Handleiding Verhoudingen

Inhoudsopgave

Inleiding

Het examenprogramma voor vwo wiskunde C is gericht op de leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij en bereidt voor op de universitaire studies in de sociale, culturele, juridische en taal- en maatschappijwetenschappen. Inhoudelijke zwaartepunten van het programma zijn algemene wiskundige en statistische vorming, in samenhang met de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij.

Het leerstofpakket *Verhoudingen* maakt deel uit van het domein G: Vorm en ruimte. Het conceptexamenprogramma 2014 voor vwo wiskunde C omschrijft dit domein (onder "gedetailleerde eindtermen") als volgt:

De kandidaat kan in profielspecifieke toepassingen van een ruimtelijk object aanzichten en perspectieftekeningen maken, er berekeningen aan uitvoeren en conclusies trekken over vorm en oppervlakte van zo'n object.

De kandidaat kan

1. *meetkundige aspecten, zoals vorm, gelijkvormigheid en symmetrie herkennen in kunstwerken.*
2. *aanzichten, één- en tweepuntsperspectief-tekeningen maken van eenvoudige ruimtefiguren (kubus, balk, cilinder, piramide)*
3. *vanuit een perspectieftekening en/of gegeven aanzichten een meetkundige figuur beschrijven.*
4. *op basis van perspectiefeigenschappen beoordelen of een afbeelding een mogelijke figuur weergeeft.*
5. *bij meetkundige voorwerpen een zinvolle schatting maken van de oppervlakte.*
6. *begrippen en methoden uit dit domein hanteren in kunstzinnige en kunsthistorische context.*

Daarnaast wordt in het leerstofpakket *Verhoudingen* aandacht besteed aan onderdelen uit de subdomeinen algemene vaardigheden (A1), profielspecifieke vaardigheden (A2) en wiskundige vaardigheden (A3) zoals die in het conceptexamenprogramma 2014 zijn vermeld. (Zie hieronder)

Subdomein A1: Algemene vaardigheden

De eindterm in dit subdomein heeft betrekking op vaardigheden die van belang zijn voor alle examenvakken, de wiskunde in het bijzonder.

1 De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gericht informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.

De kandidaat kan:

1.1 doelgericht informatie zoeken, beoordelen, selecteren en verwerken.
1.2 adequaat schriftelijk, mondeling en digitaal communiceren over onderwerpen uit de wiskunde.
1.3 bij het verwerven van vakkennis en vakvaardigheden reflecteren op eigen belangstelling, motivatie en leerproces.
1.4 toepassingen en effecten van wiskunde in het dagelijks leven en in verschillende vervolgopleidingen en beroepssituaties herkennen en benoemen.

Subdomein A2: Profielspecifieke vaardigheden

De eindterm in dit subdomein heeft betrekking op vaardigheden die van belang zijn voor de profielvakken waarin de kandidaat examen doet, de wiskunde in het bijzonder.

2 De kandidaat herkent de betekenis van wiskunde in maatschappij, cultuur en geschiedenis en kan deze in concrete situaties beschrijven.

De kandidaat:

2.1 kan ideeën over en gebruik van wiskunde in bijvoorbeeld beeldende kunst, architectuur, dans en muziek herkennen en beschrijven.
2.2 kan van een wiskundig onderwerp aangeven hoe dit zich heeft ontwikkeld in een cultuurhistorische context.
2.3 kent enkele sleutelmomenten uit de geschiedenis van de wiskunde.
2.4 kan van een wiskundige modelsituatie de beperkingen en de kracht aangeven.

Subdomein A3: Wiskundige vaardigheden

De eindterm in dit subdomein heeft betrekking op vaardigheden die specifiek van belang zijn voor het programma wiskunde vwo C.

3 De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan de bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT-hulpmiddelen.

De kandidaat

3.1 beheerst de regels van de rekenkunde en algebra zonder ICT-middelen.
3.2 kan waar nodig ICT-middelen inzetten om omvangrijke of rekenintensieve problemen aan te pakken.
3.3 kan de correctheid van redeneringen verifiëren.
3.4 heeft inzicht in wiskundige notaties en formules en kan daarmee kwalitatief redeneren.
3.5 kan een oplossingstrategie kiezen, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op wiskundige juistheid.

Voor het domein Vorm en ruimte is in totaal 40 slu gereserveerd. Het leerstofpakket *Perspectief* neemt daarvan ongeveer de helft. De andere helft wordt gebruikt voor het leerstofpakket *Verhoudingen*. Dit betekent dat dit onderwerp ongeveer in 12 lessen (van 50 minuten) door de leerlingen doorgewerkt kan worden. Na het doorwerken van dit leerstofpakket kan de kandidaat:

1. verhoudingen in toegepaste situaties herkennen en gebruiken.
2. rekenen met verhoudingen.
3. gelijkvormigheid van rechthoeken in toegepaste situaties herkennen en gebruiken, bijvoorbeeld bij papierformaten en de gulden rechthoek, ook vanuit een historisch, kunstzinnig en maatschappelijk perspectief.
4. maat-verhoudingssystemen hanteren, in het bijzonder die welke gebaseerd zijn op de gulden snede, ook in een historisch en kunstzinnig perspectief.
5. rekenen, redeneren en tellen bij regelmatige veelhoeken.
6. het effect van een schaalverandering op de oppervlakte en inhoud van figuren en lichamen schatten en berekenen.

Het domein Vorm en ruimte maakt deel uit van het schoolexamen en laat derhalve toe om toetsing passend bij het onderwerp en bij de eigen mogelijkheden vorm te geven. Zo past een traditionele toets, maar evenzo een presentatie of werkstuk. In de hoofdstukken met afsluitende opdrachten en extra opgaven in deze handleiding vindt u suggesties voor verdere verwerking en uitbreiding van de opgedane kennis in dit pakket.

Wat kunt u in deze handleiding verder vinden?

- suggesties voor een verdeling van de leerstof in leseenheden.
- lessuggesties en antwoorden van de opdrachten.
- afsluitende opdrachten met antwoorden
- extra opgaven met antwoorden
- werkbladen

In de cursus 2008-2009 is een eerste versie van dit pakketje uitgevoerd met leerlingen van een 4 VWO AC groep van ISG-Arcus in Lelystad en met een 4 VWO C groep van het Anna van Rijn College in Nieuwegein (locatie Albatros). Beide groepen hadden drie lesuren per week. De begeleidende docenten waren respectievelijk Cees Garst en Nicolette van de Kuilen. De ideeën en opmerkingen op basis van deze ervaringen zijn in deze handleiding opgenomen.

Ervaringen, verbeteringen en andere suggesties zijn welkom en te sturen naar c.garst@isg-arcus.nl

Verdeling van de leerstof

Les (45-50 min)	Onderwerp
1	Hoofdstuk 1: Vraag 1 t/m 7
2	Hoofdstuk 2: Vraag 8 t/m 14
3	Hoofdstuk 3: Vraag 15 t/m 22
4	Practicum: Verhoudingen van rechthoeken Hoofdstuk 3: Vraag 23 t/m 25
5	Practicum: Gelijkvormige rechthoeken en spiralen Hoofdstuk 3: Vraag 26 t/m 33
6	Practicum: A-formaten Hoofdstuk 3: Vraag 34 t/m 37
7	Practicum: Gulden rechthoeken Hoofdstuk 4: Vraag 38 t/m 44
8	Practicum: Regelmatige veelhoeken Hoofdstuk 5: Vraag 45 t/m 52
9	Hoofdstuk 5: Vraag 53 t/m 58
10	Afsluitende opdrachten
11	Afsluitende opdrachten
12	Afsluitende opdrachten

Hoofdstuk 1: Verhoudingen

In het eerste hoofdstuk komt "verhouding" aan de orde als uitdrukking in de Nederlandse taal, in de betekenis van 3:4 en in relatie tot breuken. Als voorbereiding op de hoofdstukken die volgen, geeft dit hoofdstuk de leerlingen een begrippenkader, zodat ze weten wat er bedoeld wordt als in het vervolg gesproken wordt over zijden die zich verhouden als "3 staat tot 4".

In opgave 4 komt o.a. de verhouding 2 : 4 : 6 : 8 : 10 voor. Het was voor een aantal leerlingen niet direct duidelijk wat dit betekent. Als bijvoorbeeld drie hoeveelheden A, B en C zich verhouden als 2 : 4 : 6, en als hoeveelheid A is $2x$, dan is hoeveelheid B $4x$ en hoeveelheid C $6x$.

In het tweede deel van hoofdstuk 1, waar het verband met breuken wordt gelegd, is het goed te benadrukken dat *hoeveelheid A : hoeveelheid B = 3 : 11* betekent dat hoeveelheid A $\frac{3}{11}$ keer zo groot is als hoeveelheid B. Er zijn leerlingen die zich afvragen of dan 2 : 4 : 6 geschreven mag worden als $\dfrac{2}{\frac{4}{6}}$ of $\dfrac{\frac{2}{4}}{6}$.

In opgave 5 bestaat de mogelijkheid dat leerlingen gaan meten in plaats van de oppervlakte (of lengte van een zijde) van het kleinste vierkantje als eenheid te nemen.

Werkvorm

De vragen nodigen uit tot discussie. Leerlingen grijpen daarbij terug op de basisschoolkennis. Ook emoties rond breuken komen naar boven (in de hier aangeboden vorm zeker niet altijd negatief). Vanwege de dialoog en begripsvorming is het samenwerken in groepen een geschikte werkvorm gebleken.

Tijdsinvestering

Eén lesuur bleek voldoende om de vragen van hoofdstuk 1 door te werken. Vanwege de aard van de vragen kunnen vraag 8 t/m 11 ook goed individueel zelfstandig buiten de les gemaakt worden.

Antwoorden

In deze handleiding zijn bij een aantal vragen de antwoorden van leerlingen opgenomen. Deze antwoorden staan met een ander lettertype in een "kladblaadje" bij de vraag vermeld.

Vraag 1

- *Een hazewind en een tekkel zijn heel anders gebouwd. De grootte van de honden is erg verschillend. Dat de grootte (of inhoud van de dieren) niet hetzelfde is.*
- *Als je de armen van apen zijn langer dan van mensen. Dat de armen in vergelijking met hun lichaam langer zijn dan bij mensen.*
- *Vergeleken met het totaal aantal hoogleraren zijn er weinig vrouwelijke. De vrouwen zijn in de minderheid.*
- *Belangrijk is hoe goed een product is vergeleken met hoe duur het is. Dat het waard is wat je verwacht.*

Vraag 2

- *Als er 3 meisjes zijn , dan zijn er 4 jongens. Of als er 6 meisjes zijn, zijn er 8 jongens.*
- *Dat er 1 kg cement, 2 kg zand en 3 kg grind nodig is voor goed beton. Als je goed beton wilt hebben doe je 2 keer zoveel zand en 3 keer zoveel grind als cement.*
- *Er is ongeveer 2 keer zoveel water als land.*

Vraag 3

a) 2 : 3
b) 2 : 3 ofwel "2 staat tot 3"
c) 1,5 keer zoveel zwarte als witte kralen. $\frac{2}{3}$ keer het aantal zwarte kralen.

Precies geteld: 36 : 24 dus 12 zwarte meer, oftewel 1,5 keer meer zwarte.
$\frac{2}{3}$ *(witte kralen) x3 (zwarte kralen) = 2 (witte kralen)*
$\frac{3}{2}$ *(zwarte kralen) x 2 (witte kralen) = 3 (zwarte kralen)*

Vraag 4

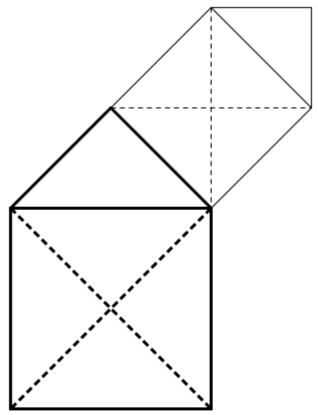
a) 3 : 7
b) 1 : 6
c) 1 : 2 : 3 : 4 : 5
d) 1 : 3 : 9 : 27
e) 7 : 10
f) 3 : 2

Vraag 5

a) 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11
b) 4 : 8 : 12 : 16 : 20 : 24 = 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6

Vraag 6

a) De verhouding is 1 : 4
b) Van elk "huisje" is het dak het $\frac{1}{5}$ deel van het hele huisje. Dit geldt voor elke huisje. Dus 20 % van de Pythagorasboom is grijs.



Vraag 7

a) 3 : 8 (*Leerlingen die bij vraag a 3 : 12 en 8 : 12 als antwoord hebben, vergelijken de grijze oppervlaktes t.o.v. de hele rechthoek (zo ook bij de andere plaatjes)*)

b) $\frac{3}{8}$ deel

c) 3 : 4   3 : 6   2 : 3
$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$

Hoofdstuk 2: Oppervlakte en inhoud

In dit hoofdstuk gaat het om de gevolgen van een vergroting van de afmetingen voor de oppervlakte en inhoud. Dit is in de onderbouw ook al aan de orde gekomen, al herkennen de meeste leerlingen dit niet.
De opdrachten doen wat meer een beroep op rekenen en dat is voor een aantal leerlingen een aangename afwisseling t.o.v. het vorige hoofdstuk. Toch levert een vraag als 9 discussie op, met het gevaar dat leerlingen er onnodig lang bij blijven hangen. Tegelijkertijd biedt deze vraag de mogelijkheid in te gaan op aspecten van het metrieke stelsel en hoe het ook weer zit met vierkante meters, etc. De opdrachten 15 t/m 17 dagen de leerlingen uit na te denken over de realiteitswaarde van het antwoord: kan het wel?
Voor opgaven 20 t/m 22 is voor een aardrijkskundige context gekozen. De grootte van een land wordt afgebeeld op een manier waarbij de oppervlakte evenredig is aan het af te beelden aspect.

Werkvorm
De opdrachten uit dit hoofdstuk zijn voor de leerlingen goed zelfstandig, binnen de les, of als huiswerk te maken. Opgaven 15, 16 en 17 zijn goed als instap te gebruiken.

Tijdsinvestering
Dit hoofdstuk vraagt ongeveer twee á drie lesuren. De eerste les voor opgave 8 t/m 14. Daarna een les voor opgave 15 t/m 22. Met het nabespreken van opdrachten kan moeiteloos nog een lesuur zinvol gevuld worden.

Antwoorden

Vraag 8

a) Een bloemlezing van de antwoorden van leerlingen:

> - *Dat de inhoud van Mars half zo groot is als de inhoud van de aarde.*
> - *Dat de aarde vergeleken met Mars heel groot is. Ik denk al gauw aan de oppervlakte.*
> - *Dat Mars een aarde en een halve aarde is*

b) Respectievelijk: oppervlakte, inhoud en lengte.

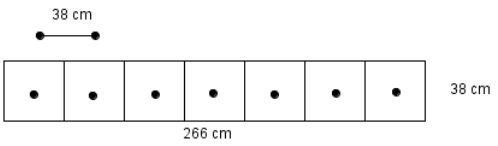
c) Diameter: aarde is ongeveer $\frac{12.756}{3476} \approx 3,7$ keer zo groot

Oppervlakte: aarde is ongeveer $\frac{511.186.000}{37.959.000} \approx 13,5$ keer zo groot

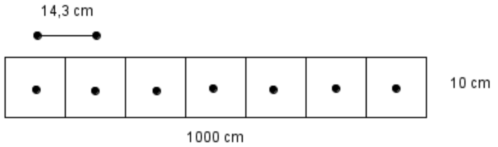
Inhoud: aarde is ongeveer $\frac{1.086.781.300.000}{21.990.643.000} \approx 49,4$ keer zo groot

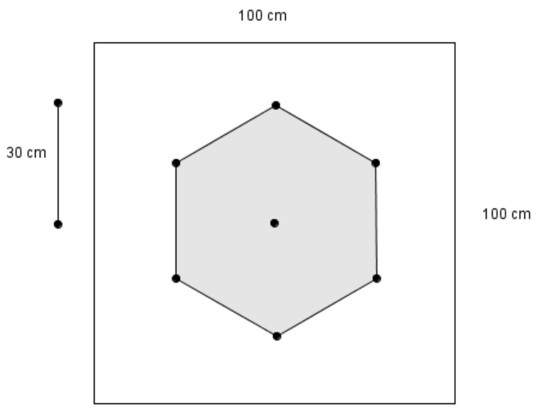
Vraag 9

a) Per plantje $\frac{1}{7}m^2 \approx 0{,}14m^2$, ofwel $14dm^2$. Dit kan een vierkant zijn met een zijde van ongeveer $38cm$. De plantjes staan dan 38 cm van elkaar, zoals hieronder getekend.



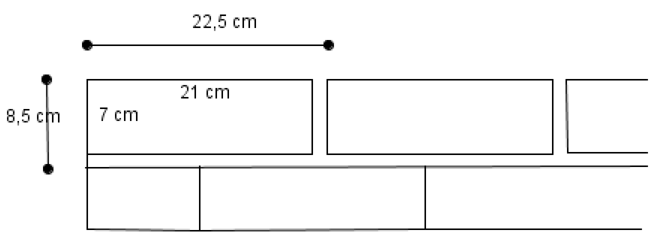
Een vierkante meter hoeft natuurlijk niet vierkant te zijn. Dan kan het ook op de volgende manieren:





b) Uit 1 m^2 kun je $\dfrac{10000}{15 \cdot 15} = 44{,}4$ scheppen halen. Dus $\dfrac{400}{44{,}4} \approx 9$ regenwormen per schep.

c) Voor één steen, inclusief voeg, heb je 22,5 cm in lengterichting nodig en 8,5 cm in hoogterichting.
Dus één steen neemt een oppervlakte van 191,25 cm^2 in.
Dus totaal ongeveer $\dfrac{10000}{191{,}25} \approx 52{,}3$ ofwel 52 of 53 stenen per m^2.



d) Alle afmetingen zijn gehalveerd. Je hebt dus 4 keer zoveel stenen nodig per m^2, dus ongeveer 212 stenen.

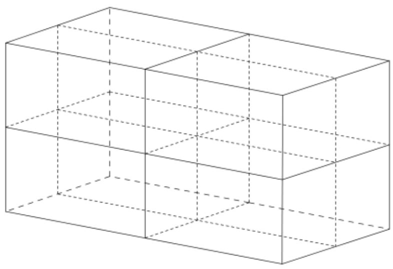
Vraag 10

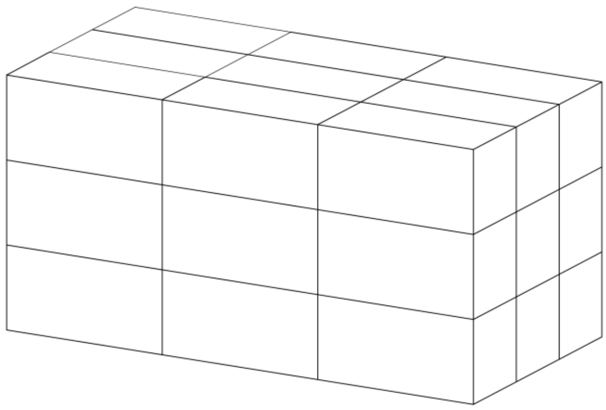
a) Ja, elke zijde is met een gelijke factor vermenigvuldigd.

b)

	kleinste	middelste	grootste
Totale lengte lijmnaden	10 dm	20 dm	30 dm
Totale oppervlakte glas	8 dm^2	32 dm^2	72 dm^2
inhoud	2 dm^3	16 dm^3	54 dm^3

c) De kleinste past 8 keer in de middelste (zie hieronder) en 27 keer in de grootste.





Vraag 11

a) Rechtsboven: horizontaal 33%
Linksonder: verticaal 33%
Rechtsonder: zowel horizontaal als verticaal 33%

b) De oppervlakte is respectievelijk het $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{9}$ deel van het oorspronkelijke plaatje.

c) Lengte en breedte worden met factor 0,6 vermenigvuldigd, dus de oppervlakte met factor $0{,}6^2=0{,}36$. Dus 64% verkleind t.o.v. het origineel.

Vraag 12

a) De lengte van de lichaamsdiagonalen verhouden zich ook als 1 : 2 : 3
b) De oppervlakten verhouden zich als 6 : 24 : 54 = 1 : 4 : 9
c) De inhouden verhouden zich als 1 : 8 : 27

Vraag 13

a) Van links naar rechts : Fig 1: 25 fig 2: 4 fig 3: 16 fig 4: 9.
b) In twee richtingen wordt de lengte met dezelfde factor *f* vermenigvuldigd. De oppervlakte wordt dus met f^2 vergroot.

Vraag 14

De inhoud van de grote doos is $1,5^3 = 3,375$ keer de kleine.
Als de kleine € 5,- kost, moet de grote naar verhouding € 16,88 kosten. In de kleine verpakking is het wasmiddel naar verhouding het duurst.

Vraag 15

a) Lengtevergrotingsfactor is $\frac{1400}{7} = 200$, dus de inhoudsvergrotingsfactor is 200^3
Het gewicht van de reuzenwasknijper wordt $6 \times 200^3 = 48.000.000 gram = 48000 kg$
b) De veer weegt $200^3 \cdot 2,8 gram = 22.400.000 gram = 22400 kg$

Vraag 16

De lengtevergrotingsfactor is $\frac{71}{10} = 7,1$, dus de inhoudsvergrotingsfactor is $7,1^3 \approx 358$
De grote hamburger weegt ongeveer $358 \cdot 135 gram = 48318 gram = 48 kg$

Vraag 17

a) Lengtevergrotingsfactor is $\frac{1}{300}$, dus de poten worden $\frac{1}{300} \times 26m = 0,0867m = 87mm$ breed.
b) De oppervlaktevergrotingsfactor is $\left(\frac{1}{300}\right)^2$, dus de oppervlakte van het grondvlak wordt $\left(\frac{1}{300}\right)^2 \cdot 16000m^2 = 0,1778m^2 = 1778cm^2$
c) De inhoudsvergrotingsfactor is $\left(\frac{1}{300}\right)^3$. Het gewicht wordt $\left(\frac{1}{300}\right)^3 \cdot 7.000.000kg \approx 0,259kg$
d) Het restaurant komt in de maquette op een hoogte van $\frac{1}{300} \cdot 57m = 0,19m = 19cm$ en de oppervlakte is $\left(\frac{1}{300}\right)^2 \cdot 5000m^2 \approx 0,056m^2 \approx 556cm^2$

Vraag 18

De oppervlaktevergrotingsfactor van A5 naar A4 is 2, de lengtevergrotingsfactor is dan $\sqrt{2}$.
Dit volgt uit stelling 1.

Vraag 19

a) De oppervlakte is dan 100 keer zo groot, dus $\frac{100}{4}\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \approx 43,3$

b) De oppervlakte is dan $\frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot z^2 \approx 0,433z^2$

c) De oppervlakte is dan $10^2 \cdot \pi = 100\pi \approx 314,2$

d) De oppervlakte is dan $r^2 \cdot \pi$

e) De oppervlakte van de ellips is dan $2 \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi$

f) Oppervlakte ellips is dan $a \cdot b \cdot \pi$

Vraag 20

a) Noordelijk gelegen landen zoals: Canada, Groenland.

b) China en India.

c) De weergegeven oppervlakte van een land is gerelateerd aan het aantal inwoners. Als er 100 inwoners wonen op een vierkant gebied van 10 bij 10 km, dan is de bevolkingsdichtheid $\frac{100 inw}{100 km^2} = 1$ inwoner per km^2.
Als het aantal inwoners 4 keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte op de tekening ook 4 keer zo groot, dus 400 km^2. De bevolkingsdichtheid blijft $\frac{400 inw}{400 km^2} = 1$ inwoner/km^2

d) De verhouding van de militaire uitgaven van de VS t.o.v. Japan is naar schatting 8 : 1 (Alaska meegerekend)

e) Spanje.

Vraag 21

De diameter van de cirkel van Schiphol is ongeveer 1,4 cm. Van Dortmund is die ongeveer 0,3 cm. De diameter van Schiphol is ongeveer $4\frac{2}{3}$ keer zo groot. De oppervlakte van de cirkel van Schiphol is dan ongeveer 21,8 keer zo groot als die van Dortmund.
In dat geval zou Schiphol $21,8 \times 2,2 miljoen \approx 48 miljoen$ passagiers moeten vervoeren. De cirkels zijn ongeveer in verhouding getekend.

Vraag 22

a) De oppervlakte van Nederland is op de tekening ongeveer $1,9^2 = 3,61 cm^2$. De oppervlakte van Duitsland is ongeveer $4,1^2 = 16,81 cm^2$. Het BNP van Nederland is ongeveer $\frac{3,61}{16,81} \cdot 2500 miljard \approx 537 miljard$ dollar.

b) Zwitserland

c) De lengtevergrotingsfactor is ongeveer $\frac{3,7cm}{0,6cm} \approx 6,2$, dus de oppervlaktevergrotingsfactor is ongeveer $6,2^2 = 38,4$. Dus het BNP van Frankrijk is ongeveer 38 keer zo groot.

d) Het aantal inwoners van Luxemburg is veel kleiner in vergelijking met Frankrijk. Het bedrag dat per hoofd van de bevolking verdiend wordt is in Luxemburg hoger dan in Frankrijk.

Hoofdstuk 3: Rechthoeken

In dit hoofdstuk worden eigenschappen van gelijkvormige rechthoeken verkend. Allereerst wordt gekeken naar de verhouding tussen de zijden. In de paragraaf daarop volgend wordt vastgelegd wanneer twee rechthoeken gelijkvormig zijn. In de paragraaf *spiralen* wordt een patroon van gelijkvormige rechthoeken gemaakt, waardoor de diagonalen een spiraal vormen met hoeken van 90^o. Ten slotte wordt gekeken naar de A-formaten, als gelijkvormige rechthoeken met bijzondere eigenschappen.

Werkvorm

Elk van de paragrafen is in te leiden met een klassenactiviteit. Bij de antwoorden hieronder zijn deze activiteiten per paragraaf kort beschreven. Uit ervaring is gebleken dat deze introducties nodig zijn om de opdrachten die in het boek volgen goed tot hun recht te laten komen. Door alleen de opdrachten uit het boek te maken, haalt de leerling zelfstandig niet zomaar de essentie naar boven. Voor veel leerlingen zijn het “allemaal rechthoeken”. Dat je met die rechthoeken patronen kunt leggen en dat de A-formaten daarbij bijzondere eigenschappen hebben, is iets dat deze leerlingen ook moeten zien en ervaren, om zich er vervolgens over te kunnen verwonderen.

Tijdsinvestering

De klassikale introductie op de paragraaf *De verhouding tussen de zijden* en de vragen 23 t/m 25 zijn in een lesuur (plus huiswerk) uit te voeren. Dit geldt ook voor de paragrafen *Gelijkvormige rechthoeken* en *Spiralen* .
Het is goed om de paragraaf over *A-formaten* in een aparte les aan de orde te stellen om de bijzondere eigenschappen hiervan te benadrukken. Ook deze les kent een klassikale activiteit.

Klassikale activiteiten en antwoorden

De verhouding tussen de zijden

Als klassikale inleiding op deze paragraaf kunnen onderstaande vragen en activiteiten dienen. De leerlingen moeten verhoudingen van diverse objecten meten. Niet al die objecten zijn op school voorhanden, en dus moet er soms vanuit eigen ervaring geschat worden wat de afmetingen zijn van, bijvoorbeeld, een spandoek.

A:
Rechthoeken zijn verschillend van vorm. Ze variëren van vierkant tot zeer langwerpig. We letten op de verhouding van de zijden. Bij een vierkant is die verhouding 1 : 1.
Meet (of schat) wat de verhoudingen zijn van de zijden van een monitor, een deur, een cd-doosje, een krant en een opening van een brievenbus (in een deur).

B:
Sommige rechthoeken hebben een vaste, logische verhouding; van andere rechthoeken is de verhouding willekeurig. Theedoeken en zakdoeken zijn meestal vierkant. Een boekenplank met verhouding 1 : 2 is raar. Een bridgetafel met verhouding 1 : 1 is logisch.
Waarom?

C:
Wat is een redelijke verhouding voor een badhanddoek?
Welke verhouding lijkt jou geschikt voor:

- *een washandje*
- *de vloer van een garage*
- *een zakaansteker*
- *een deur*
- *een boekenplank*
- *een spandoek*
- *een kentekenbord van een auto*
- *een matrixbord (dat een maximumsnelheid aangeeft)*
- *een zwembad?*

Natuurlijk is een grote variatie aan antwoorden mogelijk, bijvoorbeeld:

A:

Monitor:	40 : 30 = 4 : 3
Deur:	1 : 2 of 84 : 200 $\approx$ 2 : 5
CD-doosje:	14,3 : 12,5 $\approx$ 23 : 20
Krant:	42 : 56 $\approx$ 3 : 4
Opening brievenbus:	25 : 7

B:
Een boekenplank met een diepte van 25 cm zou met een verhouding 1 : 2 een lengte hebben van 50 cm. Daar kun je niet zoveel boeken op kwijt.
Een bridgetafel met een verhouding van 1 : 1 is vierkant. Iedereen zit even ver van het speelveld.

C:
Badhanddoek: 1 : 2 of 2 : 3
Diverse antwoorden zijn natuurlijk mogelijk, mede afhankelijk van de voorstelling die de leerlingen hebben van de diverse objecten. Belangrijk hierbij is dat het gaat om de verhouding en niet om de afmetingen. Een spandoek van 1,5 m bij 4,5 m heeft dezelfde verhouding als een aansteker met een breedte van 2 cm en een hoogte van 6 cm.
Mogelijke antwoorden:

Washandje:	2 : 3
Vloer van een garage:	1 : 2
Zakaansteker:	1 : 3
Deur:	1 : 2
Boekenplank:	1 : 6
Spandoek:	1 : 5
Kentekenbord:	1 : 3
Matrixbord:	3 : 4
Zwembad:	2 : 5

Bij de uitwisseling van de antwoorden binnen de groepjes blijkt de variatie in mogelijke antwoorden. Het gaat hierbij natuurlijk niet om een enig juist antwoord voor de verhouding van de lengte en breedte van de vloer van een garage.
In het bijzonder kan ingezoomd worden op de afmetingen van het scherm van een monitor of tv (Wat zijn de breedte en hoogte van een 22 inch scherm?). Vanwege de A-formaten die later aan de orde komen, is het interessant om te vragen naar de gemeten afmetingen van de krant.

In verband met het vergelijken van de verhoudingen van de zijden van rechthoeken, wat in het vervolg vaak terugkomt, is het van belang om afspraken te maken over de begrippen lengte en breedte, hoogte en breedte, of langste en kortste zijde van rechthoeken. Deze opgaven kunnen hiervoor de aanleiding zijn.

Bij het vergelijken van twee figuren worden de begrippen *interne verhouding* (verhouding tussen lengtes binnen één figuur) en *externe verhouding* (verhouding van overeenkomstige lengtes van twee figuren) afwisselend gebruikt. Voor het vaststellen of twee rechthoeken gelijkvormig zijn is het niet noodzakelijk deze begrippen expliciet te noemen.

Vraag 24 leent zich voor een klassikaal experiment. Wat is een mooie verhouding? Had Fechner gelijk? Zie verder vraag 24.

Aan de hand van vraag 25 , waarin vlaggen worden vergeleken, wordt het begrip *gelijkvormigheid van rechthoeken* vastgelegd.

Vraag 23

a) Schoolbord, tv-scherm, A4 papier, deur, foto.

b) Een bol, piramide, cilinder.
(*Omdat gesteld wordt dat het om de andere twee dimensies gaat, zijn vierkant, cirkel, rechthoek in dit verband begrijpelijke (maar foute) antwoorden.)*

Vraag 24

a) Laat de leerlingen (ieder afzonderlijk) zonder te meten, een rechthoekig kaartje knippen uit een A4-tje. Inventariseer de afmetingen van de kaartjes. Komt de verhouding tussen breedte en hoogte in de buurt van de verhouding 5 : 8, zoals Fechner concludeerde?

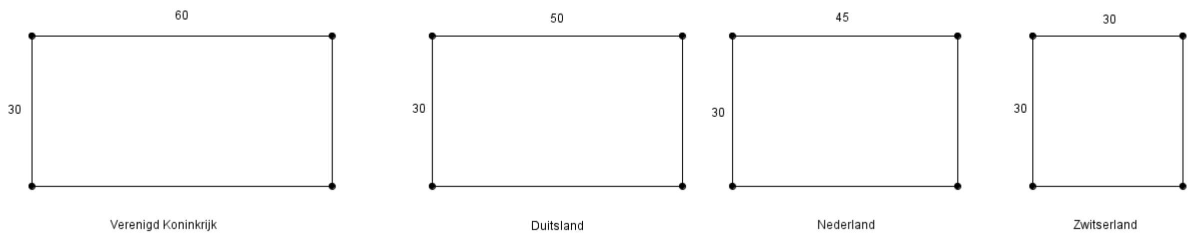
b) Laat de antwoorden aanleiding zijn om opvattingen uit te wisselen rond de vraag: wat is mooi? Welke verhouding is mooi?

Vraag 25

a)

Verenigd Koninkrijk:	15 : 30 = 1 : 2
Duitsland:	18 : 30 = 3 : 5
Nederland:	20 : 30 = 2 : 3
Zwitserland:	30 : 30 = 1 : 1

b)



Gelijkvormige rechthoeken

Er komen drie manieren naar voren om vast te stellen of twee rechthoeken gelijkvormig zijn. Vanuit de onderbouw zijn de meeste leerlingen wel bekend met de eerste twee genoemde methodes. De methode waarbij de stand van de diagonalen van rechthoeken met elkaar vergeleken wordt, is minder vanzelfsprekend. Het is natuurlijk mogelijk de drie manieren door het individueel laten maken van de vragen aan de orde te stellen. Het is ook aardig om dit in gesprek met de klas als volgt te doen.

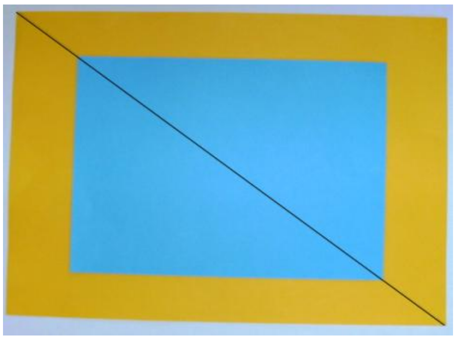
Elk groepje krijgt bijvoorbeeld zes rechthoekige stukken papier van verschillende afmetingen op de bank. Zorg dat er een aantal gelijkvormige rechthoeken tussen zit. Teken op elke rechthoek aan één kant een diagonaal. Leg de blaadjes zodanig neer dat de diagonaal aan de onderkant ligt. (Zie afbeelding hieronder van rechthoeken met de diagonaal naar boven)

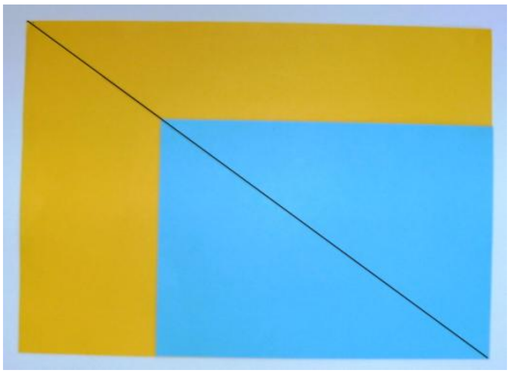
Enkele vragen:

- *Welke rechthoek vind je mooi? (Inhakend op vraag 24)*
- *Welke rechthoeken zijn op het oog gelijkvormig? (Er ontstaat vanzelf discussie over dat begrip en er vallen direct een paar rechthoeken af.)*
- *Meet nauwkeurig de lengte en breedte van de rechthoeken die op het oog gelijkvormig zijn. Welke rechthoeken zijn echt gelijkvormig?*
- *Draai de blaadjes om. Kun je een regel bedenken om m.b.v. de diagonaal te bepalen of twee rechthoeken gelijkvormig zijn?*

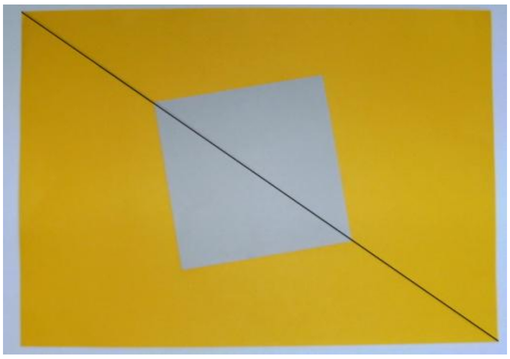
De afbeeldingen hieronder illustreren het schuiven met rechthoeken en diagonalen.

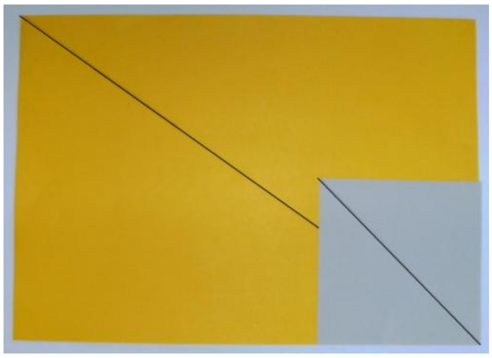
Gelijkvormige rechthoeken, want:





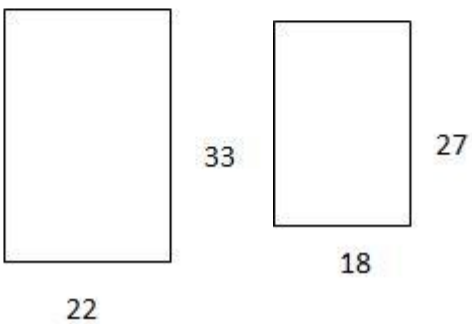
Niet gelijkvormig, want:



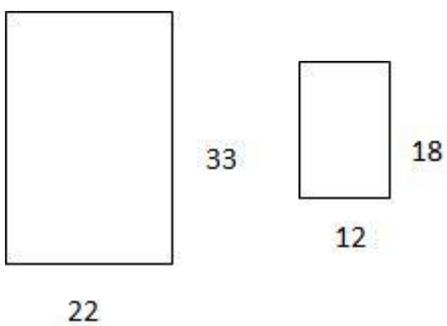


Vraag 26

a) Twee mogelijkheden:

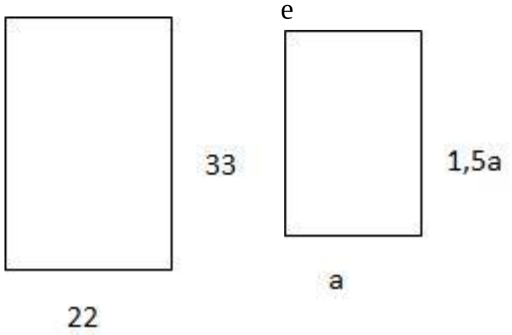


en

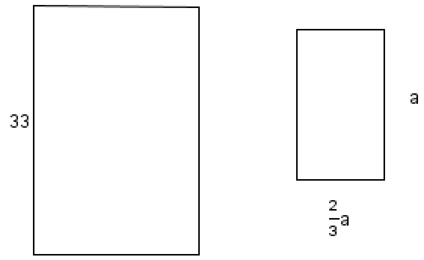


b) Twee mogelijkheden:

e



en

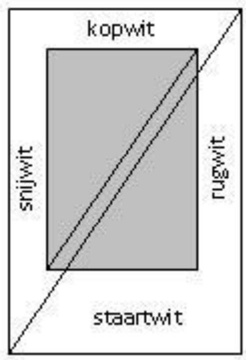


Vraag 27

a) Met factor $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

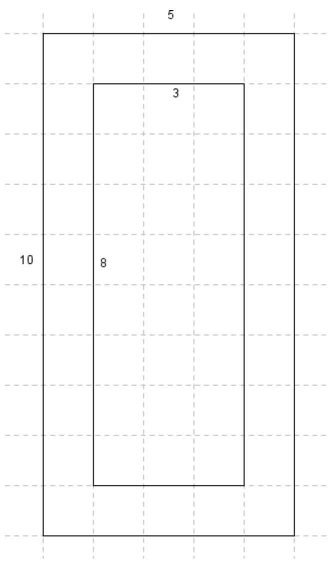
b) De foto wordt dan $\frac{3}{4} \times 12 = 9cm$ breed.

Vraag 28

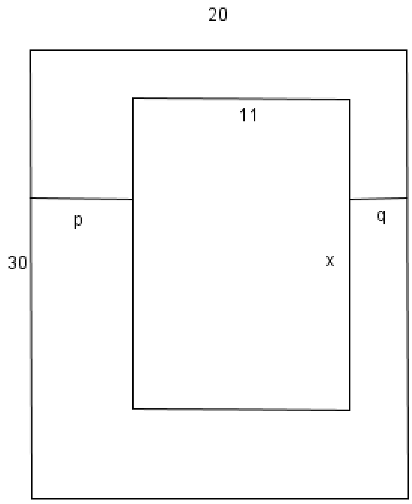


a) De diagonalen lopen evenwijdig. Het bedrukte deel is gelijkvormig met de hele bladzijde.

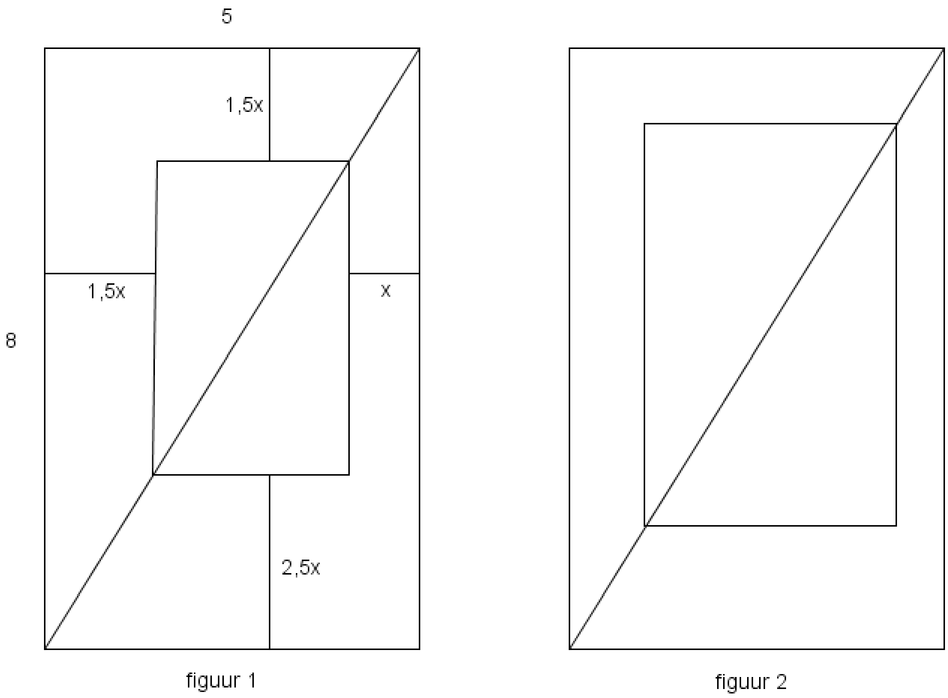
b) Zie voorbeeld: $5:10 \neq 3:8$



c) $p + q = 9$, dus de breedte van de zetspiegel wordt 11 cm. Als de zetspiegel gelijkvormig moet zijn met de pagina zelf geldt: $x = \dfrac{30 \cdot 11}{20} = 16,5$ en blijft er voor het kopwit en staartwit samen 13,5 cm over.

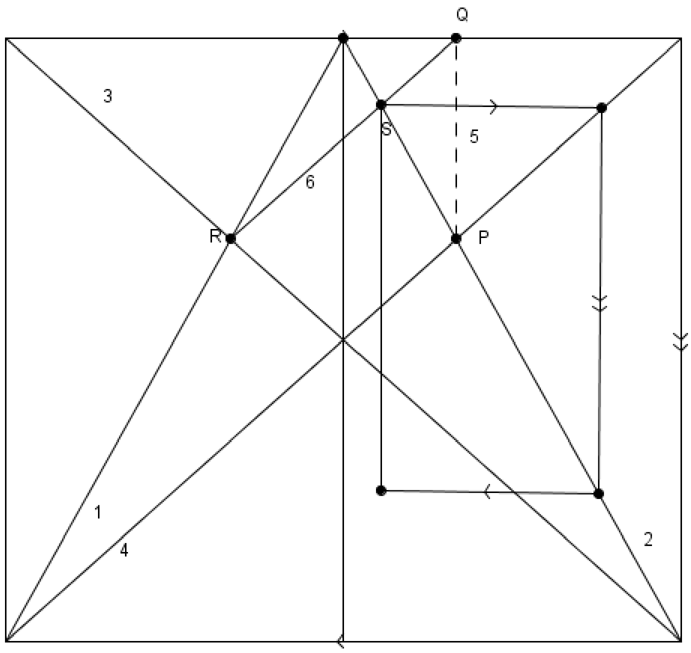


Vraag 29



In figuur 1 is het rugwit 1 cm genomen. In figuur 2 is het rugwit $\frac{2}{3}$ cm.
De zetspiegel heeft een hoogte van $8-4x$ en een breedte van $5-2{,}5x$.
Als pagina en zetspiegel gelijkvormig zijn geldt: $\frac{5-2{,}5x}{5}=\frac{8-4x}{8}$, ofwel: $1-\frac{1}{2}x=1-\frac{1}{2}x$ en dit geldt voor elke (positieve) waarde van x, waarbij $x<2$.

Vraag 30



Een mogelijke volgorde is in de tekening aangegeven.
Nadat punt S is gevonden, ligt de bladspiegel vast.

Vraag 31

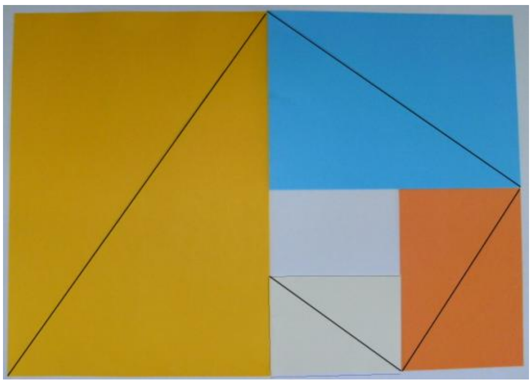
a) Via het tellen van de hokjes wordt het $\frac{18}{40{,}5} = \frac{4}{9}$ deel bedrukt, ofwel ongeveer 44%

b) Rugwit : snijwit = 1 : 2
Kopwit : staartwit = 1 : 2

Spiralen

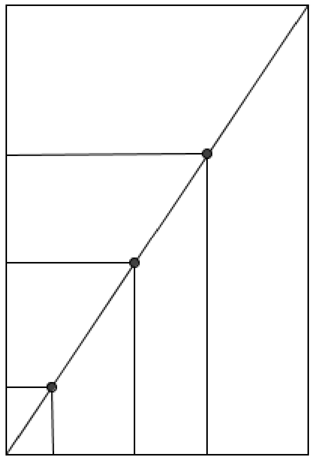
Ter voorbereiding op deze paragraaf en aansluitend bij de activiteiten van de vorige lessen is een spiraal met gelijkvormige rechthoeken te leggen. Geef elk groepje in de klas een setje gelijkvormige rechthoeken met diagonaal en laat ze een spiraal leggen.
Of leg een grote stapel gelijkvormige rechthoeken met diagonaal neer met de opdracht om hiermee zoveel mogelijk spiralen te maken. De leerlingen moeten dan nog eerst de gelijkvormige rechthoeken sorteren.
Wanneer ontstaat een spiraal, waarbij alle rechthoeken mooi aansluiten en samen een grote rechthoek vormen?

Hieronder de afbeelding van de spiraal die ontstaat door opeenvolgende A formaten aan elkaar te leggen en waarbij een gesloten rechthoek ontstaat.

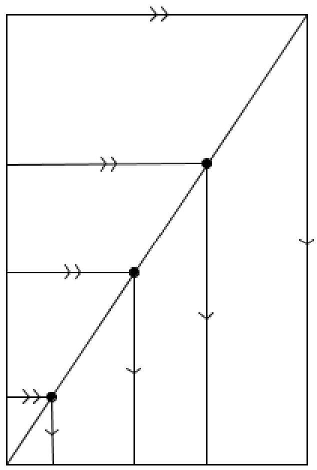


Vraag 32

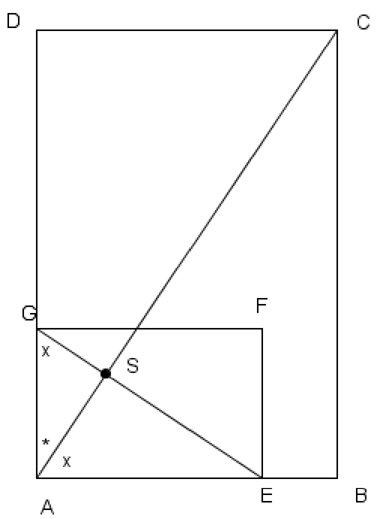
a) Die hoekpunten liggen op één lijn (De diagonalen liggen op elkaar)



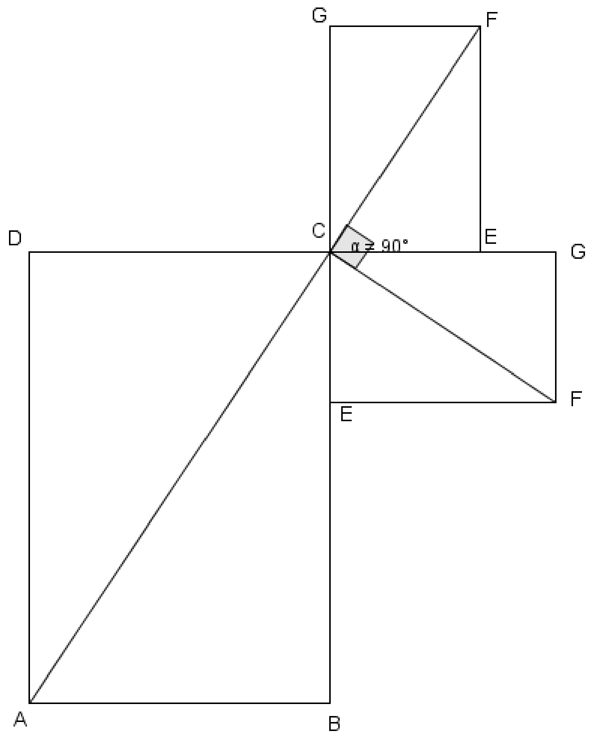
b) Je ziet vier gelijkvormige rechthoeken



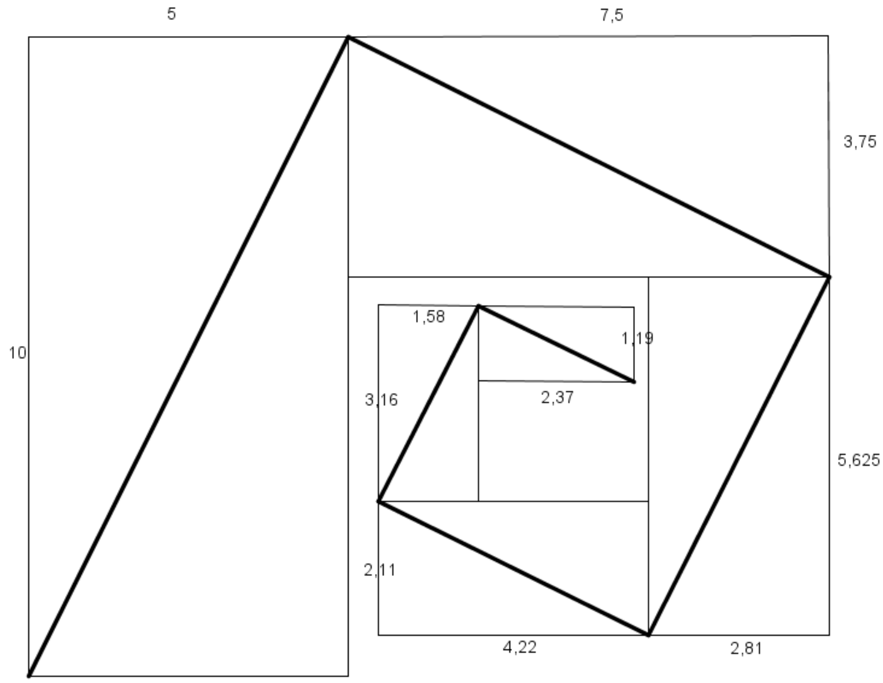
c) De rechthoeken ABCD en AGFE zijn gelijkvormig. De hoeken met de kruisjes zijn even groot.
Een sterretje en kruisje maken samen een hoek van 90^o.
Dus in driehoek AGS is hoek S = 180^o – (kruisje + sterretje) = $180^o – 90^o = 90^o$.



d) Draai rechthoek EFGC om punt C over 90^o tegen de wijzers van de klok in. Diagonaal CF draait ook 90^o en komt in het verlengde van diagonaal AC te liggen. De rechthoeken ABCD en CEFG zijn dan gelijkvormig.



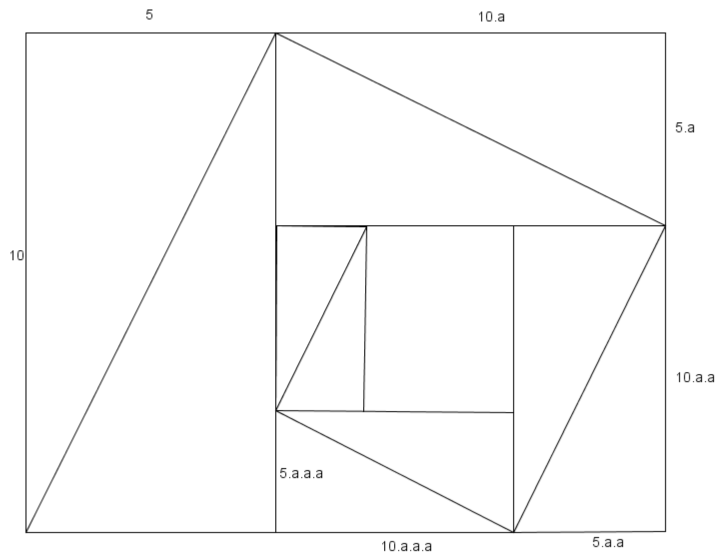
Vraag 33



Verdiepingsvraag:

Hoe groot moet de factor zijn opdat de spiraal precies een rechthoek opvult (zonder overlap)?

Om een gesloten figuur te krijgen moet een factor a gevonden worden zo dat $5a + 10a^2 = 10$, (of $5 + 10a = 5 + 5a^2 + 10a^3$). Oplossen van deze vergelijking geeft $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \approx 0{,}78077$ als positieve oplossing.



A-formaten

Het ontdekken van de kenmerken van de A-formaten kan via het zelfstandig beantwoorden van de vragen uit het leerstofpakket. Gebleken is dat de algebra bij vraag 35 voor de leerlingen lastig is. Ook de relatie tussen vraag 34 en 35, waarbij behandeld wordt dat de A-formaten zodanig van vorm zijn dat alle opeenvolgende rechthoeken gelijkvormig zijn, wordt niet vanzelfsprekend gelegd. Klassikale bespreking en demonstratie is wenselijk.

Een kniples (ter voorbereiding van opdracht 34):
Geef elke groep een papieren rechthoek. Neem voor elke groep een rechthoek met andere verhoudingen. Eén groep krijgt een A-formaat.
Opdracht: Vouw de rechthoek beurtelings horizontaal en verticaal dubbel (of knip het papier door) , en ga na of de opvolgende rechthoek gelijkvormig is met de vorige (bijvoorbeeld met de diagonaalmethode).
Laat spiralen leggen met de gelijkvormige rechthoeken. Plak ze op een groot vel papier.

- Welke groep heeft alle rechthoeken in één spiraal gebruikt?
- Welke groep heeft twee spiralen van hetzelfde papier kunnen maken?

- Welke spiralen vullen een rechthoek op?
- Bij welke spiralen komen de rechthoeken over elkaar te liggen?
- Kun je de spiraal ook naar buiten uitbreiden? Wat zijn dan de afmetingen?
- Waar ligt het oog van de spiraal?

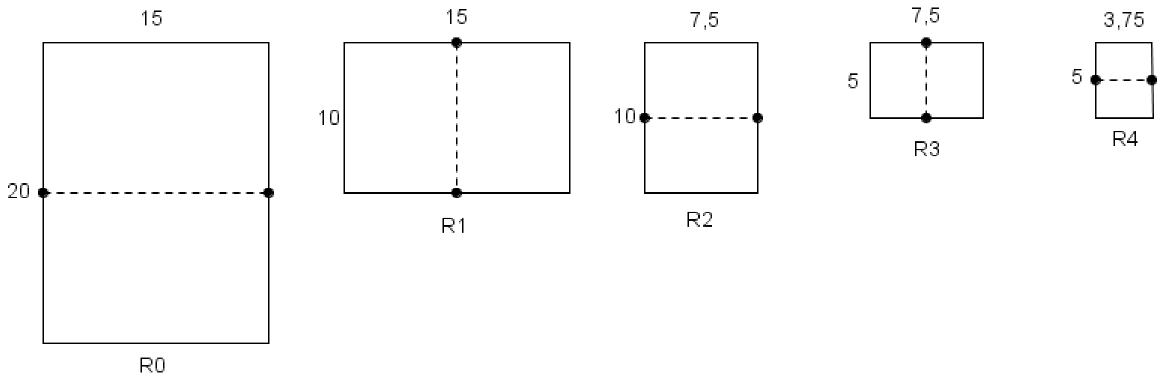
Verwerking
De A-formaten (en de gulden rechthoek in het volgende hoofdstuk) zijn een wezenlijk deel van dit leerstofpakket. Om te weten wat de leerlingen hier nu echt van begrepen hebben, kan het raadzaam zijn om ze dit in eigen bewoording te laten uitleggen. In de klas is dit gedaan in de vorm van het beantwoorden van een faq (frequently asked question). Hieronder een reactie van een leerling op de gestelde vraag.

Ik moet een werkstuk maken over de A-formaten. Volgens mijn leraar heeft dat met verhoudingen te maken. Kun je me uitleggen hoe dat zit? Waarom zijn A-formaten zo bijzonder en hoe komt dat. Mijn leraar wil niet alleen uitleg met getallenvoorbeelden, maar ook een soort bewijs.
Bedankt alvast.

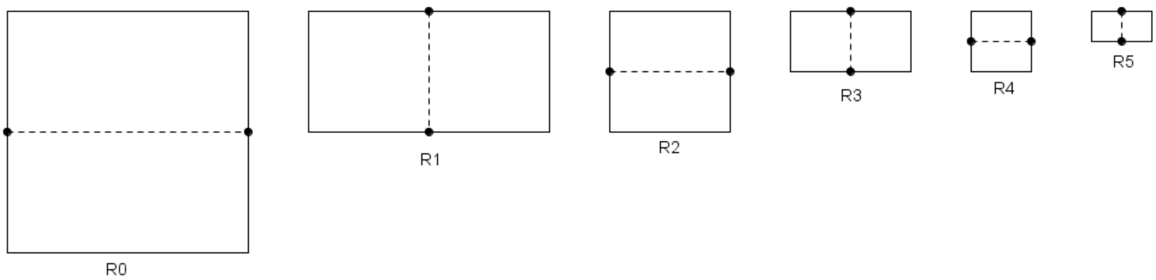
De verhouding van een A-formaat zijn zo gemaakt dat als je een A-formaat dubbelvouwt, je een gelijkvormige rechthoek overhoud. De verhouding is $1:\sqrt{2}$ *.*
Hierbij is $\sqrt{2} \approx 1,41$ *.*
Het grootste A-formaat is A0. Dit formaat heeft een oppervlakte van 1 m2. Vouw je het A0 formaat dubbel, dan krijg je een A1. A1 heeft een oppervlakte van 0,5 m2 en is gelijkvormig aan A0. Vouw je A1 dubbel dan krijg je A2 met een oppervlakte van 0,25 m2 en zo kan je doorgaan tot miniscule kleine formaten. Als je een A-formaat wil verkleinen naar een kleiner A-formaat moet je altijd de langste kant zo vouwen dat die de helft kleiner word. A-formaten kan je ook in een spiraal leggen, die op een gegeven moment op een punt komt waar je niet verder kan. Dat punt heet het oog van de spiraal. Alleen met A formaten kan je een mooie spiraal maken die goed "in elkaar past".Dat komt omdat de kleinere versies gelijkvormig zijn en de helft zijn van het vorige A-formaat.

Vraag 34

a) R_0, R_2, R_4 enz. zijn gelijkvormig. Zo ook R_1, R_3, R_5, enz. De vermenigvuldigingsfactor is steeds $\frac{1}{2}$.



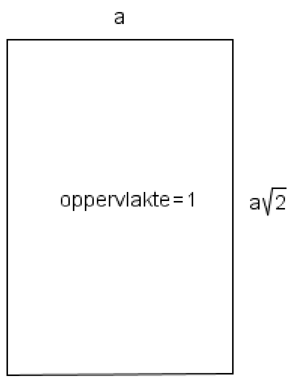
b) De verhouding van de zijden van R_1, R_3, R_5, enz. is steeds 1 : 2. R_0, R_2, R_4 enz. blijven vierkanten.



Vraag 35

a) Zie toelichting hierboven voor een mogelijke klassenactiviteit.
b) De korte zijde van R_0 is x en de lange zijde van R_0 is 2.
c) $x \cdot x = 2$ of $x^2 = 2$
d) $x = \sqrt{2} \approx 1,41$
e) 10 keer zo groot, dus $10 \cdot \sqrt{2}$
f) a keer zo groot, dus $a \cdot \sqrt{2}$

Vraag 36



a) $a \cdot a\sqrt{2} = a^2 \cdot \sqrt{2} = 1$

$a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, dus $a = \sqrt{0,707} \approx 0,841$

Als de oppervlakte 1 m^2 is, dan is de kortste zijde $0,841m = 841mm$ en de langste zijde is $\sqrt{2} \cdot 0,841 \approx 1,189m = 1189mm$

b) Oppervlakte A1 vel = 0,5 m^2. Afmetingen zijn: 594,5 mm bij 841 mm.

c) Zelf nameten

d)

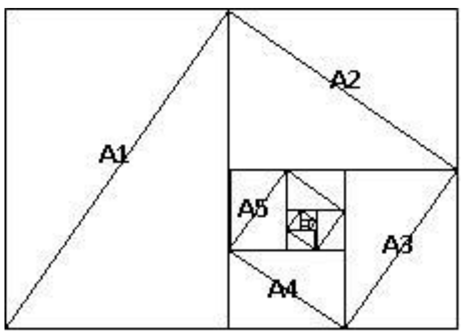
	oppervlakte	*lengte*	*breedte*
A0: poster	$1m^2$	1189 mm	841 mm
A1: opengeslagen krant	$\frac{1}{2}$ m^2	841 mm	594,5 mm
A2: dichtgeslagen krant	$\frac{1}{4}$ m^2	594,5 mm	420,5 mm
A3: kleine poster	$\frac{1}{8}$ m^2	420,5 mm	297,25 mm
A4: printpapier	$\frac{1}{16}$ m^2	297,25 mm	210,25 mm
A5: schrift	$\frac{1}{32}$ m^2	210,25 mm	148,63 mm
A6: briefkaart	$\frac{1}{64}$ m^2	148,63 mm	105,13 mm
A7:	$\frac{1}{128}$ m^2	105,13 mm	74,32 mm
A8: visitekaartje	$\frac{1}{256}$ m^2	74,32 mm	52,57 mm
A9:	$\frac{1}{512}$ m^2	52,57 mm	37,16 mm
A10: postzegel	$\frac{1}{1024}$ m^2	37,16 mm	26,29 mm

e) Zie tabel bij d

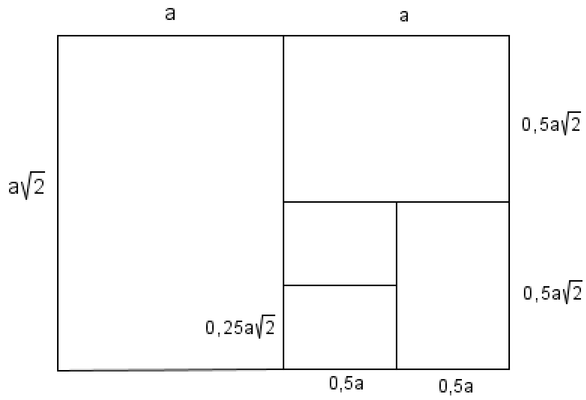
f) Op A1 past 32 keer een A6

Vraag 37

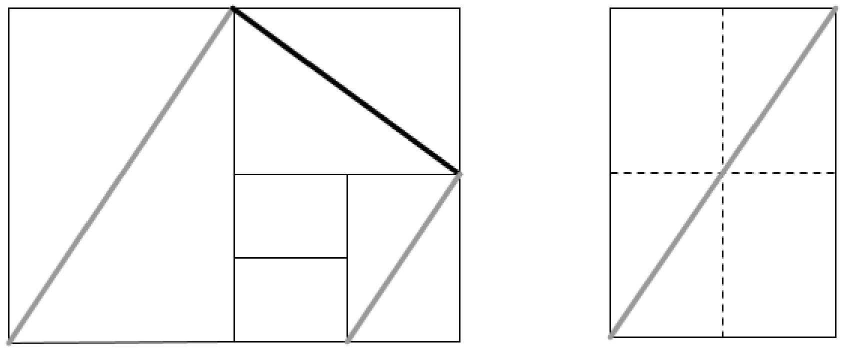
a)



b) Door de A-formaten zo aan elkaar te leggen wordt de langste kant gehalveerd (bijvoorbeeld: $a\sqrt{2}$ wordt $0{,}5a\sqrt{2}$) en de breedte wordt de nieuwe lengte (bijvoorbeeld breedte *a* wordt bij de opvolger de lengte *a*). Het "sluitstuk" heeft precies lengte $0{,}5a$.

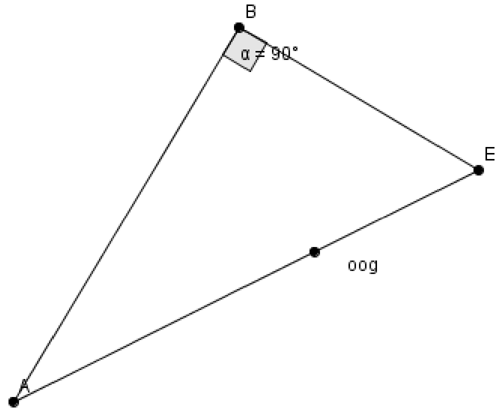


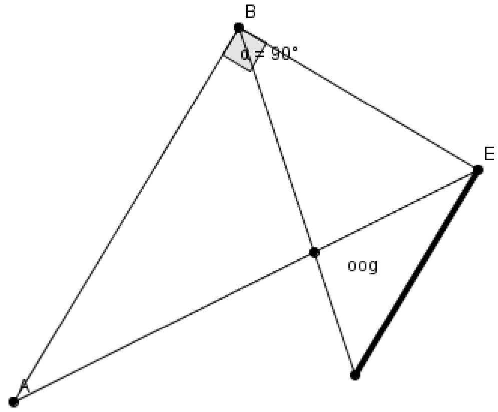
c) Twee opeenvolgende grijze diagonalen ontstaan door de bijbehorende A-formaten twee keer dubbel te vouwen. De diagonaal is dan gehalveerd.



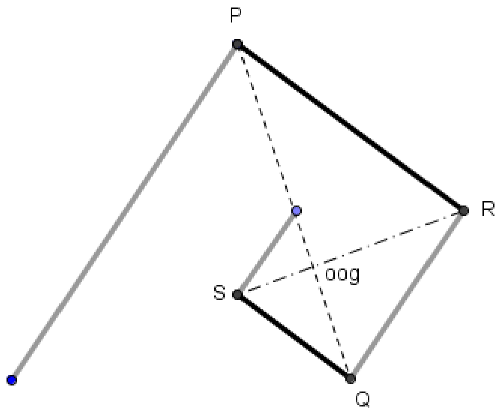
Of:
Van A0 naar A1, van A1 naar A2, enz wordt de oppervlakte gehalveerd. Na twee stappen is de oppervlaktevergrotingsfactor dus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. De lengtevergrotingsfactor is dus $\frac{1}{2}$, ofwel een half keer zo lang als de vorige grijze diagonaal.

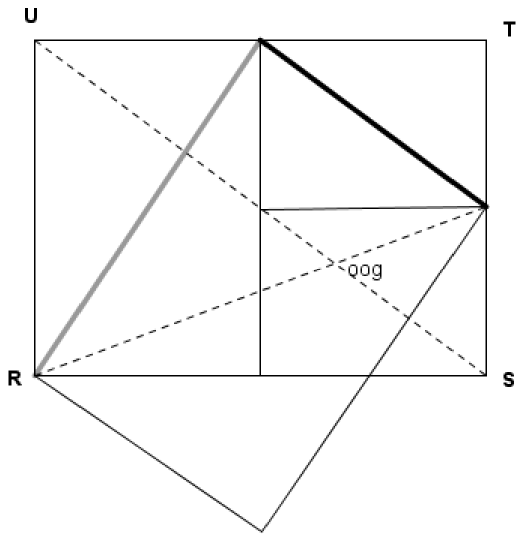
d) Teken lijn *l* door B loodrecht op AB (Zie de figuur hieronder).
Punt E is het snijpunt van de lijn door A en het oog met lijn l,
BE is de volgende diagonaal. Zo ook voor de daaropvolgende diagonaal.





e) Linkerfiguur: Verbind de knikken van grijs naar zwart (dus bij P en Q) door een lijn. Verbind ook de knikken van zwart naar grijs (dus bij R en S). Het snijpunt is het oog van de spiraal. Rechterfiguur: Het grijze en zwarte lijnstuk staan loodrecht op elkaar en zijn de diagonalen van gelijkvormige rechthoeken. Alle gelijkvormige rechthoeken (A-formaten) vullen rechthoek RSTU op. Het snijpunt van de stippellijnen is het oog van de spiraal.





Hoofdstuk 4: Gulden rechthoeken

De gulden rechthoek is het tweede voorbeeld van een rechthoek met bijzondere eigenschappen. Door een vierkant af te knippen van een willekeurige rechthoek hou je meestal niet een rechthoek over die gelijkvormig is met de oorspronkelijke rechthoek. Alleen de gulden rechthoek heeft die bijzonderheid. Het gulden getal φ wordt afgeleid, waarna in voorbeelden vanuit de schilderkunst en architectuur gezocht wordt naar de gulden verhouding. Ook wordt ingegaan op de vermeende magie rond de gulden verhouding. Het opstellen van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$ (in opgave 39) is voor de wiskunde C leerling niet gemakkelijk. Het oplossen m.b.v. een grafische rekenmachine of abc-formule geeft minder problemen.

Werkvorm

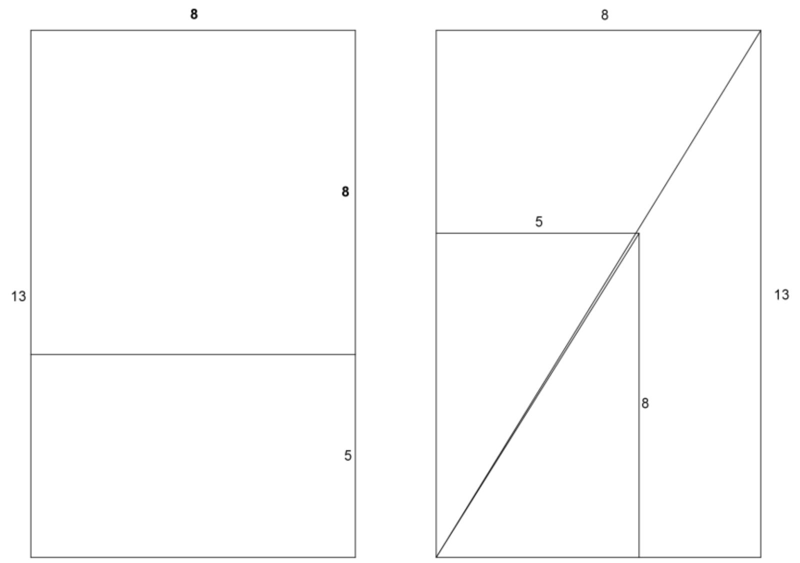
Voorafgaande aan dit hoofdstuk kunnen de leerlingen zelf proberen een rechthoek te knippen die voldoet aan de regel dat door er een vierkant vanaf te knippen, je een rechthoek overhoudt die gelijkvormig is met de oorspronkelijke rechthoek. In opgave 38, 40 en 42 komt dit terug.
Door aan de langste zijde van een gulden rechthoek een vierkant te plakken ontstaat weer een gulden rechthoek. In relatie met kunstvakken kan aan de leerlingen gevraagd worden meer voorbeelden te zoeken in kunst en architectuur waar de gulden verhouding is terug te vinden.

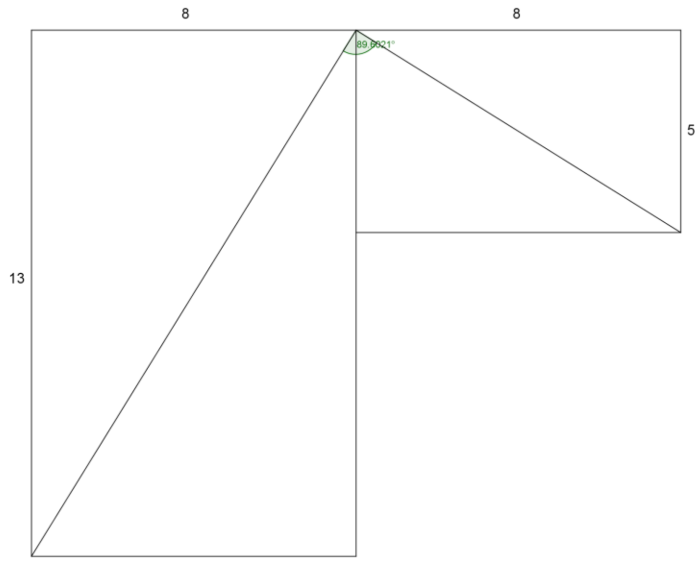
Tijdsinvestering

Dit onderwerp is op zichzelf in één lesuur te behandelen. Afhankelijk van de tijd die het knippen vraagt en het bespreken van door de leerlingen meegebrachte voorbeelden van gulden snede verhoudingen in de kunst, kan dit hoofdstuk gemakkelijk twee lessen vragen.

Vraag 38

a) De rechthoeken zijn niet gelijkvormig, maar dat is m.b.v. de diagonalen (evenwijdig of loodrecht) lastig te zien. Berekeningen moeten uitkomst bieden.





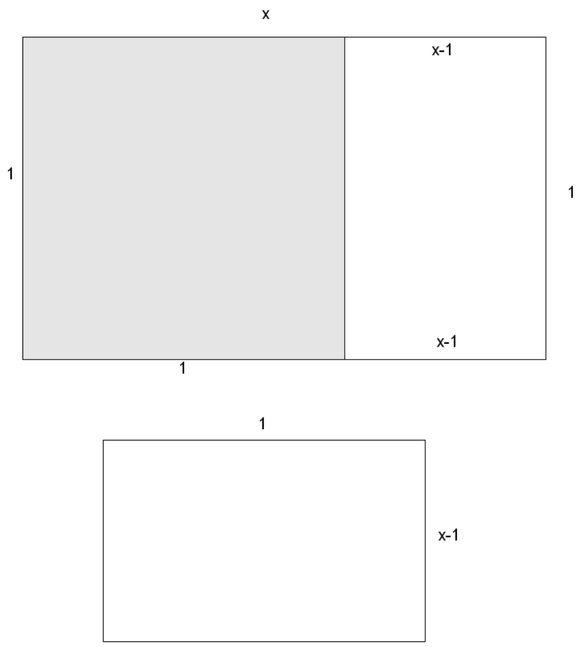
b) Grote rechthoek: $\frac{lengte}{breedte}=\frac{13}{8}=1,625$ Kleine rechthoek: $\frac{lengte}{breedte}=\frac{8}{5}=1,6$

c)

lengte	8	5	3	2	1
breedte	5	3	2	1	1

Vraag 39

a) De zijden van de overgebleven rechthoek zijn $x-1$ en 1



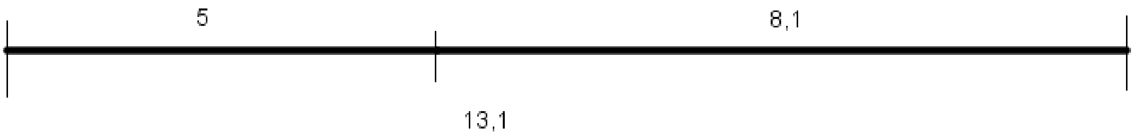
b) De korte zijde van de grote rechthoek is vermenigvuldigd met $(x-1)$. De lange zijde van de grote rechthoek moet ook hiermee vermenigvuldigd worden.
De lengte van de lange zijde van de kleine rechthoek wordt dan $x \cdot (x-1)$
De lengte van de lange zijde van de kleine rechthoek is gelijk aan 1.
Dus geldt: $x \cdot (x-1) = 1$

c) $x(x-1) = 1 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

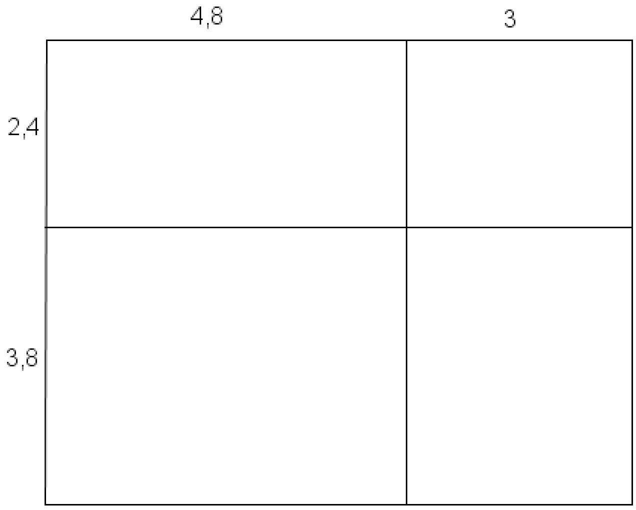
d) M.b.v. Grafische rekenmachine of via abc formule:
De positieve waarde voor x is: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

Vraag 40

De verhouding $\frac{kort}{lang}$ is ongeveer $\frac{5}{8{,}1} \approx \frac{1}{1{,}62} \approx 0{,}62$ (Door kopiëren kunnen de gemeten lengtes iets verschillen)



Vraag 41

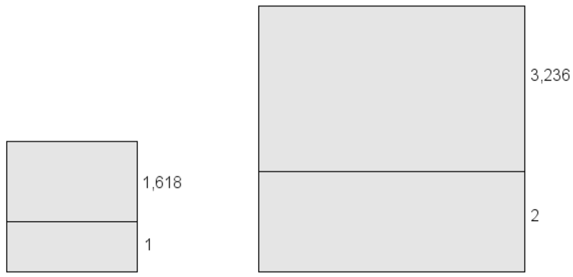


a) $\dfrac{3,8}{2,4} \approx 1,54$

b) $\dfrac{4,8}{3} = 1,6$

Vraag 42

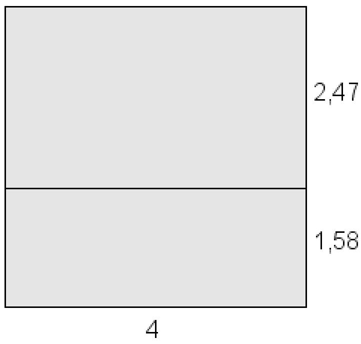
a) Eenvoudige werkwijze: Begin met een vierkant, waarvan een zijde verdeeld is in $1:\varphi$ en vergroot dit vierkant met een factor *f*, zodat de verticale zijde de gewenste lengte krijgt.



Of:
Als je een lengte verdeelt in stukken die zich verhouden als 2 : 3, dan wordt het ene stuk het $\frac{2}{5}$ deel en het andere stuk het $\frac{3}{5}$ deel.
Als je een lengte verdeelt in stukken die zich verhouden als 1 : φ, dan wordt het ene stuk het

$\dfrac{1}{1+\varphi}$ deel van het lijnstuk en het andere deel het

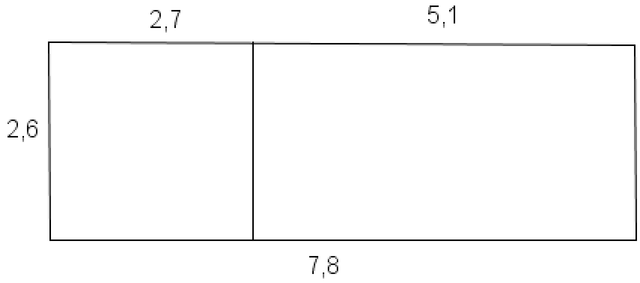
$\dfrac{\varphi}{1+\varphi}$ deel.
Dus voor het verdelen van een vierkant met zijde 4 geldt dat een zijde verdeeld wordt in stukken met lengtes
$\dfrac{1}{(1+1,618)} \cdot 4 \approx 1,53$ en $\dfrac{1,618}{(1+1,618)} \cdot 4 \approx 2,47$



b) Op dezelfde wijze als hierboven. Als de balk 10 cm lang is, zijn de stukken $\dfrac{10}{1+\varphi} \approx 3,82cm$ en

$10 - a \approx 6,18cm$

Vraag 43



Bij benadering: $\frac{5,1}{2,7} \approx 1,9$ en $\frac{7,8}{5,1} \approx 1,5$

Vraag 44

a) De quotiënten geven nagenoeg de gulden verhouding weer.
b) De sommen van opeenvolgende waarden geven de daaropvolgende waarde.
c) Zie tabel hieronder.
d) Neem in de kolom rood bv $a = 9$, dan is $a \cdot \varphi \approx 14,6 \approx 15$ en $a \cdot \varphi \cdot \varphi \approx 23,6 \approx 24$ enz.
e) $a\varphi$ ligt boven a. Daar weer boven ligt $a\varphi^2$. Twee opeenvolgende waarden levert de nieuwe waarde op, dus $a + a\varphi = a\varphi^2$

rood	**quotiënt**	**Som van twee opeenvolgende**		**blauw**	**quotiënt**	**Som van twee opeenvolgende**
				2261		1397 + 2661 = 4058
1829		1130 + 1829 = 2959			1,62	
	1,62			1397		863 + 1397 = 2260
1130		698 +1130 = 1828			1,62	
	1,62			863		534 + 863 = 1397
698		432 + 698 = 1130			1,62	
	1,62			534		330 + 534 = 864
432		267 + 432 = 699			1,62	
	1,62			330		204 + 330 = 534
267		165 + 267 = 432			1,62	
	1,62			204		126 + 204 = 330
165		102 + 165 = 267			1,62	
	1,62			126		78 + 126 = 204
102		63 + 102 = 165			1,62	
	1,62			78		48 + 78 = 126
63		39 + 63 = 102			1,63	
	1,62			48		30 + 48 = 78
39		24 + 39 = 63			1,6	
	1,625			30		18 + 30 = 48
24		15 + 24 = 39			1,67	
	1,6			18		11 + 18 = 29
15		9 + 15 = 24			1,64	
	1,67			11		
9		6 + 9 = 15				
	1,5					
6						

Hoofdstuk 5: Regelmatige veelhoeken

Dit hoofdstuk begint praktisch met het inpakken van o.a. een zevenhoek met een strook papier en het maken van een regelmatige veelhoek m.b.v. spiegeltjes. Het scheelt tijd als deze materialen voorhanden zijn in de klas. De opdrachten bereiden voor op bijzonderheden van regelmatige veelhoeken in het bijzonder van diagonalen.
Vervolgens worden verhoudingen tussen diagonalen en zijden van een vierkant en een regelmatige zeshoek onderzocht.
Daarna wordt ingezoomd op de regelmatige vijfhoek, met het gulden getal als bijzondere verhouding binnen dit figuur. De algebra bij vraag 57 en 58 vraagt extra aandacht.

Werkwijze

Het inpakken van veelhoeken met repen papier en het experiment met spiegels vraagt om de nodige voorbereiding. In het lokaal kunnen in verschillende hoeken de materialen klaargezet worden, waarna de leerlingen in een circuitvorm langs de experimenten gaan en ze uitvoeren. De stroken papier moeten van voldoende lengte zijn om een veelhoek geheel in te kunnen pakken. Na afloop van het circuit is er een nabespreking.

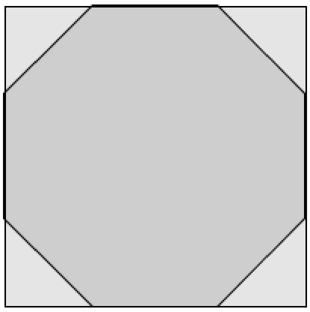
Tijdsinvestering

Practicum en vervolgens vraag 45 t/m 52 zijn in een lesuur (+ nawerk) uit te voeren.
De regelmatige zeshoek en vervolgens de regelmatige vijfhoek zijn in een tweede les te behandelen.

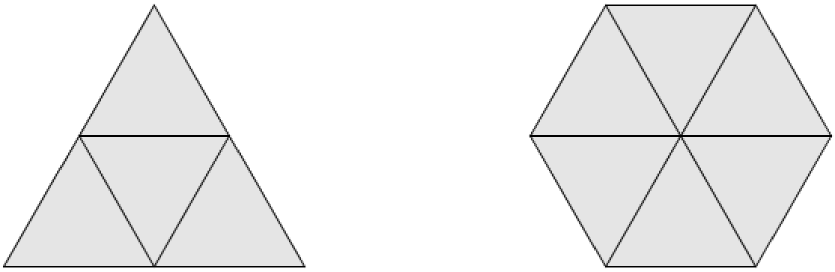
Vraag 45

a) Driehoek, vijfhoek, zevenhoek, achthoek, zeshoek, vierhoek (Zie ook Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren, 48ste jaargang nummer 3- januari 2009). Overigens ook goed te laten zien m.b.v. de optie oppervlakte in Geogebra.

b)

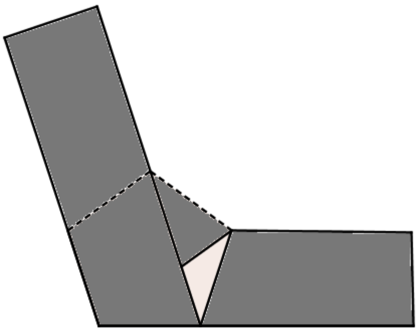


c) De oppervlakten verhouden zich als 4 : 6 = 2 : 3

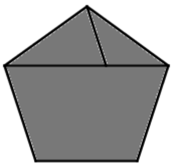


Vraag 46

a) Na drie slagen

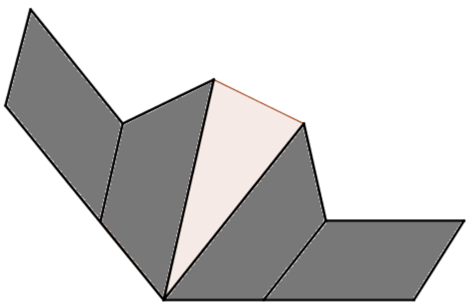


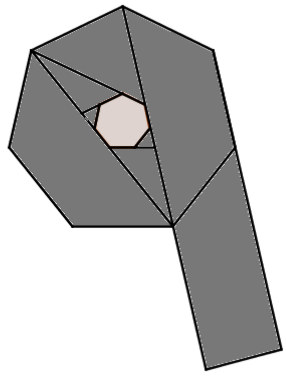
eindsituatie



b) Na drie slagen

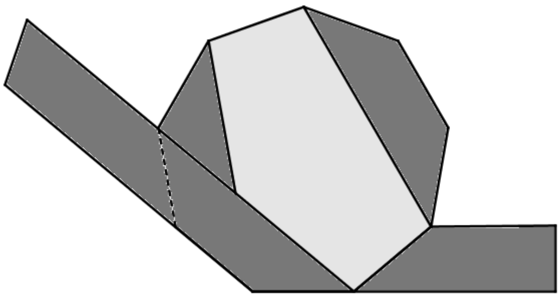
eindsituatie

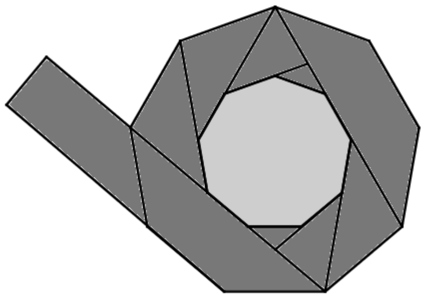




c) na vijf slagen

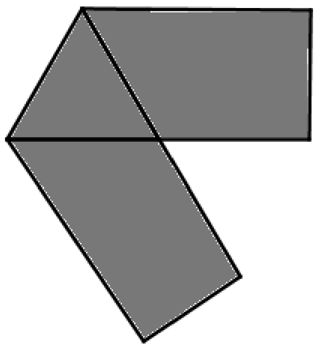
eindsituatie

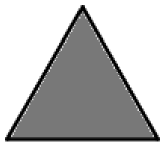




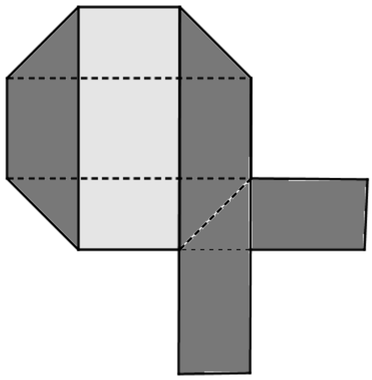
d) na één slag

eindsituatie



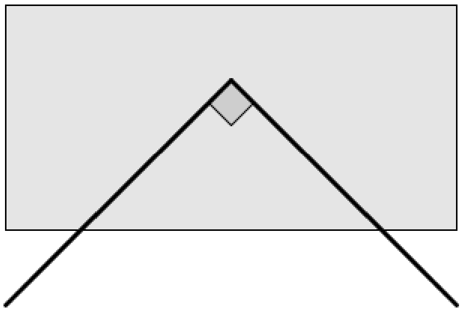


e)

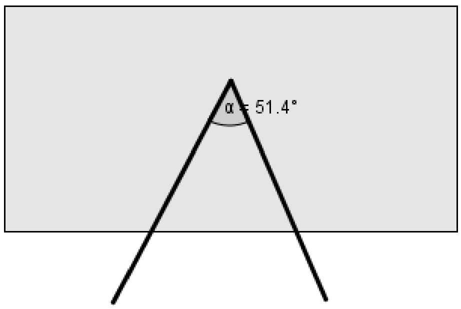


Vraag 47

a)



b)



Vraag 48

a) De zevenhoek heeft 5 driehoeken, dus $5 \cdot 180^o = 900^o$

b) Elke hoek is $\frac{900^0}{7} \approx 128{,}6^0$

Vraag 49

a) Vijfhoek: $\frac{3 \times 180^0}{5} = 108^0$ zeshoek: $\frac{4 \times 180^0}{6} = 120^0$ achthoek: $\frac{6 \times 180^0}{8} = 135^0$

b) Regelmatige n-hoek: $\frac{(n-2) \times 180^0}{n}$

Vraag 50

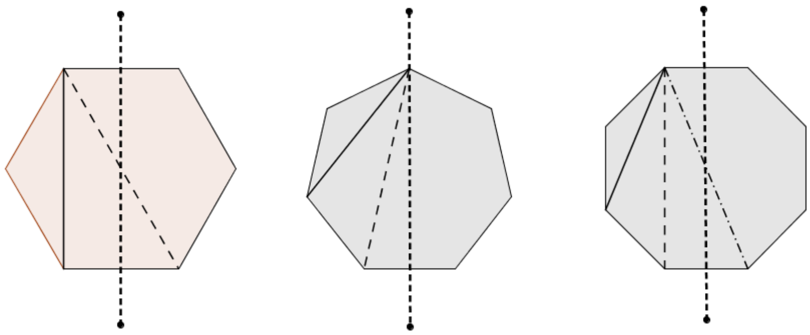
Twaalfhoek: $\dfrac{10\times 180^0}{12}=150^0$

Vraag 51

a) Vierhoek: 2 diagonalen
Vijfhoek: 5 diagonalen
Zeshoek: 9 diagonalen
Zevenhoek: 14 diagonalen
Achthoek: 20 diagonalen

b) Aantal diagonalen = $\dfrac{(n-3)\times n}{2}$, met *n* het aantal hoekpunten

c) Zie figuren hieronder



2 lengtes:
6 korte, 3 lange

2 lengtes:
7 korte, 7 lange

3 lengtes:
8 korte, 8 midden, 4 lange

d) Bijvoorbeeld door voortzetting van de volgende tabellen:

n-hoek (n oneven)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Aantal diagonalen van verschillende lengte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

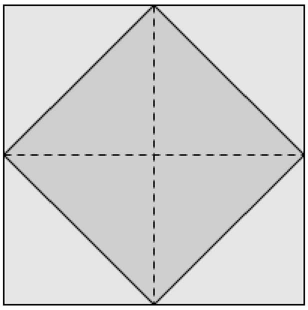
n-hoek (n even)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Aantal diagonalen van verschillende lengte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Of met een redenering (zie figuren bij c):
Bij een 21-hoek gaat een symmetrie-as door een hoekpunt. Links van dit punt bevinden zich nog 10 hoekpunten en rechts ervan ook. Van zo'n hoekpunt gaan links 9 diagonalen met verschillende lengte naar 9 hoekpunten. Rechts van de symmetrie-as zitten diagonalen van dezelfde lengte.

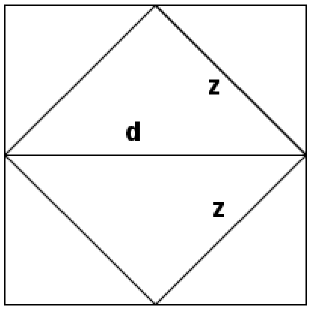
Een symmetrie-as van een 20-hoek verdeeld de hoekpunten in twee groepen van 10. Vanuit een hoekpunt links van de symmetrie-as gaan 8 diagonalen van verschillende lengte plus de diagonaal die twee diametrale punten met elkaar verbindt. Totaal dus 9 diagonalen van verschillende lengte.

Vraag 52

a) Zie figuur

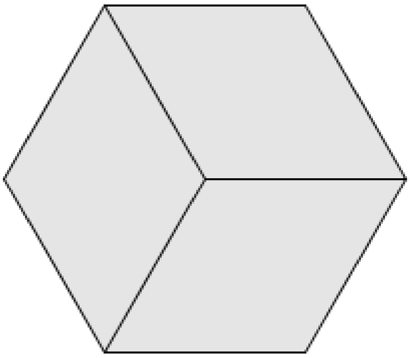


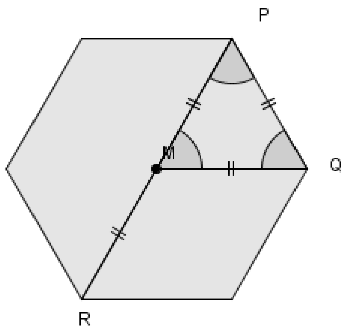
b) Oppervlakte grote vierkant is $d \times d = d^2$
Oppervlakte witte vierkant is $z \times z = z^2$
Het grote vierkant = 2 keer het kleine vierkant
Dus $d^2 = 2 \cdot z^2$



Vraag 53

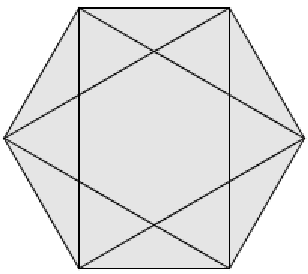
a)





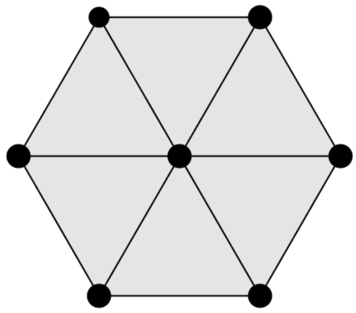
b) De diagonalen zijn twee keer zo lang als de zijde van de zeshoek.

c) De Davidster



Vraag 54

Als je de centrale bol van het Atomium weghaalt, houd je 8 bollen over op de hoekpunten van een kubus. De kubus is zo opgesteld, dat een lichaamsdiagonaal verticaal is.



Vraag 55

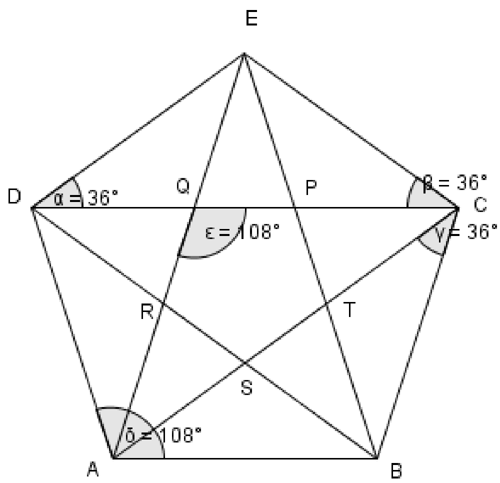
a) $90^0, 72^0$

b) *Via meten*:
Lengte buitengevel $\approx 4,4cm$, Lengte binnengevel $\approx 1,8cm$, dus
lengtevergrotingsfactor $= \frac{4,4}{1,8} \approx 2,4$
Via oppervlaktegegevens:
Oppervlaktevergrotingsfactor $= \frac{117.000m^2}{20.000m^2} = 5,85$,
Dus lengtevergrotingsfactor = $\sqrt{5,85} \approx 2,42$

c) Totale vloeroppervlakte = 620.000 m^2.
Er zijn 7 verdiepingen, dus vloeroppervlakte per verdieping = $\frac{620.000}{7} \approx 88.571m^2$
Inhoud = Opp Grondvlak x hoogte = 88571 x 24 = 2.125714 m^3
Gegeven Inhoud = 2.000.000 m^3 , dus kan ongeveer kloppen.

Vraag 56

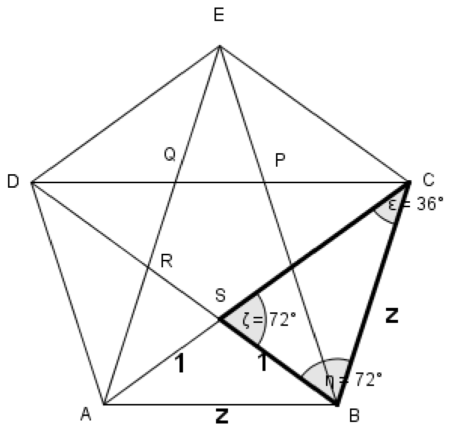
a) Vijf driehoeken zoals driehoek EDQ
Vijf driehoeken zoals driehoek EQP
Vijf driehoeken zoals driehoek EAB
Tien driehoeken zoals driehoek ECD
Tien driehoeken zoals driehoek ETC



b) Hoeken van 36^o, 72^o en 108^o
Driehoek EDC is gelijkbenig en $\angle DEC = 108^0$
Dus $\angle EDC = \angle ECD = 36^0$
$\angle DCA = 108^0 - 36^0 - 36^0 = 36^0$
Zie verder tekening hiernaast .

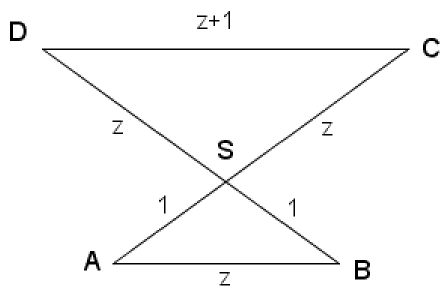
c) Driehoek EQP is gelijkvormig met driehoek EAB en met driehoek DQA.
Driehoek DQE is gelijkvormig met driehoek CAB.

d) Driehoek CSB is gelijkbenig met tophoek C, dus $CS = CB = z$. Dus $CA = CS + SA = z + 1$



Vraag 57

a)



b) $AB \approx 3,4cm$ en $AS \approx 2cm$ dus AB is ongeveer $1,7$ keer zo lang als AS .

c) AB is z keer zo groot als AS
Vanwege gelijkvormigheid van de twee driehoeken geldt: DC is z keer zo lang als CS
Dus $DC = z^2$, maar ook geldt: $DC = z + 1$
Dus $z + 1 = z^2$
Controle: $1,7^2 = 2,89 \approx 1,7 + 1$

d) $z^2 = z + 1 \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0$
Dus $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

e) $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,618$ is hier de juiste waarde voor z.

f) $1,7 \approx 1,618$

Overigens

$\varphi^2 = \varphi + 1$, want $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\cdot 5 = \frac{6}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{4}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{5} = 1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})$

Vraag 58

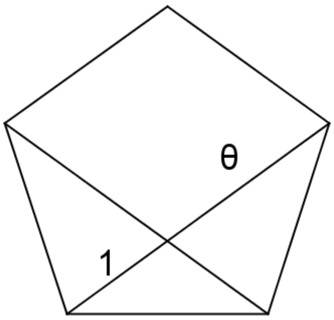
a) $\dfrac{1}{1{,}618} \approx 0{,}618 \approx 1{,}618 - 1$

b) $\varphi^2 = \varphi + 1$ ofwel $\varphi \cdot \varphi = \varphi + 1$, dus $\varphi = \dfrac{\varphi+1}{\varphi} = \dfrac{\varphi}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi} = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$

En als $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$ dan is $\varphi - 1 = \dfrac{1}{\varphi}$

Vraag 59

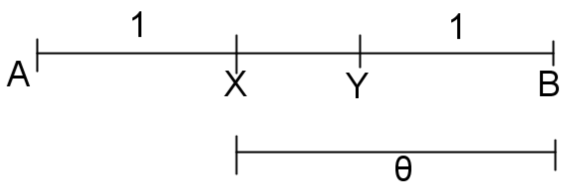
Zie opgave 57



Vraag 60

a) $BX = 1$, $XY = \varphi - 1$

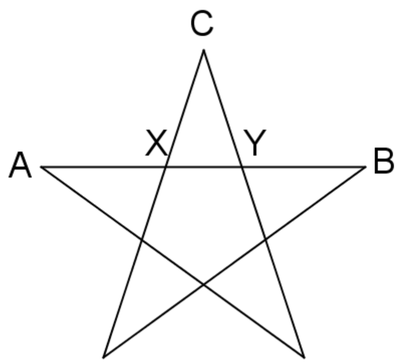
b) $AX = 1$ en $XY = \varphi - 1$



Rekenmachine: $\dfrac{1}{\varphi - 1} \approx 1{,}618 \approx \varphi$

c) Zie opgave 58.

Vraag 61



a) X en Y verdelen AB volgens de gulden snede. Voor het hoekpunt C geldt: $AC = AY$ en $BC = BX$.
Dus is het snijpunt van de cirkels het hoekpunt C.

Afsluitende opdrachten

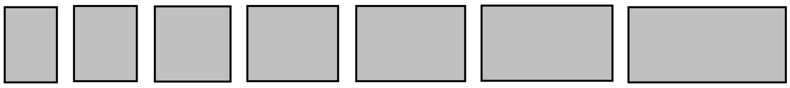
De afsluitende opdrachten A t/m G zijn bedoeld als (groeps)opdrachten ter verwerking van de leerstof. Naar believen kunnen de leerlingen één of meer van deze opdrachten uitvoeren en in een klein werkstuk verwerken.

A. Verhoudingsrijen in de architectuur

Een verhoudingsrij met constante verhouding *c* ziet er zó uit:

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \frac{1}{c^2} \qquad \frac{1}{c} \qquad 1 \qquad c \qquad c^2 \qquad c^3 \qquad c^4 \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Hieronder is de rij in beeld gebracht voor het geval $c = 1{,}2$. De rechthoeken zijn allemaal even hoog; een volgende rechthoek is 1,2 keer zo breed als de vorige.

… …  …. ….

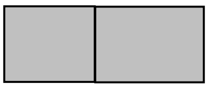
Het gaat hierbij om de horizontale afmetingen, niet om de breedte van de rechthoeken.

Deze verhoudingsrij noemen we de 1,2-rij.

a) Breng op deze manier ook een 1,4-rij in beeld.

In de architectuur wordt vaak met constante verhoudingen gewerkt. Voor afmetingen en afstanden wordt dan bij voorkeur gekozen uit één *c*-rij. Stel dat een architect bij tegelwerk voor de 1,2-rij heeft gekozen.

Er sluiten twee tegels op elkaar aan, bijvoorbeeld:



Dit tweetal vormt een grotere rechthoek:

Het zou mooi zijn als deze grotere rechthoek ook weer in de 1,2-rij zou voorkomen. En dat ook voor alle andere twee opvolgende maten uit de *c*-rij.

Als je twee opvolgende rechthoeken uit de 1,2-rij op elkaar aansluit, ontstaat deze rij:

Merk op dat elke rechthoek twee keer wordt gebruikt, een keer met zijn voorganger en een keer met zijn opvolger.

b) Ga na dat de nieuwe rij weer een verhoudingsrij is. Wat is de constante verhouding?

Deze nieuwe rij is een volledig andere rij: geen enkele rechthoek uit de nieuwe rij kwam in de oorspronkelijke 1,2-rij voor.

c) Ga dat na. (Meten.)

d) Breng op dezelfde manier als de 1,2-rij de φ-rij in beeld; dus waarbij de constante verhouding het gulden getal φ is.

Neem twee opvolgende rechthoeken uit de φ-rij en sluit die op elkaar aan. Dan krijg je precies de volgende rechthoek van de φ-rij.

e) Ga dat na (meten).

Stel dat je de rechthoeken van lengte 1 en φ had gekozen. Op elkaar aangesloten had je dan een rechthoek van lengte $1+\varphi$ gekregen.

f) Leg uit dat dat precies de lengte van de daaropvolgende rechthoek in de φ-rij is.

Stel dat je de rechthoeken φ^2 en φ^3 uit de φ-rij had gekozen.

g) Leg uit dat deze twee op elkaar aangesloten precies de rechthoek van lengte φ^4 is.

En dat is een prettige eigenschap. De architect wil immers met die ene rij met constante verhoudingen werken.

Je kunt ook verschillen nemen van twee opvolgende rechthoeken uit de φ-rij.

h) Ga na dat het verschil van twee opvolgende rechthoeken uit de φ-rij weer in de rij φ-rij zit. (Meten.)

Stel dat je de rechthoeken φ^2 en φ^3 uit de φ-rij had gekozen.

i) Leg uit dat het verschil van deze twee precies de rechthoek met lengte φ is.

Hieronder staat een foto van het University Art Center in Baltimore.

j) Ga na dat de architect Le Corbusier hierin een φ-rij heeft toegepast. (Meten.)

B. Het plastische getal

Voordat aan deze opdracht kan worden begonnen, moet opdracht A. "Verhoudingsrijen in de architectuur" zijn gedaan.

De φ-rij is $\ldots,\ \frac{1}{\varphi^2},\ \frac{1}{\varphi},\ 1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4,\ \ldots$

De verhouding tussen twee opvolgende getallen is steeds hetzelfde, namelijk 1 : φ.

De φ-rij heeft de volgende twee eigenschappen:

- als je twee opvolgende lengtes uit de rij achter elkaar aansluit, krijg je weer dezelfde rij,
- als je twee opvolgende lengtes uit de rij van elkaar aftrekt, krijg je weer dezelfde rij.

Er is nóg een verhoudingsrij met deze twee eigenschappen. Voor de constante verhouding c van die rij geldt: $1 + c = c^3$.

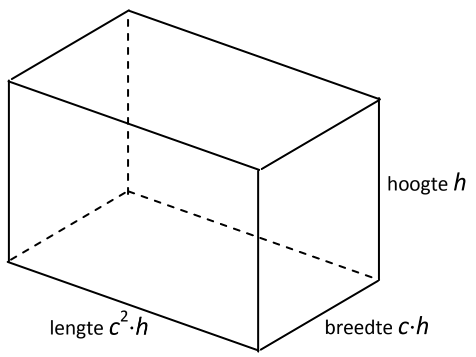
a) Bepaal hoe groot c ongeveer is op je rekenmachine.

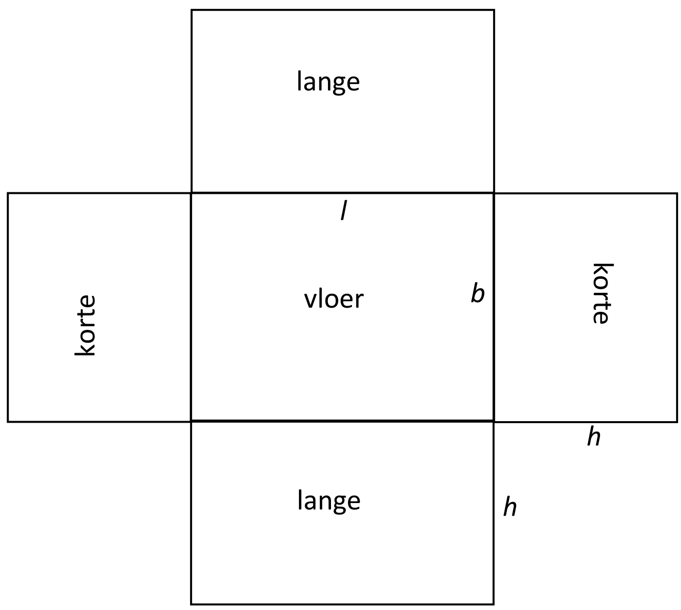
Dit getal heet het **plastische getal**, aangegeven met ψ.

Opmerking Het gulden getal en het plastische getal zijn de twee getallen waarbij de verhoudingsrij de twee bovenstaande eigenschappen heeft. Dat zijn de *enige* getallen met die twee eigenschappen; dat is erg moeilijk te bewijzen.

b) Breng de ψ-rij in beeld zoals dat bij de verhoudingsrijen in opdracht A is gebeurd.

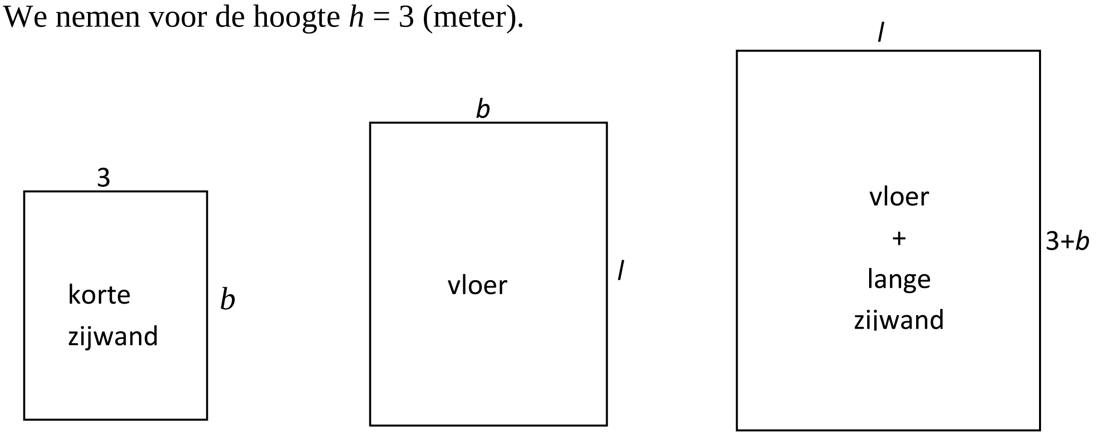
Het plastische getal is toegepast door de Nederlandse architect Dom Hans van der Laan (1904-1991). Een leef-, werk of ontmoetingsruimte in een gebouw heeft vaak de vorm van een balk. Van der Laan koos de breedte b, de lengte l en de hoogte h van zo'n ruimte zo dat: $b = c{\cdot}h$, $l = c{\cdot}b$ en $b+h = c{\cdot}l$, met drie keer dezelfde c.





c) Leg uit dat hieruit volgt dat $1 + c = c^3$ en c dus het plastische getal ψ is.

Op de vorige bladzijde staat de uitslag (= bouwplaat zonder plakrandjes) van een ruimte volgens de verhoudingen van Van der Laan. Het plafond is weggelaten. De volgende rechthoeken zijn gelijkvormig, omdat de verhoudingen tussen breedte en lengte hetzelfde is, namelijk 1 : ψ.
We nemen voor de hoogte $h = 3$ (meter).



d) Bereken b en l (met behulp van de verhoudingsfactor). Je hebt daarvoor maar twee van de rechthoeken nodig. Controleer bij de rechthoek die je niet gebruikt hebt of je antwoorden goed zijn.

e) Maak een maquette voor deze “ideale” ruimte.

Zo kreeg de klassieke leer van de gulden snede een samenhangende driedimensionale toepassing.
Het plastische getal leverde Van der Laan "acht orden van grootte".

$$1 : \psi \approx 3 : 4 \;,$$
$$1 : \psi^2 \approx 4 : 7 \;,$$
$$1 : \psi^3 \approx 3 : 7 \;,$$
$$1 : \psi^4 \approx 1 : 3 \;,$$
$$1 : \psi^5 \approx 1 : 4 \;,$$
$$1 : \psi^6 \approx 3 : 16,$$
$$1 : \psi^7 \approx 1 : 7$$

Samen met de verhouding 1 : 1 zijn dit de acht verhoudingen.

f) Ga na dat bovenstaande afgeronde verhoudingen ongeveer kloppen.

Van der Laan verkreeg zo een verhoudingssysteem dat hij intuïtief als esthetisch juist ervoer en dat hij als basis gebruikte voor zijn architectonische ontwerpen. De wanddikte van een gebouw werd dan als concrete begineenheid in deze reeks genomen en verder uitgebreid tot het gebouw zelf.
Deze leer werd veelvuldig gebruikt binnen de *Bossche School.*

De Titus Brandsma-kapel te Nijmegen is door architect P. Dijkema gebouwd volgens de leer van de Bossche School (1960).

C. Foto's afdrukken

Op het Internet worden allerlei services aangeboden om digitale foto's af te drukken.
Hieronder staat een van de aanbiedingen.

Prijzen mat of glanzend

Formaat	**Prijs**	**Afmeting**	**Verhouding**
9 x 13 cm	€ 0,07	89 x 127 mm	2/3
10 x 13 cm	€ 0,09	95 x 127 mm	3/4
10 x 15 cm	€ 0,05	102 x 152 mm	2/3
11 x 15 cm	€ 0,10	111 x 152 mm	3/4
13 x 13 cm	€ 0,13	127 x 127 mm	1
15 x 15 cm	€ 0,15	152 x 152 mm	1
13 x 17 cm	€ 0,18	127 x 169 mm	3/4
13 x 18 cm	€ 0,18	127 x 178 mm	2/3
13 x 19 cm	€ 0,18	127 x 190 mm	2/3
15 x 20 cm	€ 0,25	152 x 203 mm	3/4
15 x 21 cm	€ 0,25	152 x 216 mm	2/3
20 x 20 cm	€ 0,35	203 x 203 mm	1
20 x 27 cm	€ 0,50	203 x 270 mm	3/4
20 x 30 cm	€ 0,50	203 x 305 mm	2/3

a) Bespreek de samenhang van de drie kolommen "Formaat", "Afmeting" en "Verhouding".

b) Het 10x15-formaat springt er in prijs uit. Hoe zou dat komen?

c) Welke van de andere formaten zijn relatief goedkoop? Waar let je dan op?

Iemand heeft een foto van 140 x 200 mm en wil die laten afdrukken bij deze aanbieder.
De prijs is niet van belang. Bij het bedrijf vindt hij op Internet de volgende informatie.

Wat gebeurt er als het digitale fotobestand niet dezelfde hoogte-breedteverhouding heeft als de bestelde afdruk?
Als het fotobestand in verhouding te hoog is, wordt het op breedte aangepast en wordt het deel van de foto dat boven het afdrukformaat uitkomt afgesneden.
Als het fotobestand in verhouding te breed is, wordt het op hoogte aangepast en wordt het deel van de foto dat rechts van het afdrukformaat uitkomt afgesneden.
In bepaalde situaties kan dit leiden tot doorgesneden koppen of teksten.

d) Welk formaat raad je hem aan? Hoeveel wordt er dan afgesneden?

D. Het holocaust monument in Berlijn

Het holocaust monument, gebouwd op een stuk grond vlakbij de *Reichstag* en de *Brandenburger Tor*, heet officieel *Denkmal für die ermordeten Juden Europas*. Het is in 2005 geopend en kostte 14 miljoen euro. Het monument, ontworpen door de architect Peter Eisenman, beslaat ongeveer 19.000 vierkante meter, de grootte van bijna vier voetbalvelden. Het bestaat uit 2711 donkergrijze, betonnen blokken van gelijke lengte en breedte (0,95 meter bij 2,375 meter), maar variërend in hoogte (van 20 cm tot 4,5 meter). De blokken zijn in rechte lijnen geplaatst, op gelijke afstand van elkaar (0,95 meter), op een golvende bodem die naar het midden toe afloopt. De blokken worden in de volksmond 'stelae' genoemd, wat te vertalen is met 'zerken', steenachtige, naar de hemel wijzende gedenktekens voor de doden. Jaarlijks trekt het monument zo'n drie miljoen bezoekers; het is elk moment van de dag voor het publiek geopend.

a) Maak een plattegrond van een stukje van het holocaust monument.

b) Schrijf de verhouding van de lengte en breedte van de blokken zo eenvoudig mogelijk.

c) Ga na dat de gegevens over de afstand tussen twee blokken, de oppervlakte terrein en de afmetingen van de blokken ongeveer met elkaar kloppen. (Dat het niet helemaal klopt komt door de onregelmatigheden aan de kanten; zie de foto.)

De bezoeker kan vrij tussen de blokken doorlopen. De looppaden zijn bedekt met vierkante stenen. Er passen er acht tussen twee blokken.

d) Hoeveel vierkante stenen zijn er in totaal gebruikt?

We vergelijken het hoogste en het laagste blok.

e) Wat is de verhouding van hun gewicht?

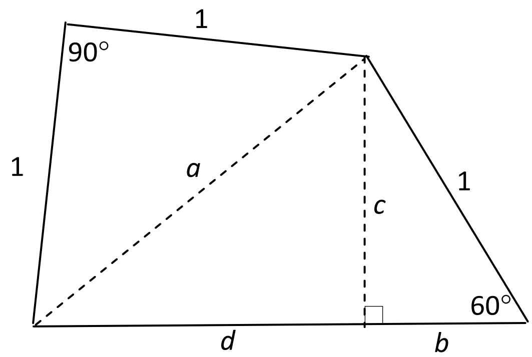
De betonnen blokken zijn voorzien van een anti-graffitilaag; aan vijf kanten, want de onderkant hoeft natuurlijk niet.

f) Wat is ongeveer de verhouding van de oppervlakte van het hoogste en het laagste blok waar de anti-graffitilaag op is aangebracht?

E. Philink

De architectenduo Voet-Theuns heeft voor de firma Ahrend (kantoormeubelen) een speciale tafel ontworpen: *de philink*. Hierboven zie je twee van die tafels tegen elkaar aan geschoven.

Het blad van de philink-tafel heeft drie gelijke zijden. Tussen twee van die zijden is een hoek van 90° en daartegenover een hoek van 60°. Zeg dat de drie gelijke zijden 1 meter zijn. We gaan berekenen hoe lang de vierde zijde dan is.



a) Lijn *a* verbindt twee hoekpunten; zie de figuur. Bereken de lengte van *a*.

We trekken vanuit een hoekpunt de loodlijn op de lange zijde; zie de figuur. De lengte van het loodlijnstuk noemen we *c*.

b) Leg uit dat b = ½ (meter) en bereken c.

Nu we weten hoe lang *a* en *c* zijn, kunnen we *d* berekenen.

c) Bereken *d*.

d) Ga na dat de lengte van de lange zijde van het tafelblad exact het getal φ is.

In werkelijkheid heeft de firma Ahrend het tafelblad zó gemaakt, dat de lange zijde 1,5 meter is.

e) Hoe lang zijn dan de korte zijden?

De oppervlakte van het tafelblad in de tekening bij vraag a is 1,2 m^2.

f) Wat is de oppervlakte van het tafelblad dat Ahrend in werkelijkheid gemaakt heeft?

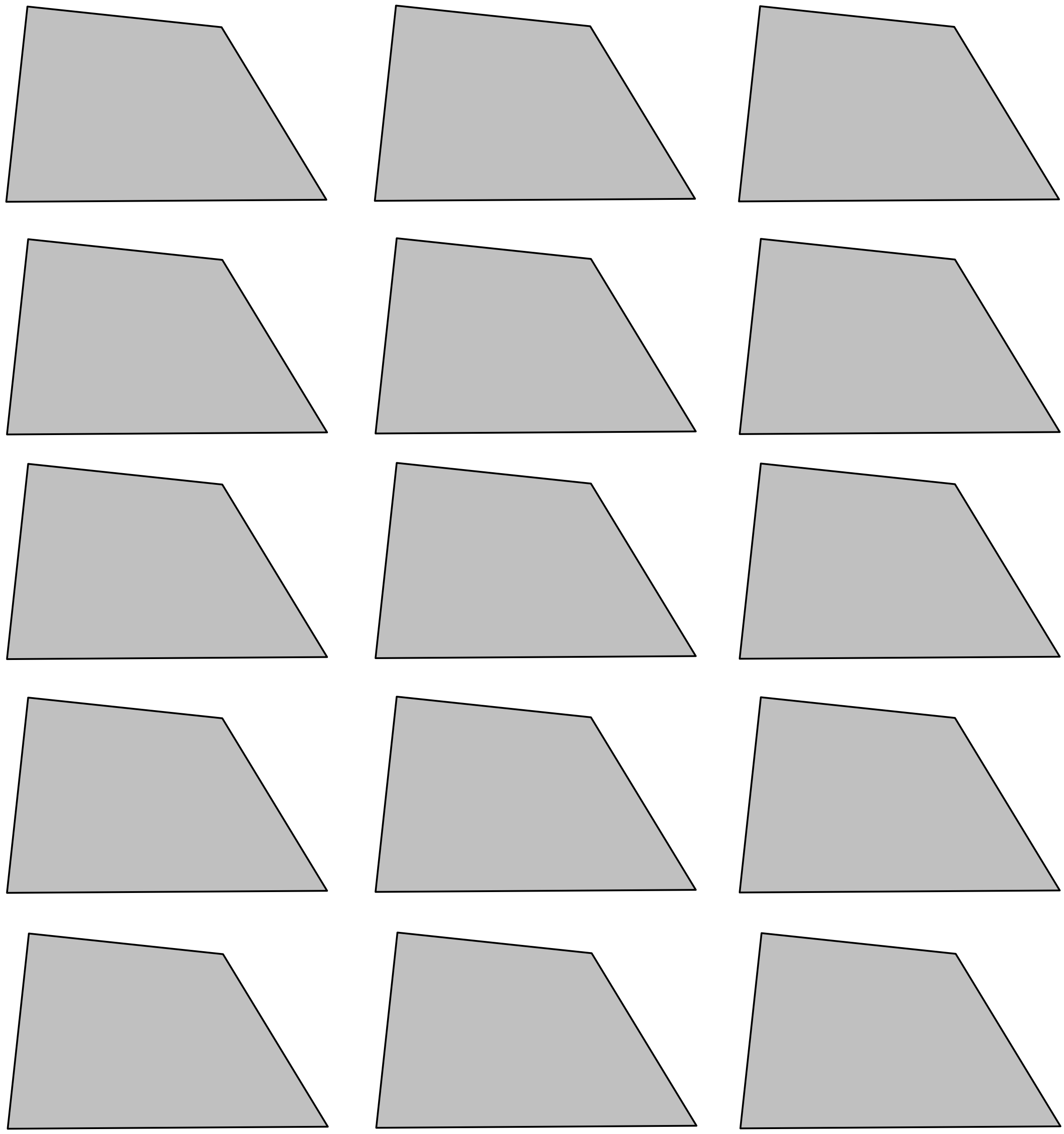
Omdat de tafel drie gelijke zijden heeft en twee “mooie” hoeken, kunnen de tafels op allerlei manieren netjes op elkaar aansluiten. Zo kunnen er kringen “gelinkt” worden, met vierkante, driehoekige en andere functionele opstellingen.

Uit een folder

De constructie is pragmatisch: robuust, licht, economisch en door het zelfdragende blad uit duurzaam ontgonnen reuzenbamboe ook ecologisch.
Omgeving en gebruiker worden op elkaar afgestemd en uitgenodigd om samen te werken. Van individueel werkstation, landschapskantoor, vergaderzaal of executive kantoor, tot kantine, cafetaria, bar, restaurant of lounge, moeiteloos wordt elke situatie ‘samenwerkelijk’.

g) Maak verschillende schakelingen van tafels, bijvoorbeeld in een kring. Wordt de kring precies gesloten? (gebruik het knipblad)

Knipblad bij opdracht E



F. Langwerpigheid

Een lat en een boek zijn beide rechthoekig, maar niet gelijkvormig. Een boek zit vaak dicht bij een vierkant, terwijl een lat langwerpig is. De verhouding van de zijden van een rechthoek geeft aan hoe langwerpig hij is. In deze opdracht gaan we een formule bekijken waarmee je kunt berekenen hoe langwerpig een rechthoek is. De formule moet gelden voor elke rechthoek van $a \times b$. Een rechthoek van 2×3 is even langwerpig als een rechthoek van 3×2. Daarom moet de formule hetzelfde opleveren als je a en b verwisselt.

Bekijk rechthoeken van 2×3, 3×5 , 4×6 , 4×10 , 8×9 en 7×20

a) Zet deze rechthoeken op volgorde van langwerpigheid.

Een rechthoek van 2×3 is even langwerpig als een rechthoek van 3×2. Dus willen we een uitdrukking in a en b die hetzelfde oplevert als je a en b verwisselt.

De langwerpigheid noemen we L. We willen hebben dat:

- als $a > b$, dan moet gelden: hoe groter $\frac{a}{b}$, des te groter L
- als $a = b$, dan is $L = 1$
- als je a en b verwisselt, moet L hetzelfde blijven.

Bekijk de formule $L = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$.

b) Bereken L als $a = 3$ en $b = 4$ en ook als $a = 2$ en $b = 3$.

c) Ga na dat aan de tweede en derde stip voldaan is.

d) Hoe volgt uit de formule dat gelijkvormige rechthoeken dezelfde L-waarde hebben?

Vergelijk een gulden rechthoek en een rechthoek van een A-formaat.

e) Welke van de twee is het langwerpigst?

f) Onderzoek of het volgende waar is.

als een rechthoek even breed en 2 keer zo lang is als een andere rechthoek, dan is zijn L-waarde ook 2 keer zo groot als van de andere rechthoek.

Neem voor $b = 1$. Dan wordt de formule $L = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + a)$.

g) Leg uit dat $L = \frac{1+a^2}{2a}$.

h) Teken de grafiek van L als functie van a. Wat is de minimale waarde van L?

Volgens de eerste stip moet de rechthoek die je in vraag b als de langwerpigste hebt aangewezen, de grootste L-waarde hebben.

i) Leg uit dat voor "extreme" verhoudingen, zoals bij $a = 87$, geldt: $L \approx \frac{1}{2}a$.

G. Pasjes

Bankpas, personeelspas, clubpas (voetbal), klantenpas, rijbewijs, enz. ze hebben allemaal hetzelfde formaat. Dat formaat is vastgelegd door de ISO (International Organization for Standardization) met centraal secretariaat in Genève.

a) Meet na dat zo'n pasje (ongeveer) een gulden rechthoek is.

We plaatsen twee pasjes naast en tegen elkaar zoals hierboven.
De drie gemarkeerde punten liggen exact op één lijn.

b) Leg uit waarom dat zo is.

Als je een rechthoek tekent om de twee pasjes, zoals hierboven, is dat weer een gulden rechthoek.

c) Leg dat uit.

De lijn wordt door het middelste gemarkeerde punt verdeeld volgens de gulden snede.

d) Leg dat uit.

Zes pasjes zijn tegen elkaar aan geschoven.

Scheef daar overheen is een vierhoek getekend.

e) Leg uit dat de hoeken van die vierhoek recht zijn.

De vierhoek is dus een rechthoek.

f) Leg uit dat dat ook weer een gulden rechthoek is.

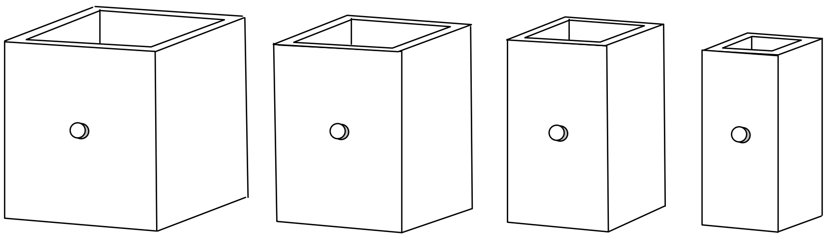
H. Ladekast

De ladekast *Sinka* is door Ehlén Johansson ontworpen voor Ikea. Op de volgende bladzijde staat een afbeelding van de kast.
De lades op de diagonaal van linksonder naar rechtsboven zijn vierkant.
Naar boven worden de lades steeds lager en naar rechts steeds smaller. Dat gebeurt op een regelmatige manier. Als je de hoogte van de lades opmeet vind je ongeveer 17, 24, 31 en 38 mm. Voor de breedtes vind je: 16, 22, 27 en 32 mm.

a) Van welke soort regelmaat is hier sprake?

b) Wat zou de verhouding van de inhouden van de lades zijn als ze allemaal even diep zouden zijn?

In werkelijkheid zijn de lades niet even diep. Hieronder zie je de lades van de onderste rij



Die passen precies in elkaar. Zie bijvoorbeeld het videofilmje
http://www.youtube.com/watch?v=zsbW1rGQ6v8&eurl=http://video.aol.com/video-detail/ikea-ps-bruse-og-sinka/809737209/

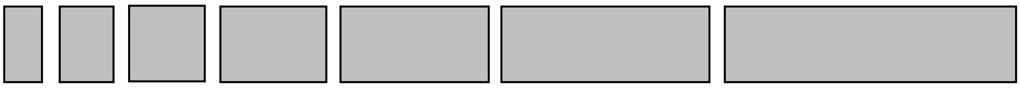
c) Zijn de lades gelijkvormig?

d) Wat is de verhouding van de inhoud van de vier lades? (Met *inhoud* wordt bedoeld de ruimte die gevuld kan worden, tot aan de rand.)

Antwoorden van de afsluitende opdrachten

A. Verhoudingen in de architectuur

a)

……  …

b) De rechthoeken hebben achtereenvolgens lengte 1,53 , 1,83 , 2,2 , 2,64 , 3,17 en 3,80 cm.

De quotiënten van twee opvolgende lengtes zijn (afgerond) alle 1,2. Dus is de nieuwe rij ook een verhoudingsrij en wel met constante verhouding 1,2.

c) De lengtes van de oorspronkelijke rij waren (afgerond): 0,69 , 0,83 , 1 , 1,2 , 1,44 , 1,73 , 2,07 en 2,49 en die zijn allemaal verschillend van de lengtes bij vraag b.

d)

e)

f) De opvolgende rechthoek in de φ-rij heeft lengte φ^2 en φ^2 is gelijk aan $\varphi+1$.

g) $\varphi^2 + \varphi^3 = \varphi^2 \cdot (1 + \varphi) = \varphi^2 \cdot \varphi^2 = \varphi^4$

h) De opvolgende verschillen zijn 0,4 , 0,6 , 1 , 1,6 , 2,6 , 4,2 cm en dat zijn (afgerond) de lengtes in de oorspronkelijke φ-rij.

i) $\varphi^3 - \varphi^2 = \varphi \cdot (\varphi^2 - \varphi) = \varphi \cdot 1 = \varphi$, want $\varphi^2 = \varphi + 1$, dus $\varphi^2 - \varphi = 1$.

j) Op de foto is de hoogte van de tweede verdieping 10 mm, die van de eerste verdieping 16 a 17 mm, en die van de begane grond 2,6 mm (maar dat is niet goed te zien. En dat is de verhouding $1 : \varphi : \varphi^2$.

B. Het plastische getal

a) Door insluiten of met grafieken: c ≈ 1,325
Op de GR met "intersect" of met de "Solver"

b)

c) Omdat $b = c \cdot h$, $l = c \cdot b$ volgt dat $l = c^2 \cdot h$
Invullen in $b + h = c \cdot l$ geeft $h + c \cdot h = c^3 \cdot h$. Delen door h geeft: $1 + c = c^3$.

d) $b = \psi \cdot 3 \approx 3{,}974$, $l = \psi \cdot 3{,}974 \approx 5{,}264$
$3 + b \approx 6{,}974$ en $\psi \cdot l \approx 6{,}974$; dat klopt dus.

e)

f) $\psi \approx 1{,}325$ en $4/3 \approx 1{,}333$
$\psi^2 \approx 1{,}755$ en $7/4 = 1{,}75$
$\psi^3 \approx 2{,}325$ en $7/3 \approx 2{,}333$
$\psi^4 \approx 3{,}079$ en $3/1 = 3$
$\psi^5 \approx 4{,}079$ en $4/1 = 4$
$\psi^6 \approx 5{,}404$ en $16/3 \approx 5{,}333$
$\psi^7 \approx 7{,}159$ en $7/1 = 7$

C. Foto's afdrukken

a) * De "afmeting" wordt afgerond op gehele cm om het "formaat" te krijgen. Dat is niet helemaal consequent gebeurd: 95 mm wordt afgerond op 10 cm, 216 mm op 21 cm en 305 mm op 30 cm.
* De "verhouding" wordt gevonden door van de "afmeting" de getallen door elkaar te delen en dan af te ronden. Je krijgt dan achtereenvolgens:

1,427 ≈ 1,5
1,337 ≈ 1,33
1,490 ≈ 1,5
1,369 ≈ 1,33
1 = 1
1 = 1
1,331 ≈ 1,33
1,402 ≈ 1,5
1,496 ≈ 1,5
1,336 ≈ 1,33
1,421 ≈ 1,5
1 = 1
1,330 ≈ 1,33
1,502 ≈ 1,5

Met name bij "1,402 ≈ 1,5" is de afronding nogal grof.
Men werkt kennelijk maar met drie "standaadverhoudingen", namelijk 1 : 1, 2 : 3 en 3 : 4.

b) Het formaat 10 × 15 cm is het meest voorkomend. Daarom is dat goedkoper.

c) Let op de oppervlakte.

De prijzen in honderstecent per cm^2 zijn achtereenvolgens:

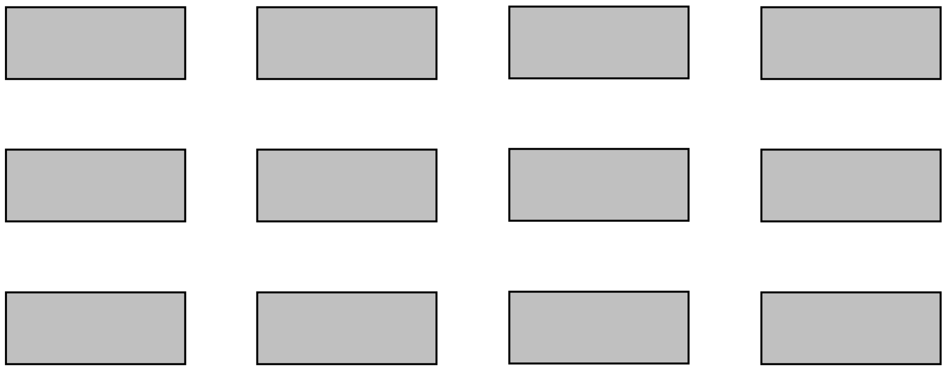
5,98291
6,92308
3,33333
6,06061
7,69231
6,66667
8,1448
7,69231
7,28745
8,33333
7,93651
8,75
9,25926
8,33333

De grotere formaten zijn relatief duur. De formaten met verhouding 3/4 zijn relatief (iets) duurder dan die met verhouding 2/3.

d) De "verhouding van de foto is 200/140 ≈ 1,429
Het dichtst daarbij zit 1,427 (zie b.) Kies dus voor het formaat 9 × 13.
De foto is daarvoor in verhouding te breed. De breedte van de afdruk wordt berekend: 13/9 * 140 = 202,222… . Er wordt dus ruim 2 millimeter van de foto aan de rechterzijkant afgesneden.

D. Holocaust monument

a) schaal 1 : 100



b) 0,95 : 2,375 = (maal 200) = 190 : 475 = (deel door 19) = 10 : 25 = 2 : 5

c) Voor één blok is (met tussenruimte) 1,8 × 3,325 = 5,985 ≈ 6 m^2 nodig. Dit maal het aantal blokken: 2711 × 6 = 16.266 m^2. Dat is iets minder dan de 19.000 m^2 van het hele terrein. Dat komt door het "verlies" aan de kanten.

d) Een blok zelf heeft oppervlakte 0,95 × 2,375 = 2,25625 m^2. Dit maal het aantal blokken geeft 2711 × 2,25625 ≈ 6117 m^2. Van de 16.266 m^2 moet dus 10.149 m^2 bestraat worden.
Op $0{,}95^2$ = 0,9025 m^2 passen 8^2 = 64 stenen. Op 1 m^2 passen dus 64 : 0,9025 ≈ 71 stenen.
In totaal zijn er ongeveer 10.149 × 71, dat is ruim 72.000 stenen.

e) De gewichten verhouden zich als de hoogten, dus als 0,2 : 4,5 = 2 : 45.

f) De oppervlakte van de vijf vlakken van het hoogste blok is 2 × 4,5 × 2,375 + 2 × 4,5 × 0,95 + 0,95 × 2,375 = 32,18125 m^2.

g) De oppervlakte van de vijf vlakken van het laagste blok is 2 × 0,20 × 2,375 + 2 × 0,20 × 0,95 + 0,95 × 2,375 = 3,58625 m^2.
De verhouding is ongeveer 1 : 9.

E. Philink

a) De stelling van Pythagoras levert: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ m

b) Het deel van het tafelblad rechts van de loodlijn is een halve gelijkzijdige driehoek. *b* is de lengte van de helft van de zijde van die gelijkzijdige driehoek, dus ½.

of $b = 1 \cdot \cos 60° = 1 \cdot ½ = ½$.

De stelling van Pythagoras levert $c = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$ m.

of: $c = 1 \cdot \sin 60° = 1 \cdot ½\sqrt{3} \approx 0{,}87$ m.

c) $d = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2 - 0{,}75} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}12$ m.

d) De lengte van de lange zijde van het tafelblad is exact $b + d = ½ + \sqrt{1{,}25} = ½ + ½\sqrt{5} = \varphi$.

e) In werkelijkheid zijn de zijden 1,5 / φ keer zo groot. De korte zijden zijn dus 0,927 m.

f) $(0{,}927)^2 \cdot 1{,}2 \approx 1{,}031$ m^2.

F. Langwerpigheid

a) Volgorde: 7×20 , 4×10 , 3×5 , 2×3 = 4×6 , 8×9

b) $L = \dfrac{25}{24} \approx 1{,}042$; $L = \dfrac{13}{12} \approx 1{,}083$

c) Tweede stip: $L = \frac{1}{2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Derde stip: Als je a en b verwisselt, krijg je: $\frac{1}{2}(\frac{b}{a} + \frac{a}{b})$ en dat is hetzelfde als *L*.

d) Als twee rechthoeken gelijkvormig zijn is het quotiënt van lengte en breedte hetzelfde. Dus in de formule zijn $\dfrac{a}{b}$ en ook $\dfrac{b}{a}$ gelijk.

e) De L-waarde van een gulden rechthoek is $\varphi - \frac{1}{2} \approx 1{,}118$

De L-waarde van een A-formaat rechthoek is $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1{,}061$

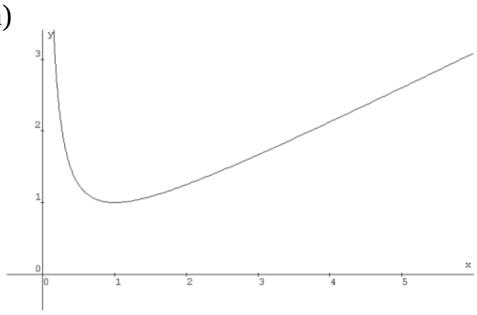
Dus een gulden rechthoek is langwerpiger dan een A-formaat rechthoek.

f) Dat is niet waar. Dat zie je bijvoorbeeld aan rechthoeken van 1×2 en 1×4. De eerste heeft L-waarde $\frac{5}{4}$, de tweede $\frac{17}{8}$.

Algemeen: als je de lengte verdubbelt, wordt de L-waarde minder dan verdubbeld.

g) $L = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + a) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a}) = \frac{1}{2}(\frac{1+a^2}{a}) = \frac{1+a^2}{2a}$

h)



L is minimaal 1, namelijk als $x = 1$ (als de rechthoek een vierkant is.)

i) We hebben $b=1$ genomen. Als $a > b$, hebben we te maken met het deel van de grafiek rechts van het minimum. Daar is de grafiek stijgend. Dus hoe groter a, des te groter L.

j) Dan is $\frac{1}{a}$ bijna 0. Dus dan is $L \approx \frac{1}{2} \cdot (0 + a) = \frac{1}{2} a$.

G. Pasjes

a) 86 mm bij 54 mm. 86 / 54 ≈ 1,6 ≈ φ

Opmerking: het klopt dus niet helemaal. als de pasjes 86 bij 53 mm waren geweest, zou het quotiënt 1,62… geweest zijn, was dichter bij φ ligt.

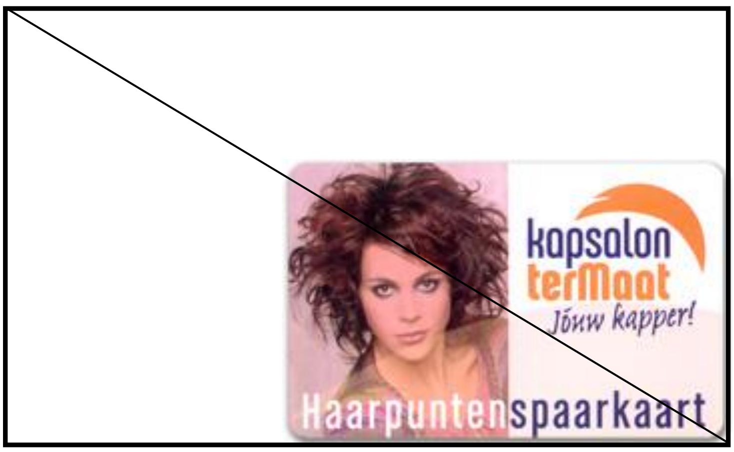
De afmetingen van pasjes zijn vastgelegd in Genève.

b) Als je van "cadeaupas" een vierkant aan de onderkant weghaalt, houd je weer een gulden rechthoek over. Die is dus gelijkvormig met de rechthoek "Haarpunten-spaarkaart".
Hun diagonalen liggen dus in elkaars verlengde.

c) Omdat de diagonalen over elkaar heen liggen, is de nieuwe rechthoek gelijkvormig met de "Haarpunten-spaarkaart" en dus weer een gulden rechthoek.

of

Een pasje heeft afmetingen a bij φa.
De nieuwe rechthoek heeft dan zijden van φa bij a + φa = a(1+ φ) = a · $φ^2$.
De zijden verhouden zich dus als 1: φ.



d) Onder de diagonaal zie je twee gelijkvormige driehoeken. Op de horizontale onderkant verhouden zich de stukken als 1 : φ. Dus ook op de diagonaal.

e) De lange zijde van de scheve rechthoek is diagonaal in de rechthoek van vraag c. In vraag c is uitgelegd dat die φ keer zo lang is als de diagonaal van het pasje "Haar-puntenspaarkaart"; en dat is precies de korte zijde van de scheve rechthoek. .

H. Ladekast

a) De opeenvolgende hoogtes van de lades verschillen steeds 7 mm. De breedtes van de lades verschillen steeds 5 mm. De afmetingen in verticale richting zijn hier te gebruiken. Het front van de lade linksonder is in werkelijkheid vierkant. De breedte is op de foto niet gelijk aan de hoogte vanwege perspectivische vertekening.
De opeenvolgende verhoudingen van de hoogtes van de lades zijn: $\frac{31}{38} \approx 0{,}82$, $\frac{24}{31} \approx 0{,}77$, $\frac{17}{24} \approx 0{,}71$

b) De lades in één kolom zijn allemaal even breed. We nemen aan dat ze ook allemaal even diep zijn. In dat geval worden de verhouding van de inhouden alleen bepaald door de verhoudingen van de hoogtes, dus de inhoud van de bovenste lade is ongeveer 0,71 keer zo groot als de inhoud van de een na bovenste lade. Dezelfde verhoudingen als bij vraag a gelden voor de lades in één kolom.

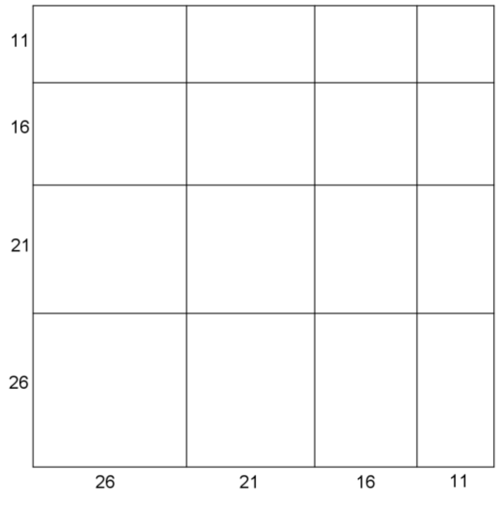
De lades in één rij zijn allemaal even hoog. De verhoudingen van de inhouden van opeenvolgende lades worden bepaald door de verhouding van de breedtes van de lades. Zo is de inhoud van de tweede lade van links ongeveer 0,82 keer de inhoud van de meest linkse lade. Dezelfde verhoudingen als bij vraag a gelden voor de lades in één rij.

De lades op de diagonaal van linksonder naar rechtsboven veranderen zowel in hoogte als breedte. De diepte blijft constant. Hun opeenvolgende onderlinge verhoudingen zijn dan $(\frac{31}{38})^2 \approx 0{,}67$, $(\frac{24}{31})^2 \approx 0{,}60$ en $(\frac{17}{24}) \approx 0{,}50$

c) De lades in elke rij zijn niet gelijkvormig, want ze blijven even hoog. De laatjes in elke kolom zijn ook niet gelijkvormig, want de breedte blijft gelijk. Uitsluitend de kubusvormige laatjes op de diagonaal worden in elke richting met een zelfde factor vermenigvuldigd.

d) De lades zijn allemaal even hoog. De breedte en de diepte worden elk vermenigvuldigd met de factoren zoals die bij vraag a staan. De verhoudingen van de inhouden zijn dan $(\frac{31}{38})^2 \approx 0{,}67$, $(\frac{24}{31})^2 \approx 0{,}60$ en $(\frac{17}{24}) \approx 0{,}50$

De werkelijke afmetingen van de fronten van de lades zijn in de tekening hiernaast aangegeven.



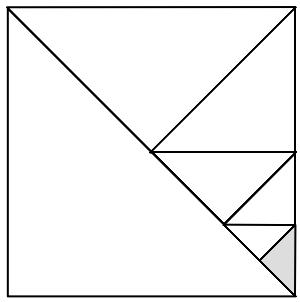
Schaduwopgaven

Hieronder volgen nog een aantal losse vragen die desgewenst gebruikt kunnen worden als toetsvragen of als schaduwopdrachten ter introductie of bespreking van een deelonderwerp uit het lespakket. De nummers verwijzen naar vergelijkbare opdrachten in het leerstofpakket *Verhoudingen*.

bij 5

Een vierkant wordt verknipt in zeven driehoeken, zoals hiernaast. Het grijze driehoekje gooien we weg.

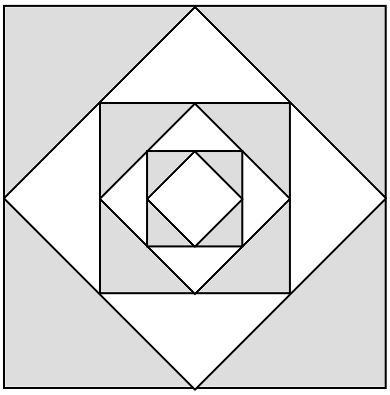
Wat is de verhouding van de oppervlakte van de andere zes?



bij 6

De figuur hiernaast is gedeeltelijk grijs en gedeeltelijk wit.

Welk deel is grijs?

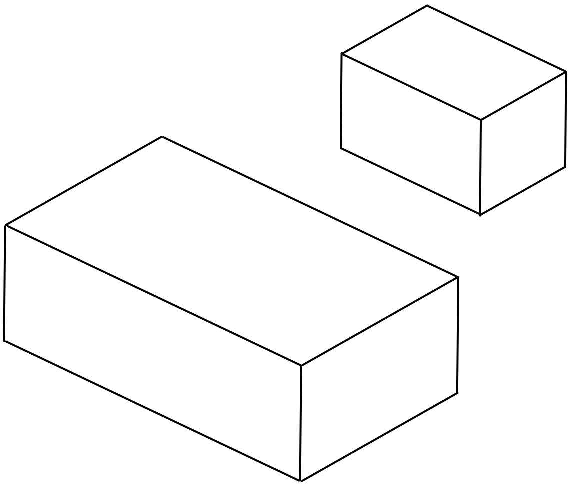


bij 11

We vergelijken twee dozen. De ene doos is 2 keer zo lang, 1,5 keer zo breed en 1,2 keer zo hoog als de andere doos.

Logisch dat de ene doos een grotere inhoud heeft dan de andere.

Hoeveel keer zo groot?



bij 14

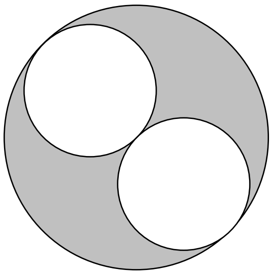
Van een serie van zes piramides verhouden de hoogtes zich als 6:5:4:3:2:1. De grondvlakken zijn even breed; hun lengtes verhouden zich als 5:6:7:8:9:10.

Hoe verhouden zich hun inhouden?

In Amsterdam (Watergraafsmeer) staat het kunstwerk *Horizontaal beeld* van Henk van Bennekum (1987).

bij 16

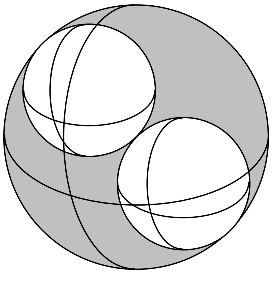
In een cirkel passen twee kleinere cirkels. Die twee kleinere cirkels zijn even groot. Er blijft een grijze oppervlakte binnen de grote cirkel over.



a) Hoeveel procent is dat van de grote cirkel?

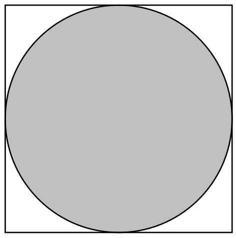
In een bol passen twee kleinere bollen. Die twee kleinere bollen zijn even groot. Er blijft een grijze inhoud binnen de grote bol over.

b) Hoeveel procent is dat van de grote bol?



bij 19

Hiernaast zie je een cirkel in een vierkant van 3×3 cm.
We rekken het vierkant op: we maken het 2,5 keer zo breed en 1,5 keer zo hoog. De cirkel wordt mee opgerekt tot een ellips.



a) Teken de rechthoek die je krijgt en schets daarin de ellips.

De oppervlakte van de cirkel is (ongeveer) 7,1 cm^2.

b) Wat is de oppervlakte van de ellips?

Een bol past precies in een kubus van 3×3×3 cm.
We rekken de kubus op tot een balk van 6×5×4 cm. De bol wordt mee opgerekt.
De inhoud van de bol is (ongeveer) 41,3 cm^3.

c) Wat is de inhoud van de opgerekte bol?

bij 22

In 2007 bedroeg het aantal fietsen in Nederland en in onze buurlanden (gegevens 2008):

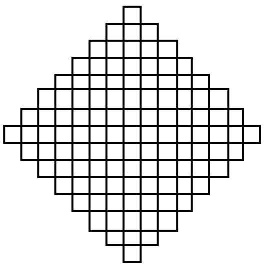
- Nederland: 18 miljoen
- België: 5,2 miljoen
- Duitsland: 66 miljoen

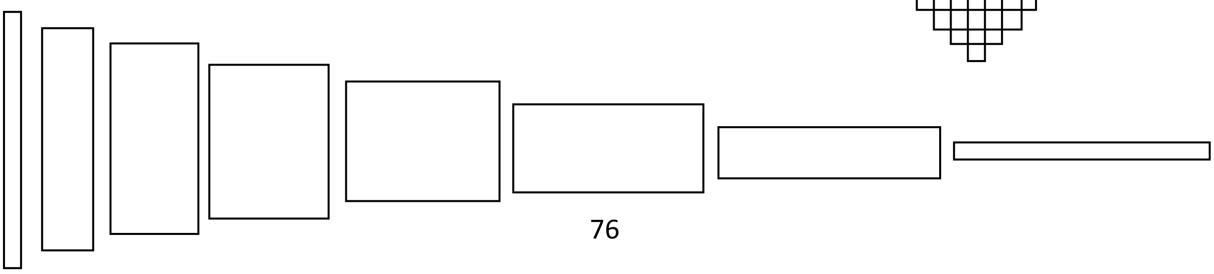
Maak een kaartje van deze drie landen, waarbij de landen als vierkanten afgebeeld worden waarvan de oppervlakte aangeeft hoeveel fietsen het land telt.

na 23

Rechthoek in ontwikkeling

In de figuur hiernaast zijn acht rechthoeken over elkaar heen getekend.
Hieronder zijn de rechthoeken afzonderlijk getekend, in ontwikkeling van hoog-smal naar laag-breed.





a) Leg uit dat alle rechthoeken dezelfde omtrek hebben.

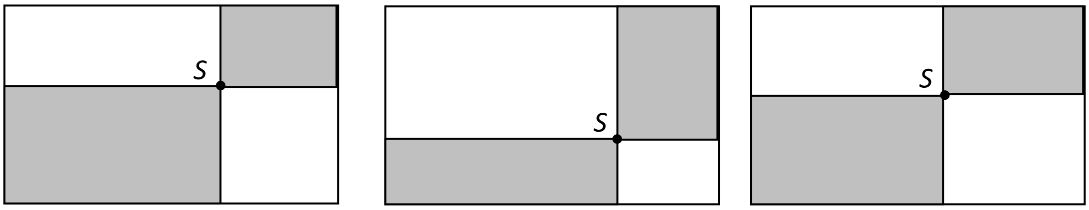
b) Wat is de verhouding van de horizontale en verticale zijde?

Ze hebben niet dezelfde oppervlakte. Zeg dat de uiterste rechthoeken oppervlakte 15 hebben.

c) Wat is dan de oppervlakte van de andere?

bij 27

Binnen een rechthoek kiezen we een punt *S*. Door *S* trekken we een horizontale en een verticale lijn. Zodoende wordt de rechthoek verdeeld in vier stukken, twee grijze en twee witte. Hieronder is dat drie keer uitgevoerd.



a) Waar moet je S kiezen opdat de grijze delen gelijkvormig zijn?

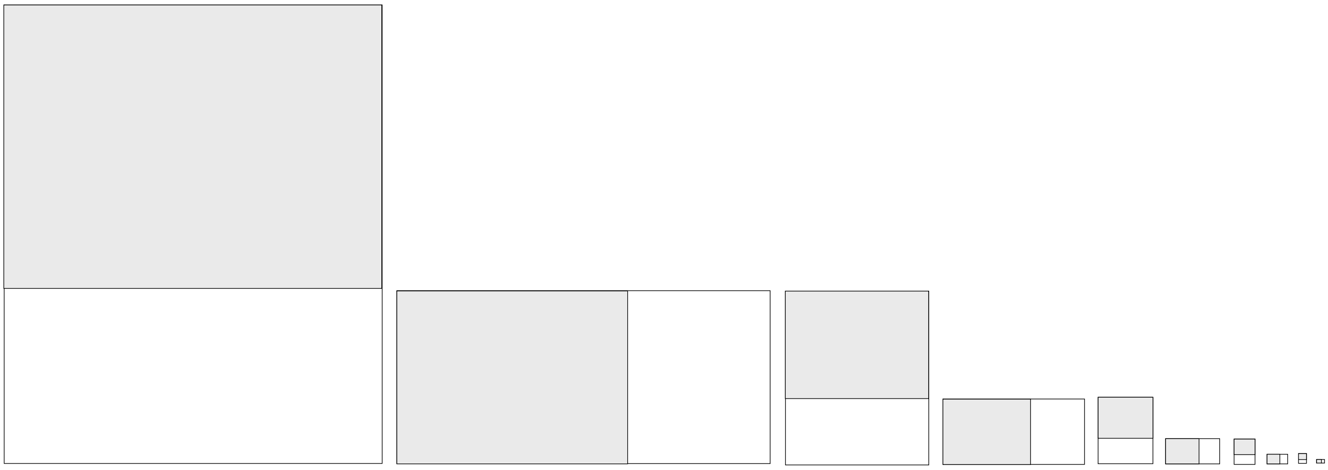
b) Waar moet je S kiezen opdat de witte delen gelijkvormig zijn?

c) Waar moet je S kiezen opdat alle vier de delen gelijkvormig zijn?

na 39

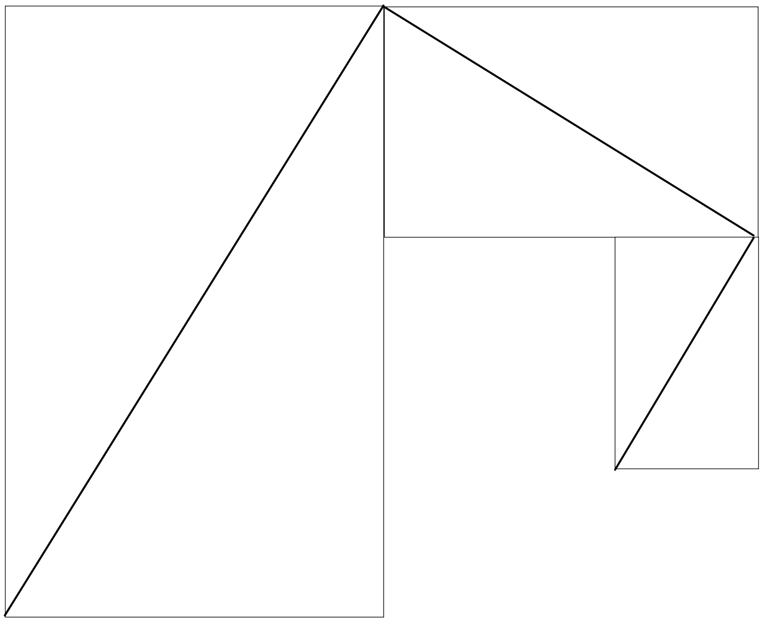
Begin met een gulden rechthoek van 10 bij (ongeveer) 16,2 cm. Snijd er een vierkant vanaf; dat is grijs in de figuur. Er blijft een gulden rechthoek, waarvan we weer een vierkant afsnijden, zoals in de figuur. Enzovoort.

Zodoende krijgen we een oneindige rij gulden rechthoeken.



Daarmee kun je een spiraal leggen. Hieronder is een begin gemaakt. Daarin zijn ook de diagonalen getekend die op elkaar aansluiten.

a) Kopieer onderstaande figuur en teken er nog enkele rechthoeken bij. Teken daarin ook de diagonalen die op elkaar aansluiten.



De diagonalen vormen de **gulden spiraal**.

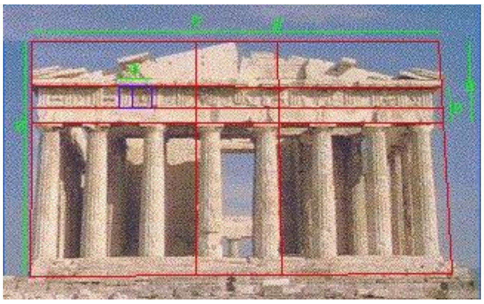
b) Waarom maken de opvolgende diagonalen rechte hoeken met elkaar?

c) Elke volgende diagonaal is korter dan de vorige. Hoeveel procent korter?

d) Geef in de figuur op het werkblad het oog van de spiraal aan.

bij 40

Parthenon



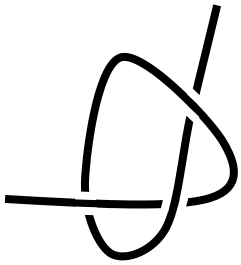
Volgens sommigen is de gulden snede de ideale verdeling. Mensen zouden die prefereren in allerlei situaties. Daarom zou hij bewust of onbewust worden toegepast in architectuur en kunst. Zo zouden de oude Grieken de gulden snede al gebruikt hebben in het Parthenon: de hoogte van de pilaren verhoudt zich tot de hoogte van het timpaan (de driehoek op de zuilen) volgens de gulden snede. Maar hard kan dit niet gemaakt worden. Zo kun je in elke figuur wel merktekens aanbrengen volgens de gulden snede.

Ga na dat de hoogte van de pilaren en de hoogte van het timpaan de gulden verhouding hebben.

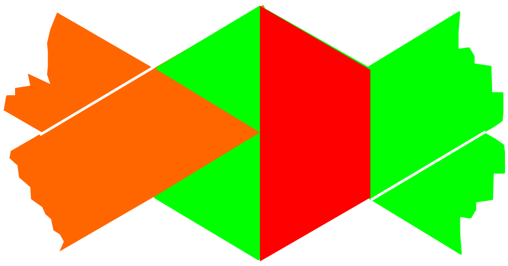
bij 46

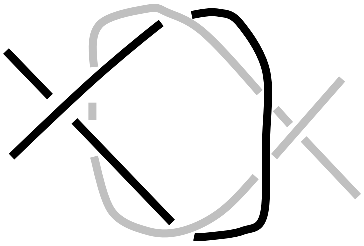
Knopen

a) Neem een reep papier. Maakt daarin een enkelvoudige knoop.
   Trek de knoop aan. En er ontstaat een regelmatige vijfhoek.



b) Neem twee even brede repen papier en maak met elk een lus.
   Vlecht de lussen door elkaar heen en trek ze strak. Er ontstaat een regelmatige zeshoek.

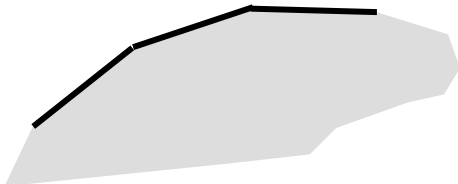




bij 49

Een regelmatige veelhoek heeft hoeken van 160°.

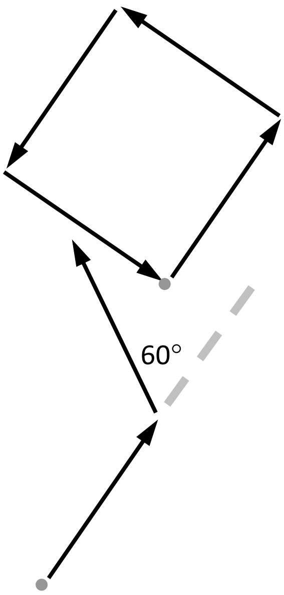
Hoeveel hoekpunten heeft de veelhoek?



bij 50

Als je 10 meter loopt, dan een rechte hoek naar links maakt, weer 10 meter loopt, een rechte hoek naar links maakt, 10 meter loopt, een haakse hoek naar links maakt en nog eens 10 meter loopt, ben je weer op je uitgangspunt terug: je hebt een vierkant beschreven.

We lopen nu weer steeds 10 meter en maken steeds een hoek van 60° naar links

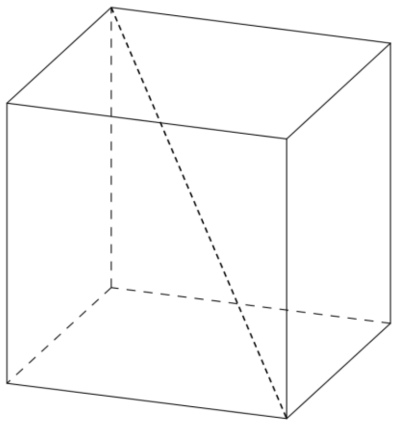


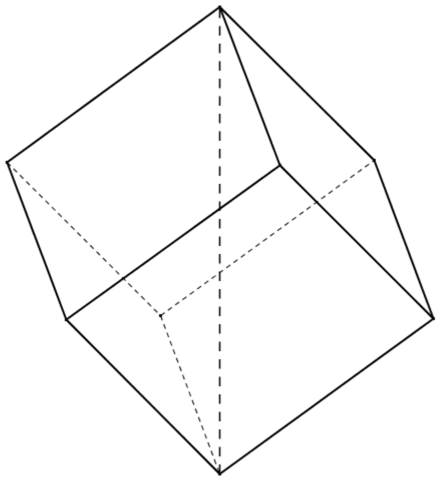
a) Hoe vaak moet je dat doen alvorens op het uitgangspunt terug te komen?
   Maak eventueel een tekening op schaal.
b) En als je steeds een hoek van 45° naar links maakt?

bij 54

Kubus op punt

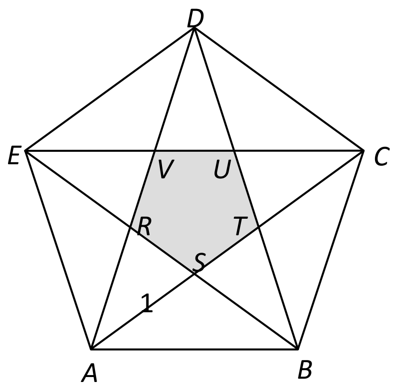
Zet een kubus op zijn punt, dus met een lichaamsdiagonaal verticaal. Snijd de kubus op halve hoogte door.





a) Wat voor figuur is de snijfiguur?
b) Als de ribbe van de kubus 1 is, wat is dan de zijde van de snijfiguur?

De kubushuizen van architect Piet Blom op de Maasoever in Rotterdam zijn kubussen op een punt. Op halve hoogte is een vloer aangebracht, dat is een zeshoek



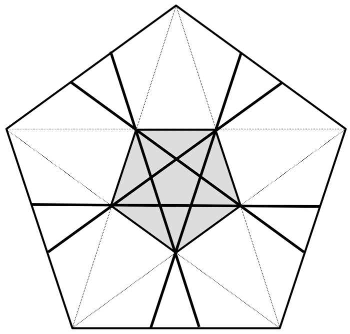
na 57

a) Laat zien dat $VU : UC = \varphi - 1 : 1 = 1 : \varphi$.

De diagonalen begrenzen in het midden een kleinere vijfhoek *RSTUV*.

b) Laat zien de verhouding tussen de zijde van de kleinere vijfhoek en de zijde van de grote vijfhoek $1 : \varphi^2$ is.

c) Wat is de verhouding tussen de oppervlakte van de kleine vijfhoek en de oppervlakte van de grote vijfhoek?



De grote vijfhoek is dus meer dan 6 keer zo groot als de kleine vijfhoek. Dat kun je ook zien in de figuur hiernaast.

d) Leg uit hoe je dat in de figuur ziet.

bij 58

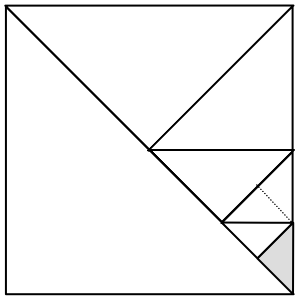
a) Ga op je rekenmachine na dat $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.

Je weet dat $\varphi^2 = \varphi + 1$?

b) Hoe volgt hieruit dat $\varphi^3 = 2\varphi + 1$?

Antwoorden schaduwopgaven

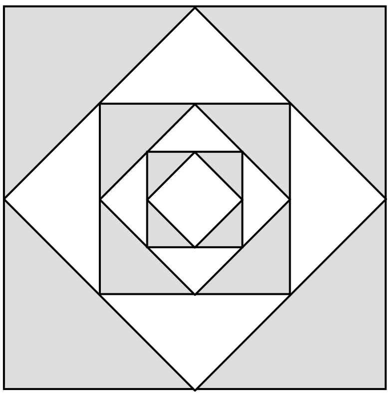
bij 5



Aan het stippellijntje zie je dat het kleinste driehoekje twee keer past in het op een na kleinste driehoekje. Enzovoort.

De verhouding is: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32.

bij 6



De buitenste vier grijze driehoeken zijn samen de helft van het vierkant.

De middelste vier grijze driehoeken zijn 4 keer zo klein, dus samen 1/8 van het vierkant.

De binnenste grijze driehoeken zijn nog eens vier keer zo klein, dus samen 1/32 van het hele vierkant.

Samen dus 1/2 + 1/8 + 1/32 = 21/32 van het hele vierkant.

bij 11

De grote doos heeft een $2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2 = 3{,}6$ keer zo grote inhoud.

bij 14

De inhouden verhouden zich als $6 \cdot 5 : 5 \cdot 6 : 4 \cdot 7 : 3 \cdot 8 : 2 \cdot 9 : 1 \cdot 10$,

dat is als 30 : 30 : 28 : 24 : 18 : 10,

dat is als 15 : 15 : 14 : 12 : 9 : 5

bij 16

a) De straal van een kleine cirkel is ½ van de straal van de grote cirkel. Dus is de oppervlakte van een kleine cirkel $(½)^2$ = ¼ van de oppervlakte van de grote cirkel.

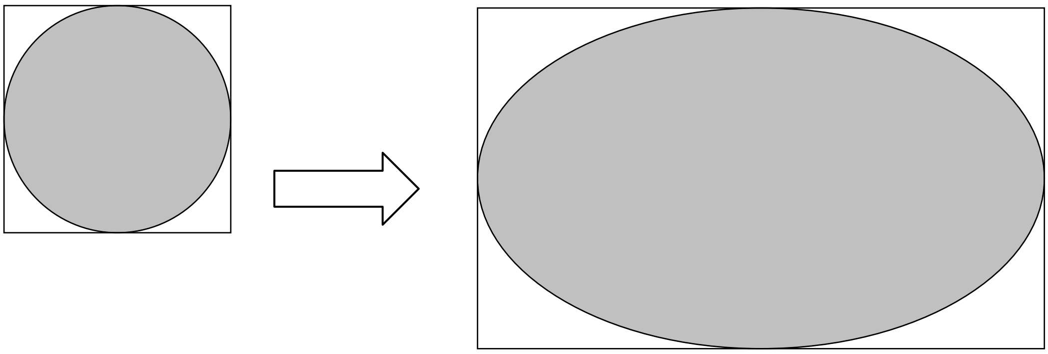
Het grijze gebied is dus 100% − 2 · 25% = 50% van de grote cirkel.

b) De straal van een kleine bol is ½ van de straal van de grote cirkel. Dus is de inhoud van een kleine cirkel $(½)^3$ = 1/8 van de inhoud van de grote bol.

Het grijze gebied is dus 100% − 2 · 12,5% = 75% van de grote bol.

bij 19

a)

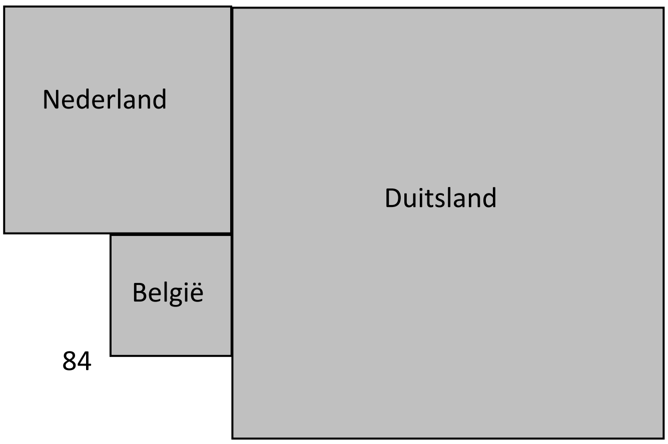


b) 2,5 · 1,5 · 7,1 = 26,625 cm^2

c) $\frac{6}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 41{,}3 \approx 183{,}6\ cm^3$

bij 22

We geven de landen weer met vierkanten met oppervlakte 9, 2,6 en 33 cm^2, dus met zijden van (ongeveer) 3 , 1,6 en 5,7 cm.



na 23

a) Vergelijk een paar opvolgende rechthoeken.
De tweede (rechter) rechthoek is 2 hokjes breder en 2 hokjes lager dan de eerste rechthoek. Dus is hun omtrek hetzelfde. Dat geldt voor elk paar opvolgende rechthoeken.

b) 1 : 15 , 3 : 13 , 5 : 11 , 7 : 9 , 9 : 7 , 13 : 3 , 15 : 1

c) 39 , 55 , 63 , 63 , 55 , 39

bij 27

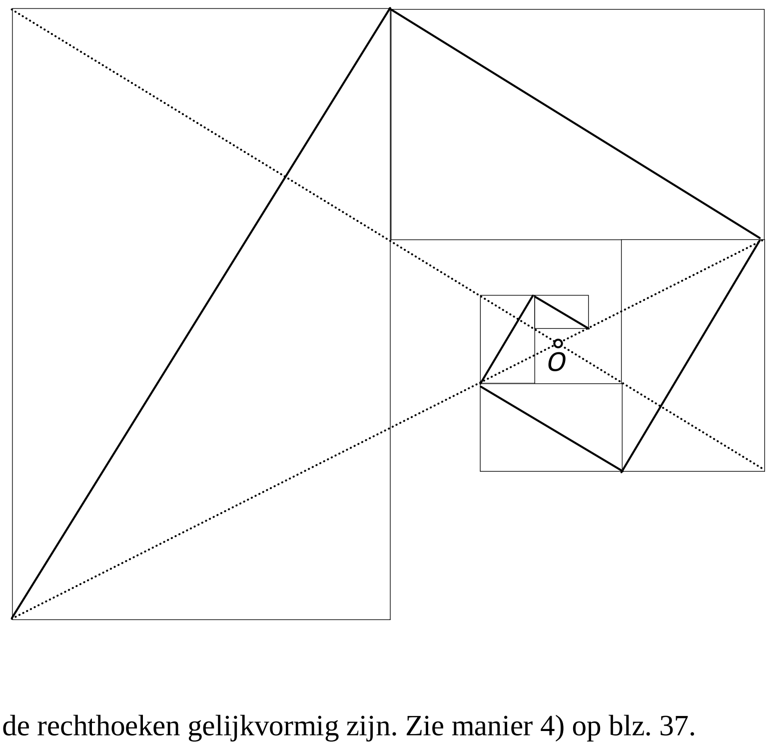
a) Op de diagonaal van linksonder naar rechtsboven.

b) Op de diagonaal van rechtsonder naar linksboven.

c) Het snijpunt van de diagonalen.

na 39

a)



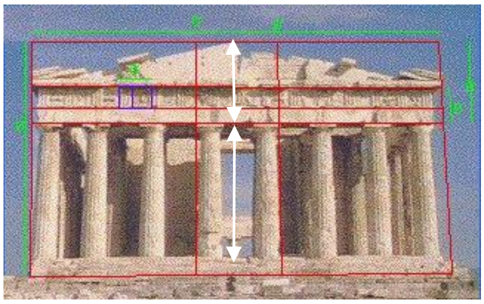
b) Omdat de rechthoeken gelijkvormig zijn. Zie manier 4) op blz. 37.

c) De zijden van een rechthoek zijn $\varphi-1$ keer zo lang als de overeenkomstige zijden van de vorige rechthoek (dat zie je bijvoorbeeld aan de korte zijden). Diezelfde factor is van toepassing op de diagonalen. De diagonaal van een rechthoek is dus $1-(\varphi-1)$ korter dan de diagonaal van de vorige rechthoek. Dat is $(2-\varphi)\cdot 100\ \% \approx 38{,}1\ \%$.

d) Het oog is het punt *O* in het plaatje bij a). Dat is het snijpunt van twee verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten van twee “staande” rechthoeken.
Een volgende "staande" rechthoek krijg je door de vorige te vermenigvuldigen ten opzichte van *O* met factor $(\varphi-1)^2$.

bij 40

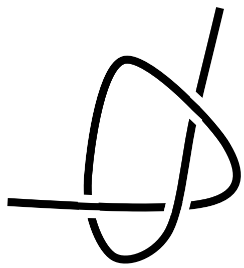
Meten in de figuur.
De hoogte van de pilaren is 18 mm,
de hoogte van het timpaan is 11 mm.
$18 / 11 \approx 1{,}64 \approx \varphi$.



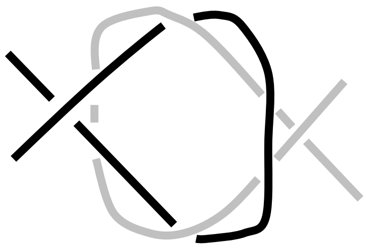
bij 46

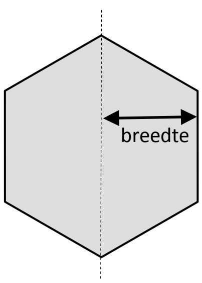
a) Vergelijk dit met opgave 46a. Daar wordt een reep papier gewikkeld om een regelmatige vijfhoek.

Bij met maken van een enkelvoudige knoop doe je precies hetzelfde.



b) Wikkel twee stroken papier om een regelmatige zeshoek van stevig karton, zoals in de figuur. De stroken moeten de juiste breedte hebben.





Bij het vlechten van twee stukken papier, doe je precies hetzelfde.

bij 49

In opgave 47b heb je gevonden dat een hoek van een regelmatige n-hoek $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$ meet.

Als dat 160° is, moet $\frac{n-2}{n} = \frac{160}{180} = \frac{16}{18}$.

Dat is zo als $n = 18$.

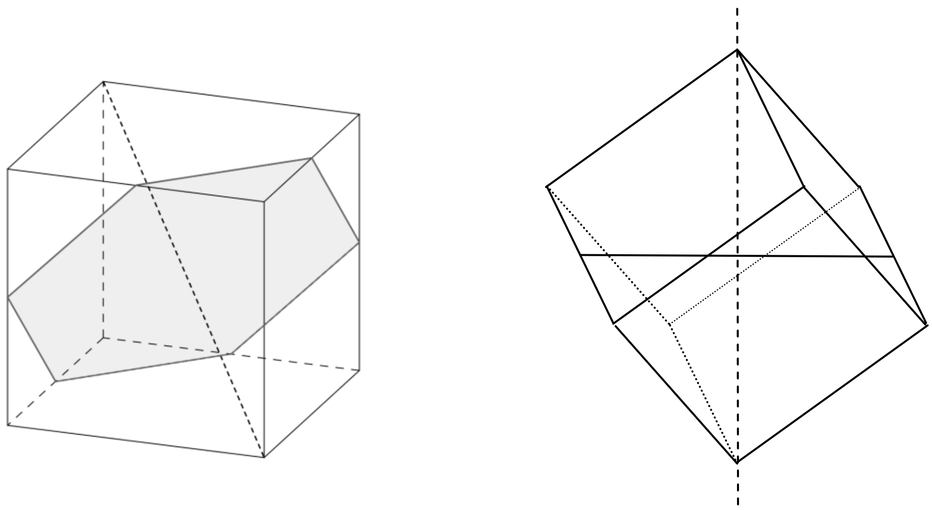
bij 50

a) Als je op je uitgangspunt terugkomt, heb je in totaal een volledige draai gemaakt, van 360°. Per hoek verandert je looprichting met 60°. Je moet dus 6 hoeken maken: je beschrijft een regelmatige zeshoek.

b) Als je op je uitgangspunt terugkomt, heb je in totaal een volledige draai gemaakt, van 360°. Per hoek verandert je looprichting met 45°. Je moet dus 8 hoeken maken: je beschrijft een regelmatige achthoek.

bij 54

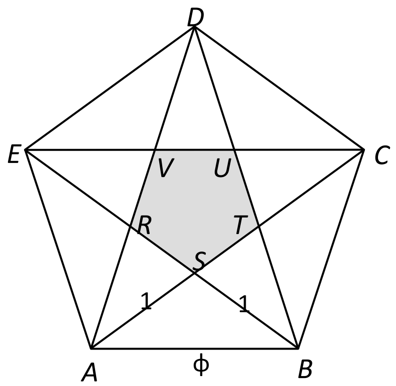
a) De doorsnede is een regelmatige zeshoek.



b) De zijvlakdiagonaal heeft dan lengte $\sqrt{2}$ en de zijde van de zeshoek is de helft daarvan: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

na 57

a) Uit opgave 57 weten we het volgende:



als $AS = BS = 1$, dan $AB = \varphi$.

$VC = AB = \varphi$ en $UC = AS = 1$;

dus $VU = \varphi - 1$.

Hiermee is aangetoond dat $VU : UC = \varphi - 1 : 1$.

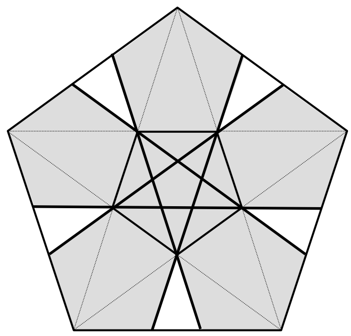
$\frac{\varphi - 1}{1} = \frac{1}{\varphi}$, als $\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$, dus als $\varphi^2 - \varphi = 1$, dus als $\varphi^2 = \varphi + 1$, en dat is zo.

b) Die verhouding is $(\varphi - 1) : \varphi$. Vermenigvuldig $\varphi - 1$ en φ beide met φ. Dan krijg je de verhouding $(\varphi^2 - \varphi) : \varphi^2 = 1 : \varphi^2$.

c) De oppervlaktes verhouden zich als de kwadraten van de zijden, dus als $1^2 : (\varphi^2)^2 = 1 : \varphi^4$.

d) $\varphi^4 \approx 6{,}854$, dus is de grote vijfhoek inderdaad meer dan 6 keer zo groot als de kleine vijfhoek.

Hiernaast zie je hoe de kleine vijfhoek zes keer in de grote vijfhoek past.



bij 58

a) $\varphi^3 \approx 4{,}236$ en $2\varphi \approx 3{,}236$

b) $\varphi^2 = \varphi + 1$

vermenigvuldig beide kanten met ϕ

$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$

$\varphi^3 = \varphi + 1 + \varphi$

$\varphi^3 = 2\varphi + 1$