op volgorde in een band naast elkaar gezet, met een zijde op de onderkant. De bovenrand wordt beurtelings met een hoekpunt of met een hele zijde geraakt. Je zou kunnen zeggen dat de figuren dezelfde hoogte hebben.

- 45 a Zet de figuren (op het oog) op volgorde van grootte van oppervlakte.

De figuren zijn niet zo gemakkelijk in oppervlakte te vergelijken. Vooral de vijfhoek en zevenhoek zijn lastig.

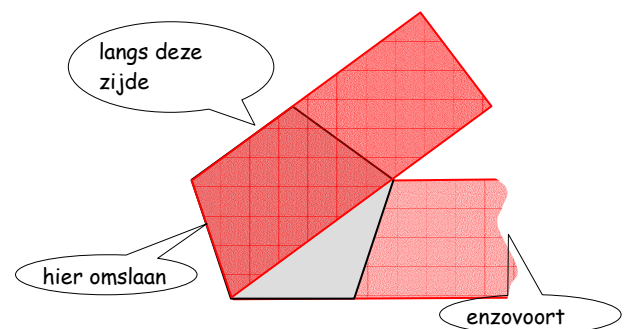
- b Hoe weet je zeker dat de achthoek kleiner is dan het vierkant?

De zeshoek en de driehoek zijn prima te vergelijken. Dat doe je door de zeshoek te verdelen in zes gelijkzijdige driehoeken en de driehoek in dezelfde driehoeken te verdelen.

- c Wat is je conclusie over hun oppervlakten?

- 46 Op het werkblad staat een regelmatige vijfhoek, zevenhoek en negenhoek. Kopieer die op stevig papier. We gaan de vijfhoek inpakken met een reep papier. Knip (of beter snijd) zelf zo'n reep, op de juiste breedte.

- a Leg de reep langs een zijde en sla hem om bij een zijde, zoals hiernaast.  
b Pak zo ook de regelmatige zevenhoek in.  
c En de regelmatige negenhoek.



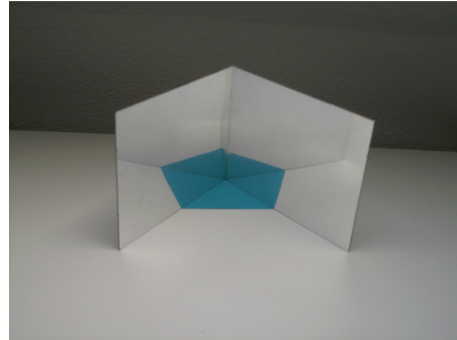
- d** Hoe verloopt het inpakken bij een regelmatige driehoek?

Als je het inpakken bij de een regelmatige achthoek wilt uitvoeren, blijkt dat niet te lukken.

- e** Waarom niet?

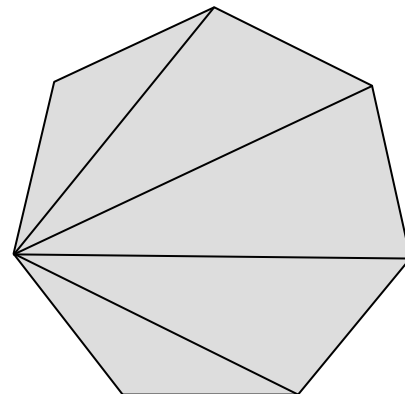
#### 47 Experiment

Plaats twee spiegels verticaal op tafel, zodat ze een hoek vormen. Het is handig als je ze met plakband aan elkaar vastmaakt. Het is de bedoeling dat je de hoek tussen de spiegels kunt variëren. Zet het paar spiegels op een papier, zo dat het stuk tussen de spiegels een gelijkbenige driehoek is. Het stuk wordt gespiegeld, zodat je een veelhoek te zien krijgt. Of het een driehoek, vierkant, vijfhoek, ... wordt, hangt af van de hoek die de spiegels met elkaar maken.



- a** Onder welke hoek moet je de spiegels plaatsen opdat je een vierkant krijgt.  
**b** En bij welke hoek krijg je een regelmatige zevenhoek?

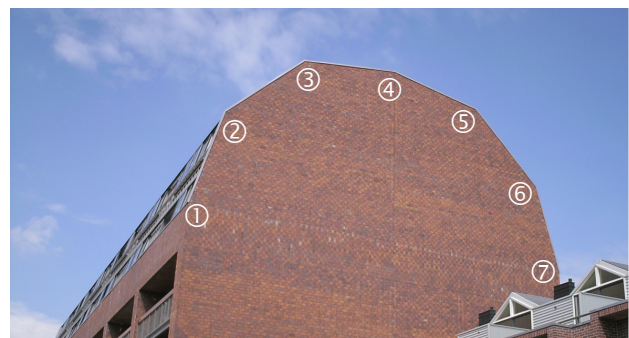
- 48** We gaan berekenen hoe groot de hoeken zijn van een regelmatige zevenhoek. Als je vanuit een van de hoekpunten de diagonalen trekt, wordt de zevenhoek verdeeld in 5 driehoeken. Hun hoeken vormen samen precies de hoeken van de zevenhoek. De som van de hoeken van elke driehoek is  $180^\circ$ .



- a** Hoe groot zijn dus de hoeken van de zevenhoek samen?  
**b** Hoe groot zijn ze elk?

- 49 a** Bereken zo ook hoe groot een hoek is van de vijfhoek, zeshoek en achthoek.  
**b** Geef een formule voor de hoek van een regelmatige  $n$ -hoek.

- 50** Hiernaast staat een foto van de zijgevel van een gebouw met appartementen in Nijmegen. In het bovenste stuk kun je de helft van een regelmatige twaalfhoek herkennen. [Onder de hoekpunten ① en ⑦ loopt de muur in werkelijkheid verticaal; op de foto is dat vertekend.]



Hoe groot is elk van de hoeken?



Een **diagonaal** is een verbindingslijnstuk tussen twee hoekpunten van een veelhoek die geen buren zijn van elkaar. Een driehoek heeft geen diagonalen.

- 51 **a** Hoeveel diagonalen heeft elk van de andere vijf regelmatige veelhoeken van opgave 1?  
**b** Geef een formule voor het aantal diagonalen van een regelmatige  $n$ -hoek.

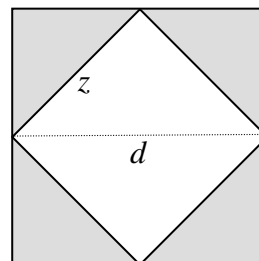
De diagonalen van een vierkant zijn even lang. De diagonalen van de vijfhoek zijn ook even lang.

- c** Hoe zit dat bij de andere figuren?  
Hoeveel verschillende lengten zijn er? Hoeveel van elke lengte?  
**d** Beantwoord vraag b ook voor een regelmatige twintighoek en voor een regelmatige eenentwintighoek.

### Het vierkant

- 52 Op een grijs vierkant is een wit, kleiner vierkant gelegd. De hoekpunten van het witte vierkant zijn de middens van de zijden van het grijze vierkant.

- a** Leg uit dat de oppervlakte van het witte vierkant de helft is van de oppervlakte van het grijze vierkant.



Noem de zijde van het witte vierkant  $z$  en de diagonaal van het witte vierkant  $d$ .

- b** Leg uit dat geldt:  $d^2 = 2z^2$ .

Dus  $(\frac{d}{z})^2 = 2$ , dus  $\frac{d}{z} = \sqrt{2}$ .

Een regelmatige vierhoek is een vierkant. Alle vierkanten zijn gelijkvormig.  
Er is een vaste verhouding tussen een diagonaal en een zijde van een vierkant.

### Stelling

Van elk vierkant is een diagonaal  $\sqrt{2}$  keer zo lang als een zijde.

Het kwadraat van  $\sqrt{2}$  exact 2 is.

Een rekenmachine levert  $\sqrt{2} \approx 1,4142\dots$

Dit is in overeenstemming met wat je in paragraaf 2 hebt geleerd: het hele vierkant heeft een 2 keer zo grote oppervlakte als het witte vierkant en dus een  $\sqrt{2}$  keer zo grote zijde.

## De regelmatige zeshoek

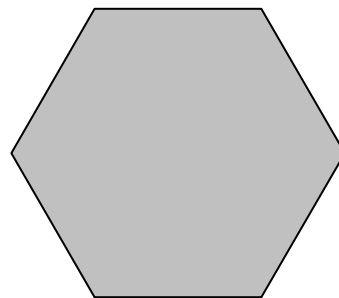
Nu is de regelmatige zeshoek aan de beurt, bekend van honingraten, kippengaas en basaltblokken op een zeevering.



- 53 a** Verdeel op het werkblad een regelmatige zeshoek in drie ruiten.

Een zeshoek heeft drie lange diagonalen; die gaan door het middelpunt.

- b** Hoeveel keer zolang zijn die als de zijde van de zeshoek?



Er zijn zes diagonalen die niet door het middelpunt gaan. Als je die allemaal trekt, krijg je een bekende figuur.

- c** Welke?

- 54** In 1958 werd in Brussel ter gelegenheid van de wereldtentoonstelling het Atomium gebouwd. Het bestaat uit negen bollen, die verbonden zijn door buizen. Op de foto is de omtrek van het Atomium een zeshoek.

Wat heeft het Atomium met een kubus te maken?



## De regelmatige vijfhoek

Tussen de regelmatige vierhoek en de regelmatige zeshoek zit de regelmatige vijfhoek. Die brengt meer problemen met zich mee.

Het grootste gebouw ter wereld is het Pentagon in Washington, waarin het Amerikaanse ministerie van defensie is gevestigd.

Het gebouw is tijdens de tweede wereldoorlog gebouwd en in 1998 gerenoveerd.

- Oppervlakte van het terrein binnen de buitenste muren: 97.000 m<sup>2</sup>
- Oppervlakte van het open gebied in het midden van het gebouw: 20.000 m<sup>2</sup>
- Parkeerplaatsen: 8.770 voertuigen
- Vloeroppervlak: 620.000 m<sup>2</sup>
- Inhoud: 2.000.000 m<sup>3</sup>
- Lengte van de buitengevel: 261 m
- Hoogte: 24 m
- Aantal verdiepingen: 7 (5 bovengronds, 2 ondergronds)
- Totale lengte van de gangen: 28 km



Het gebouw dankt zijn naam aan zijn vorm: een regelmatige vijfhoek (penta = vijf, gonus = hoek).

- 55** Middenin is een open ruimte van 20.000 m<sup>2</sup>, terwijl de hele vijfhoek een oppervlakte heeft van 97.000 m<sup>2</sup>.

Het gebouw is opgedeeld in vijf rechthoeken en vijf vliegers.

Een regelmatige vijfhoek heeft hoeken van 108°.

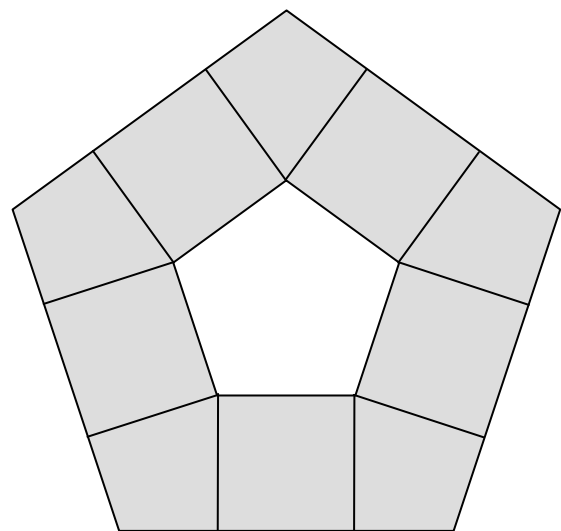
De vliegers hebben dus een hoek van 108°.

**a** Hoe groot zijn de andere hoeken?

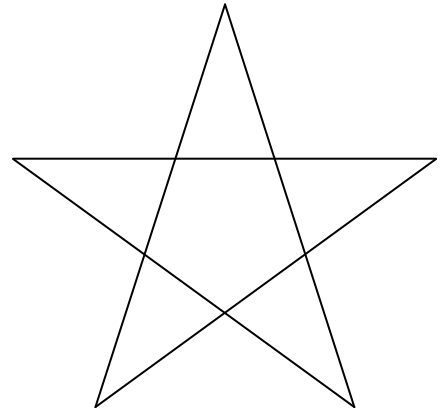
De buitenomtrek is een uitvergroting van de binnenomtrek.

**b** Met welke factor? Klopt dat met de gegeven oppervlaktes?

**c** Klopt de vloeroppervlakte met de inhoud?



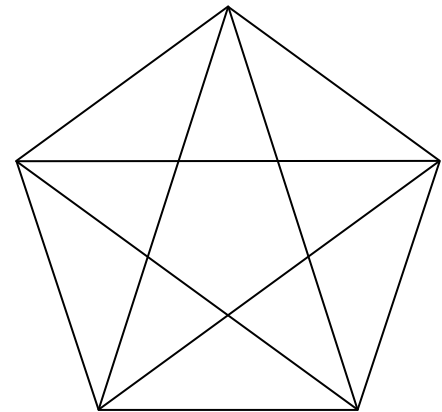
De vijf diagonalen van een regelmatige vijfhoek zijn allemaal even lang. Samen vormen ze het zogenaamde *pentagram*. Het is een belangrijk symbool in occulte zaken: het wordt geassocieerd met mysterie en magie. Al vele eeuwen bestaat de overtuiging, dat het pentagram een krachtige bescherming biedt tegen duivelse slechtheid en demonen, een veiligheidssymbool dus, en het werd soms als amulet gedragen om een gelukkige en veilige thuiskomst te bevorderen. Het wordt ook wel *pentalpha* genoemd, omdat er vijf letters A in zijn te herkennen.



- 56 a Hoeveel verschillende typen driehoeken kun je in de vijfhoek met pentagram ontdekken? Hoeveel van elk type?

Er komen maar drie verschillende hoeken voor in de figuur.

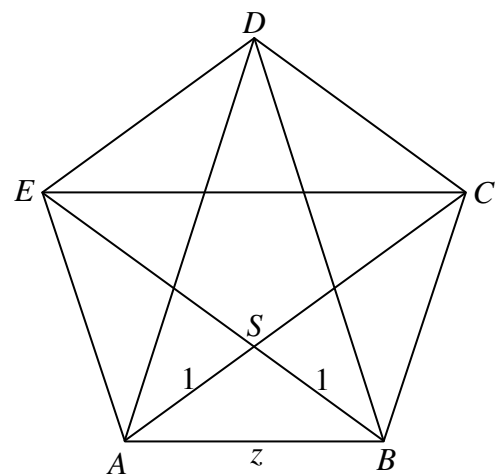
- b Hoe groot zijn die?
- c Ga dat een van de typen driehoeken in drie groottes voorkomt en het andere type driehoek in twee groottes.



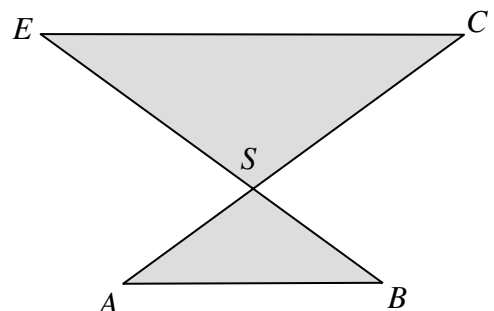
Voor de zijden van het pentagram nemen we 1. Dus  $AS = BS = 1$ .

De zijde van de vijfhoek noemen we  $z$ .

- d Overtuig je ervan dat de diagonalen dan  $z+1$  zijn.



- 57 We nemen de driehoeken  $ABS$  en  $CDS$  apart. Die zijn gelijkvormig.
- a Schrijf bij de zes zijden van de driehoeken hoe lang ze zijn (uitgedrukt in  $z$ ).
- b Meet hoeveel keer zo lang (ongeveer)  $AB$  als  $AS$  is. Dat getal is dus  $z$ .
- c Leid uit de figuur af dat  $z+1 = z^2$ .



- d** Ga na dat het resultaat van je meting in onderdeel b ongeveer aan deze vergelijking voldoet.

De precieze waarde van  $z$  is niet zo gemakkelijk te vinden. Daarvoor moeten we de kwadratische vergelijking  $z+1 = z^2$  oplossen. En dat kan met de abc-formule.

- e** Ga na dat je als oplossingen krijgt:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \text{ en } z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$

- f** Welk van de twee is de juiste waarde van  $z$ ?

- g** Ga met je rekenmachine na dat  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$  ongeveer gelijk is aan jouw meetresultaat in onderdeel b.

Het getal  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$  speelt een grote rol bij de regelmatige vijfhoek en het pentagram. Het is het getal  $\phi$  dat je in hoofdstuk 4 hebt ontmoet.

$\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \approx 1,6180\dots$  wordt het **gouden getal** genoemd.

Er geldt:  $\phi^2 = \phi + 1$ . (Waarom eigenlijk?)

- 58**  $\phi$  is een bijzonder getal. Een van de eigenschappen van  $\phi$  is dat  $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ .

- a** Ga dat na op je rekenmachine.

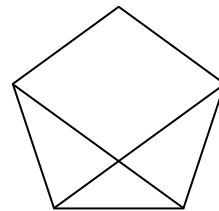
- b** Hoe volgt de eigenschap uit  $\phi^2 = \phi + 1$ ?

### Stelling

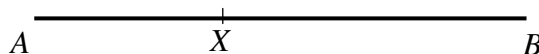
Een diagonaal van een regelmatige vijfhoek wordt door een andere diagonaal gesneden. De twee stukken verhouden zich als  $1 : \phi$ . Met andere woorden:

De diagonalen van een regelmatige vijfhoek verdelen elkaar volgens de gulden snede.

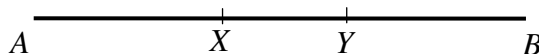
- 59** Ga de juistheid van deze stelling na.



- 60** We beginnen met een lijnstuk  $AB$ :

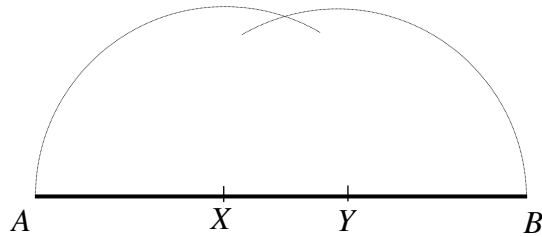


Als je een punt  $X$  kent dat lijnstuk  $AB$  verdeelt volgens de gulden snede, ken je automatisch nog een tweede punt  $Y$  dat  $AB$  verdeelt volgens de gulden snede; namelijk het spiegelbeeld van  $X$  in het midden van  $AB$ .



- a** Stel dat  $AX = 1$ . Hoe lang is dan  $BX$ ? En hoe lang  $XY$ ? (Uitgedrukt in  $\phi$ ).
- b** Let nu op lijnstuk  $AY$ . Ga met je rekenmachine na dat  $AX$   $\phi$  keer zo lang is als  $XY$ .
- c** Kun je dat ook laten zien zonder je rekenmachine te gebruiken?

- 61** Stel we kennen op een lijnstuk de punten die het verdelen volgens de gulden snede. Dan kunnen we het pentagram construeren, zonder een lijnstuk of een hoek op te meten.



Trek de cirkel met *X* als middelpunt, die door *A* gaat. En net zo de cirkel met *Y* als middelpunt die door *B* gaat,

**a** Leg uit wat je met die cirkels opschieft?

**b** Maak op het werkblad het pentagon af. Dus zonder lijnstukken of hoeken te meten.