

# Logisch redeneren

## deel 2

Onderwerpen:

- Kwantoren en Venn-diagrammen
- Contradicties en paradoxen
- Axiomatische systemen en grammatica's

## Hoofdstuk 7 Uitbreiding met kwantoren

- 1 Zie het krantenartikel hiernaast. Neem aan dat die kop letterlijk waar is. Je bent er achtergekomen dat Nico een Amsterdammer is. Wat kun je zeggen over de eerlijkheid van Nico?

### Amsterdammer niet eerlijk

**Van een verslaggever**

**AMSTERDAM – Amsterdammers zijn geen eerlijke mensen. Slechts één op de twee zal een op straat gevonden mobieltje teruggeven aan de eigenaar.**

Verslaggevers van het blad *Reader's Digest* lieten in grote steden

van 32 landen in totaal 960 mobiele telefoons achter. Van de dertig stuks die ze in Amsterdam lieten liggen, werden er veertien teruggebracht. Alleen in Hongkong en Kuala Lumpur was dat minder: dertien stuks.

Toeristen in Amsterdam waren eerlijker dan de bevolking. Tot vier keer toe pakte een buitenlandse

bezoeker de telefoon van straat op, die steeds werd geretourneerd. Mannen gaven acht van de 21 gevonden mobieltjes terug, terwijl zes van de negen vrouwen die een telefoon vonden het apparaat inleverden.

De Sloveense stad Ljubljana is het eerlijkst: 29 van de dertig telefoons werden teruggegeven.

Als je de krantenkop letterlijk neemt, dan zeg je eigenlijk:  
“Alle Amsterdammers zijn niet eerlijk.”

Zulke proposities met *alle* of synoniemen daarvan, komen veel voor. Daarom is er een speciale notatie ingevoerd:

$$\forall x[x \text{ is een Amsterdammer} \Rightarrow x \text{ is Oneerlijk}]$$

Dit kun je lezen als:

voor alle  $x$ -en (uit een bepaald domein) geldt: als  $x$  een Amsterdammer is, dan is  $x$  Oneerlijk.

Nog korter:

$$\forall x[A(x) \Rightarrow O(x)]$$

Met de voor de hand liggende afkortingen. Hierbij moet het domein bekend zijn. Bijvoorbeeld de inwoners van de randstad.

- 2 Geef nog een paar voorbeelden van bruikbare domeinen voor bovenstaande logische zin.

$\forall$  heet de **Voor-Alle-kwantor**. Het begrip kwantor zegt iets over aantallen.

Terug naar de krantenkop. Het artikel beschrijft een experiment. In enkele Europese steden is een aantal mobieltjes neergelegd alsof iemand ze verloren is. Vervolgens telde men het aantal mobieltjes dat werd teruggebracht nadat iemand er één gevonden had. Daarbij scoorde Amsterdam het laagst. Aardig detail: onder de terugbrengers in Amsterdam bevonden zich veel buitenlanders.

- 3 a. Wat is nu je commentaar op bovenstaande de krantenkop?

b. Geef ook commentaar op het experiment.

- 4 Voor de balans hiernaast een stukje over Rotterdammers.

Bij deze opdracht heb je even geen kwantoren nodig.

Geef met behulp van enkele afkortingen de uitgangspunten in de redenering. Om de redenering compleet te krijgen moet je enkele verzwegen premissen boven water halen. Behandel die net zoals de andere. Stel nu op overzichtelijke wijze de volledige redenering op.

### Rotterdammer leeft korter

Van onze Rotterdamse  
redactie

**ROTTERDAM, vrijdag**  
Rotterdammers leven gemiddeld anderhalf jaar korter dan andere Nederlanders.

De inwoners van de Maasstad lijden onder de concentratie fijn stof in de Rotterdamse lucht, die 13 procent hoger ligt dan in de rest van het land. Bovendien zijn er relatief meer rokers, hebben de inwoners vaker last van overgewicht en bewegen ze te weinig. Dat blijkt uit onderzoek van het Erasmus Medisch Centrum. Volgens onderzoeker Lex Burdorf zitten veel Rotterdammers in de bijstand en zijn ze laaggeschoold. Hierdoor krijgen ze te maken met slechtere huisvesting en arbeidsomstandigheden.

Kwantoren worden ook gebruikt in de taalkunde. Uit het boek *Betekenis en Taalstructuur* van de Jong, Oversteegen en Verkuyl zullen we een aantal voorbeelden gebruiken. Het boek is bestemd voor de studie taalwetenschap en verwante vakgebieden, waarin de interpretatie van taalvormen een belangrijke rol speelt. In het boek staat het volgende voorbeeld:

|      |    |                                       |     |                                          |
|------|----|---------------------------------------|-----|------------------------------------------|
| (25) | a. | Erica roskamt alle paarden            | a'. | $\forall x [P(x) \rightarrow Ro(e,x)]$   |
|      | b. | Dirk geeft alle paarden<br>aan Erica  | b'. | $\forall x [P(x) \rightarrow Ge(d,x,e)]$ |
|      | c. | Iedereen zag Dirk                     | c'. | $\forall x [Me(x) \rightarrow Zi(x,d)]$  |
|      | d. | Erica gooide alle ballen<br>naar Dirk | d'. | $\forall x [Ba(x) \rightarrow G(e,x,d)]$ |

In (25c) is de kwantor beperkt tot mensen. Dit houdt voor B in dat Dirk en Erica beiden Dirk zagen: Dirk zag dus zichzelf. Het gebruik van *iedereen* voor twee personen is hier wat ongewoon, maar het is wel correct.

Bekijk de zinnen a, b, c en d. De inhoud lijkt erg gekunsteld. Bedenk dat het hier gaat om de structuur van de zinnen.

5 Een puzzeltje vooraf:

- In de symbolisaties a', b', c, ' en d' komen een aantal afkortingen voor. Maak daarvoor een verbaalsleutel.
- Bestudeer de paren zinnen en bedek een symbolische vorm en probeer die terug te vinden uit de tekst. Doe het zelfde met enkele gewone zinnen.
- Schrijf zelf twee zinnen op die het gebruik van de al-kwantor illustreren.

6 ..... Amsterdammers zijn niet eerlijk.

- Op de stippen kan een synoniem van alle staan. Geef enkele voorbeelden.
- Op de stippen kunnen ook andere uitdrukkingen over aantallen ingevuld worden. De betekenis van de zin verandert dan. Geef hiervan enkele voorbeelden. (Je mag de zin aanpassen.)

In de volgende opgave introduceren we nog een kwantor.

7 Een groep mensen zit in zaal 24 (niet roken). Je komt binnen en merkt op:  
"Iemand heeft hier gerookt."

- Hoeveel personen komen in aanmerking?
- Kunnen er twee personen gerookt hebben?
- Kan er één persoon gerookt hebben?
- Kan niemand van deze groep gerookt hebben?
- Kan de hele groep gerookt hebben?

De oorspronkelijke zin kan zo gelezen worden:

"Er bestaat minstens één persoon die gerookt heeft."

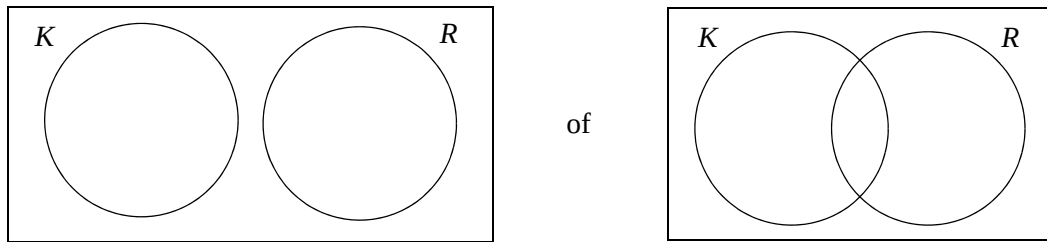
In symbolische taal schrijft men:

$$\exists x R(x)$$

Stel persoon *a* heeft gerookt. Dan geldt  $x = a$ , dus  $R(a)$ . En dat is weer een vertrouwde propositie.

$\exists$  heet de **Er-Is-kwantor**.

De mensen die zich in de kamer bevinden vormen het domein waaruit  $x$  gekozen wordt. Het domein kan, indien gewenst, in de formule worden aangeduid:  $\exists x(K(x) \wedge R(x))$ . Dan is de volgende grafische voorstelling voor de hand liggend:

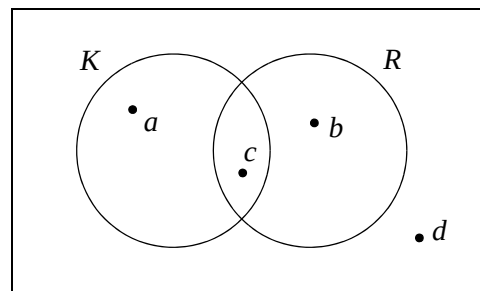


Deze tekeningen heten **Venn-diagrammen**.

Binnen de cirkel  $K$  bevinden zich alle in de kamer aanwezige personen. Binnen  $R$  alle rokers (bijv. in het gebouw).

8 Waarom past het tweede plaatje beter bij het verhaal?

9 a. In het plaatje hiernaast zijn een aantal elementen (personen) getekend. Welke eigenschappen hebben de elementen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$ ?



b. Een mogelijke notatie is  $K(a) \wedge \neg R(a)$ .

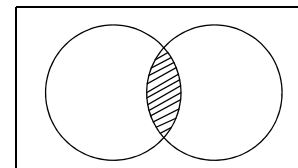
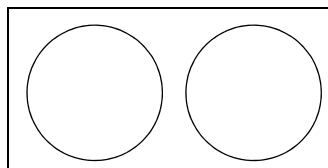
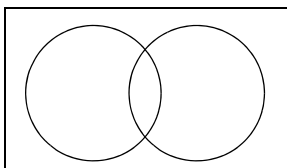
Of in woorden:

$a$  bevindt zich in de kamer, maar is geen roker.

Schrijf ook zo'n logisch zin voor de elementen  $b$ ,  $c$  en  $d$ .

Bij het tekenen van Venn-diagrammen zijn enkele afspraken:

- De grote rechthoekige omheining laat men vaak weg. Toch kan die nuttig zijn.
- Stel dat in de loop van de opgave blijkt dat  $K$  en  $R$  geen gemeenschappelijk element hebben en je hebt al het linker diagram getekend, dan kun je opnieuw beginnen met het middelste diagram, maar handiger is om aan te geven dat de doorsnede leeg is zoals in het rechterdiagram.



Venn-diagrammen beschrijven eigenschappen van verzamelingen elementen. In de wiskunde is verzamelingenleer een aparte tak van sport.

10 Hieronder zie je weer een kopie uit het taalkunde boek.

|                                   |                                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| a. Erica rosamt een paard         | c. $\exists x[P(x) \wedge Ro(e,x)]$     |
| a. Dirk geeft een paard aan Erica | a'. $\exists x[P(x) \wedge Ge(d,x,e)]$  |
| b. Dirk geeft Albert aan iemand   | b'. $\exists x[Mc(x) \wedge Ge(d,a,x)]$ |
| c. Erica zag sommige paarden      | c'. $\exists x[P(x) \wedge Zi(e,x)]$    |
| d. Erica gooit een bal naar Dirk  | d'. $\exists x[Ba(x) \wedge G(e,x,d)]$  |

Bestudeer ook deze paren van zinnen.

**11** Bij het zoeken op internet kun je meestal gebruik maken van AND en OR.

Op woensdag 9 april 2008 gaf dat de volgende resultaten:

|                             |               |
|-----------------------------|---------------|
| Amsterdammer:               | 341.000 hits. |
| leugenaar:                  | 174.000 hits  |
| Amsterdammer AND leugenaar: | 39.000 hits   |
| Amsterdammer OR leugenaar:  | 476.000 hits  |

Verklaar deze getallen.\*

In een juridische handboek staat het volgende over zoeken op internet:

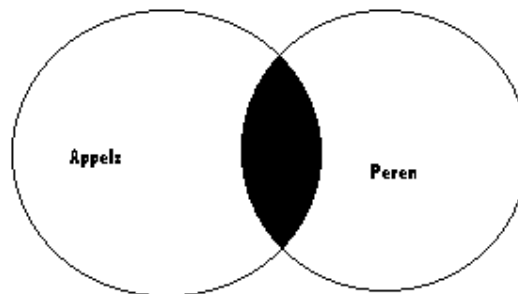
Booleaanse operatoren zijn logische zoekoperatoren, genoemd naar de Engelse wiskundige George Boole (1816-1854). Met behulp van de operatoren AND, OR en NOT kunnen relaties tussen zoektermen worden aangegeven, waardoor er preciezer gezocht kan worden.

AND = alle zoektermen gecombineerd met AND moeten in een pagina voorkomen.

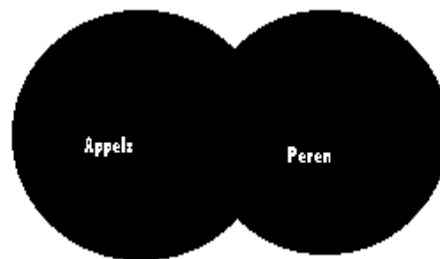
OR = bij zoektermen gecombineerd met OR hoeft maar één van de termen voor te komen.

NOT = met NOT geef je aan dat een zoekterm niet in een pagina voor mag komen.

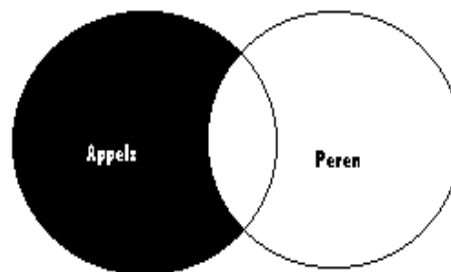
Bijvoorbeeld de zoekvraag: **appels AND peren** heeft als resultaat pagina's waarin de termen appels en peren beide voorkomen. In onderstaande figuur is dit geïllustreerd.



Zoekvraag: **appels OR peren**. Resultaat: pagina's waarin in ieder geval één van beide termen voorkomt. Pagina's waarin beide termen voorkomen behoren natuurlijk ook tot de resultaten.



Zoekvraag: **appels NOT peren**. Resultaat: pagina's waarin wel de term appels voorkomt, maar niet de term peren.



AltaVista heeft een afwijkende not-operator. Daar dien je AND NOT te gebruiken om een term uit te sluiten. Bovenstaande zoekvraag zou bij AltaVista als volgt geformuleerd moeten worden: **appels AND NOT peren**.

\* Zie ook "De Google-dans" in het tijdschrift Pythagoras (nummer 1, september 2008).

**12** Verderop in het juridische handboek staat:

Je kunt de verschillende operatoren ook combineren in één zoekvraag. Zoek je bijvoorbeeld informatie over campings op Terschelling of Ameland, dan zou je zoekvraag er zo uit kunnen zien:

**camping AND (Ameland OR Terschelling)**

Het trefwoord camping moet voorkomen, in combinatie met of Ameland, of Terschelling, of beide. Gebruik je de OR operator in combinatie met AND of NOT, plaats dan de OR-verklaring altijd tussen haakjes.

Laat met een voorbeeld zien waarom de haakjes nodig zijn.

**13** In plaats van de operatoren AND en NOT maken sommige zoekmachines gebruik van het plusteken (+) en het minteken (-). Een plusteken (+) direct voor een trefwoord betekent dat dit trefwoord in een pagina voor moet komen. Een minteken (-) direct voor een trefwoord betekent dat dit trefwoord niet voor mag komen.

Schrijf de zoekvraag: **+appels +peren -bananen** met AND, OR en NOT

**14** Logische redeneringen zijn vaak een onderdeel van intelligentie tests!

Zie bijvoorbeeld:

<http://www.123test.nl/iq-test/index.php#vragengroep-0>

Onderstaande vragen komen uit zo'n intelligentietest.

**a.** Welke conclusies kun je met *echte zekerheid* trekken bijde twee gegeven zinnen?

1. Geen van de Eskimo's is een drinker.
2. Alle dichters zijn drinkers.

Mogelijke conclusies:

- Alle dichters zijn Eskimo's.
- Sommige Eskimo's zijn geen drinkers.
- Sommige dichters zijn Eskimo's
- Sommige niet drinkers zijn dichters
- Geen stelling is zeker.

**b.** Welke conclusies kun je met *echte zekerheid* trekken bijde twee gegeven zinnen?

1. Alle voetballers zijn gezellige mensen.
2. Sommige voetballers zijn lang.

Mogelijke conclusies:

- Geen van de gezellige mensen is lang.
- Alle gezellige mensen zijn klein.
- Sommige gezellige mensen zijn lang.
- Geen voetballer is lang.
- Geen stelling is zeker.

## Hoofdstuk 8 Gemengde opdrachten en wiskundige verdiepingen

Hierkomen gemengde opdrachten met kwantoren en Venn-diagrammen.  
Ook een aantal wiskundige opdrachten!

- 15 Bekijk de volgende uitspraak:  
“Alle ongelovigen zijn honden.”

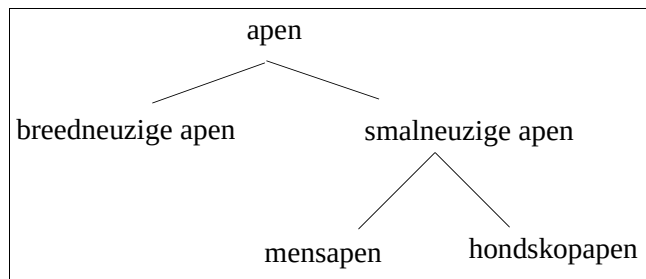
Deze uitspraak is waar zolang je met deze opgave bezig bent.  
Wat kun je zeggen over de volgende uitspraken:

- a. Er zijn honden die ongelovig zijn.
- b. Alle gelovigen zijn honden.
- c. Er zijn gelovigen die geen hond zijn.
- d. Als iemand geen hond is, dan is hij niet gelovig.

- 16 Het domein bestaat uit de gebouwen in een stad.  
De eigenschap waar het om draait is het hebben van drie woonlagen, afgekort  $D(x)$ .  
Door de al-kwantor te gebruiken kunnen we onderstaande proposities maken.  
Geef vertalingen van die proposities in normaal Nederlands.

- a.  $\neg \forall x[D(x)]$
- b.  $\neg \forall x[\neg D(x)]$
- c.  $\forall x[\neg D(x)]$
- d. Doe hetzelfde met  $\exists x[D(x)]$ .  
Schrijf de drie logische zinnen en hun vertalingen in het Nederlands.
- e. Vergelijk de uitkomsten bij de twee verschillende kwantoren. Wat merk je op?

- 17 De verzameling zoogdieren omvat de verzameling apen.  
De apen worden onderverdeeld volgens dit schema:

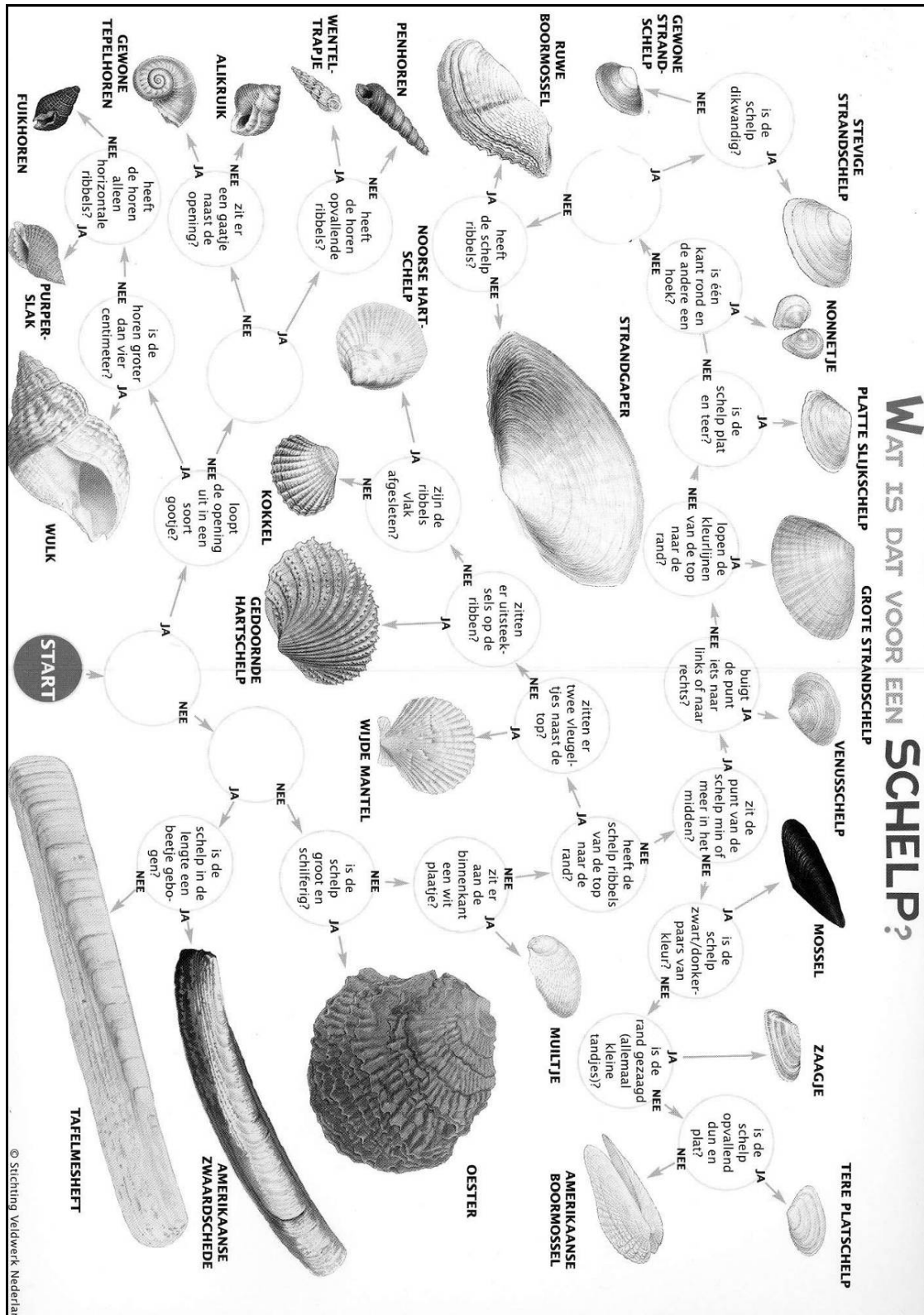


Schrijf in de taal van de logica:

Alle mensapen zijn apen.  
Er zijn smalneuzige mensapen.  
Een breedneuzige aap is geen hondskapaap.  
Niet alle apen zijn breedneuzig

18 Hieronder zie je een zoekkaart voor schelpen.

Formuleer zelf drie zinnen over de verdeling van deze verzameling schelpen. Bedenk daarbij eventueel namen voor deelverzamelingen (zoals de breedneuzigen in bovenstaande opgave).



Zie eventueel ook: <http://www.20q.net/> (de website die met 20 vragen achterhaald wat jij in gedachten hebt).



**19** Gegeven is de functie  $f(x) = 1/6 x^3 + 1/2 x^2 - 2/3 x + 1$

Er wordt beweerd dat als je voor  $x$  een geheel getal invult,  $f(x)$  ook weer een geheel getal is.

Een groot aantal waarden van  $x$  wordt over de klas verdeeld.

Het blijkt waarachter te kloppen voor al die waarden!

Een leerling zegt: “het lijkt me sterk dat de bewering onwaar is, dus ik teken ervoor.”

De docent(e): “ik ben niet overtuigd.”

a. Maak het verschil van mening duidelijk met behulp van logische zinnen met kwantoren.

b. Kun jij beslissen welke van de twee zinnen waar is?

**20** De punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  zijn de hoekpunten van een driehoek.

$x$  is een punt binnen deze driehoek.

a. Is deze uitspraak altijd waar?

$$\exists x[xA = xB = xC]$$

(met  $xA$  wordt bedoeld: de afstand van  $x$  tot  $A$ ; teken een driehoek en bedenk eerst waar de punten liggen met gelijke afstand tot  $A$  en  $B$ )

b. Kun je in gewone bewoordingen de uitspraak verscherpen?

c. Hoe worden de antwoorden van **a** en **b** als  $x$  zich ook in de ruimte kan bevinden?

**21** Een partij zaden is ingedeeld naar zes eigenschappen.

Eigenschappen  $W$ ,  $G$  en  $Z$  sluiten elkaar uit.

Dat is ook het geval voor  $S$ ,  $B$  en  $R$ .

a. Onderzoek de waarheid van de volgende beweringen.

- $\exists x[W(x) \wedge B(x)]$
- $\neg \exists x[W(x) \wedge \neg B(x)]$
- $\forall x[B(x) \Rightarrow G(x)]$
- $\forall x[\neg B(x) \wedge (W(x) \vee Z(x))]$
- $\exists x[B(x) \Rightarrow W(x)]$

|                  | <u>W</u> it | <u>G</u> rijs | <u>Z</u> wart |
|------------------|-------------|---------------|---------------|
| <u>S</u> tekelig | 14          | 6             | 10            |
| <u>B</u> ehaard  | 0           | 7             | 0             |
| <u>R</u> impelig | 12          | 6             | 8             |

b. Symboliseer onderstaande uitspraken in de taal van de logica.

- Alle zwarte zaden zijn rimpelig.
- Niet alle stekelige zaden zijn grijs.
- Alle stekelige zaden zijn niet wit.
- Er zijn geen behaarde zwarte zaden.
- Er zijn geen stekelige grijze zaden.

## 22 Lees onderstaand artikel. Waar zit jij in het Venn-diagram?

### Tuurlijk bestaat Nederland

Een mening inzake de Nederlandse identiteit is één ding. Helder voor het voetlicht krijgen hoe het zaakje in elkaar steekt, is iets anders. Al dat gedoe vanaf de Batavieren, zie het eens bij een buitenlander op de radar te krijgen. Die leest in de krant over 'the Aruban Joran van der Sloot, from The Netherlands', over 'Bruxelles, European capital in the Low Countries', en denkt dat Peter Stuyvesant uit Holland (hoofdstad van Kopenhagen) kwam. Daarom hierbij een plaatje met alle internationaal courante namen voor onze

gewesten, geordend en afgebakend ten opzichte van concurrerende omstreken. Niet schrikken van het dr. Clavangehalte: het is een simpel 'Venn-diagram' om hele en deelverzamelingen te illustreren. (Op verzoek verkrijgbaar in het Engels.)

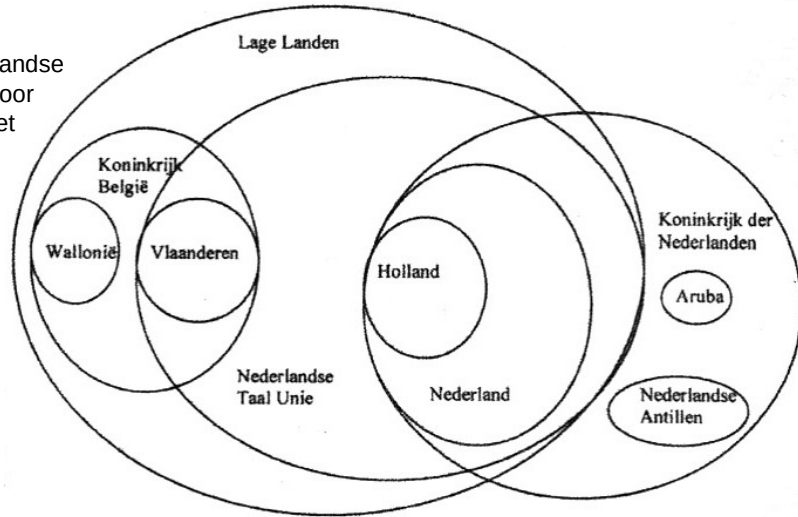
Zo kunt u in de marge van een vergadering of tijdens een wandeling langs culturele hoogtepunten een buitenlander uitleggen waarom sommige politici vinden dat Arubanen of Walen niet deugen. Ze horen er niet bij, want ze vallen buiten de cultuurgrens van de Taalunie. En ook zijn de gradaties van arrogantie ineens duidelijk: hoe meer cirkels om je identiteit, hoe hoger je status. De volgorde is Hollanders, Vlamingen, Nederlanders, Belgen. Walen en Antillianen doen wat minder mee. Of u wijst op de kleine cirkels en de heel grote cirkel, die allemaal erg oud zijn. Eenheden als Holland, Vlaanderen, Aruba en de Lage Landen gaan al sinds mensenheugenis mee, al verandert de bevolking soms wat van samenstelling.

O, zegt dan de oplettende bezoeker, het zijn de nieuwe cirkels – de koninkrijken van de negentiende eeuw – waarin de problemen spelen, is het niet? Precies, zegt u, pubers zorgen altijd voor moeilijkheden. In die cirkels maken we onze wetten en dat houdt ze jong.

En, zegt dan de waakzame vreemdeling weer, zijn het niet de mensen in de binnenste cirkels die zich druk maken om het verlies van identiteit? Het is toch in Holland en Vlaanderen waar mensen willen dat de vaderlandse geschiedenis er weer toe doet? Ja logisch, zegt u, want zij hebben in hun eigen ogen het meest te verliezen. En dan kunt u zelf wat puntjes zetten in de tekening, bijvoorbeeld waar Ayaan Hirsi Ali staat of stond, en dat het vanuit het Koninkrijk der Nederlanden misschien een grote stap is naar Frankrijk, maar vanuit de Lage Landen helemaal niet.

Wanneer de vreemdeling aanhoudt en vraagt welke cirkel precies groter, kleiner of belangrijker moet worden van de mensen die trots op Nederland willen zijn, antwoordt u in alle eerlijkheid dat niet te weten. Daarna gaat u samen naar de bar.

© Menno Hurenkamp / De Groene Amsterdammer - 15-02-2008



## 23 Welke kwantoren kunnen op de stippeltjes staan?

a. ...  $x[2x + 3 = 4x - 1]$

b. ...  $x[2x + 3 = 2(x + 1) + 1]$

c. ...  $x[(x^2 = 9) \Rightarrow (x = 3)]$

**24** Onderzoek de volgende proposities op waarheid.

- a.  $\forall(x, y)[(x + y = \text{even}) \Rightarrow (x \times y = \text{oneven})]$
- b.  $\exists(x, y)[(x + y = \text{even}) \Rightarrow (x \times y = \text{oneven})]$
- c.  $\forall(x, y)[(x \times y = \text{oneven}) \Rightarrow (x + y = \text{even})]$
- d.  $\exists(x, y)[(x \times y = \text{oneven}) \Rightarrow (x + y = \text{even})]$
- e.  $\forall x[((x = a + b) \wedge \text{Priem}(a) \wedge \text{Priem}(b)) \Rightarrow (x = \text{even})]$
- f.  $\forall x[(x = \text{even}) \Rightarrow ((x = a + b) \wedge \text{Priem}(a) \wedge \text{Priem}(b))]$

**25** Onderzoek de volgende proposities op waarheid.

Het domein bestaat uit de getallenparen  $(x, y)$ .

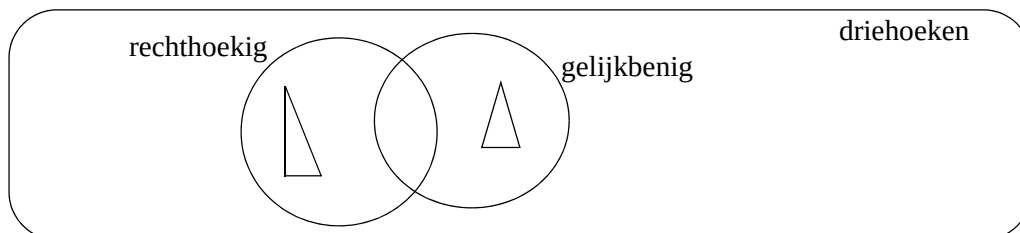
- a.  $\exists(x, y)[(2x - y = 7) \wedge (3x + 2y = 28)]$
- b.  $\exists(x, y)[(2x - y = 7) \wedge (4x - 2y = 17)]$
- c.  $\forall(x, y)[(2x - y = 7) \Rightarrow (6x - 3y = 21)]$

**26** De volgende logische zinnen gaan over veelhoeken die vierhoeken (V) zijn en waarvan diagonalen elkaar middendoor kunnen snijden (DM). Onderzoek de volgende uitspraken op waarheid.

- a.  $\forall x[V(x) \Rightarrow DM(x)]$
- b.  $\forall x[V(x) \wedge DM(x)]$
- c.  $\forall x[V(x) \vee DM(x)]$
- d.  $\forall x[DM(x) \vee \neg V(x)]$

**27** Er zijn verschillende soorten driehoeken. Hieronder is een begin gemaakt van een Venn-diagram.

Teken dit begin in je schrift en voeg nog een paar verzamelingen toe (in ieder geval die van de gelijkzijdige driehoeken) en teken op iedere plek in het diagram een voorbeeld.

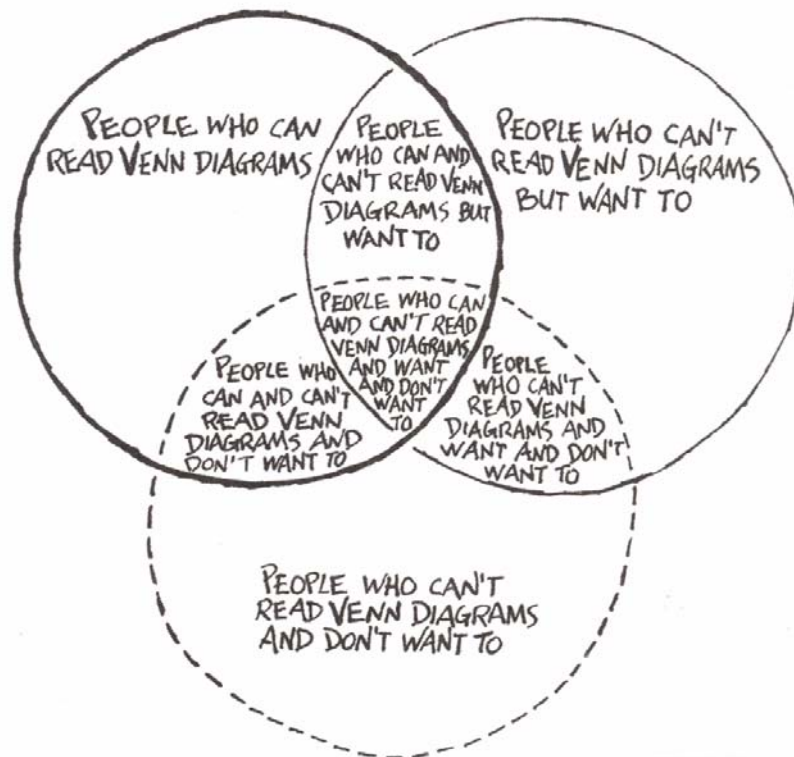


28 Onderzoek de volgende uitspraken en verbeter ze als ze in deze vorm niet waar zijn.

- a. "Het getal  $a$  is een drievoud mits  $a$  niet even is."
- b. "Als  $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$ , dan  $x = 2$ ."
- c. "De lengte is drie, want de lengte in het kwadraat is negen en de lengte moet groter dan nul zijn."
- d. "Stel  $p$  is even en  $q$  is oneven en  $p$  kun je delen door  $q$  en  $p/q = r$ . Dan is  $r$  ook oneven, want als  $r$  even zou zijn, dan zou  $r \cdot q$  oneven zijn, terwijl  $r \cdot q$  gelijk moet zijn aan  $p$  en die was even."
- e. Schrijf zelf een paar 'wiskundige' zinnen die waar lijken, maar het niet zijn door verkeerd gebruik van de logica.

### Samenvatting

Je hebt 7 soorten mensen...

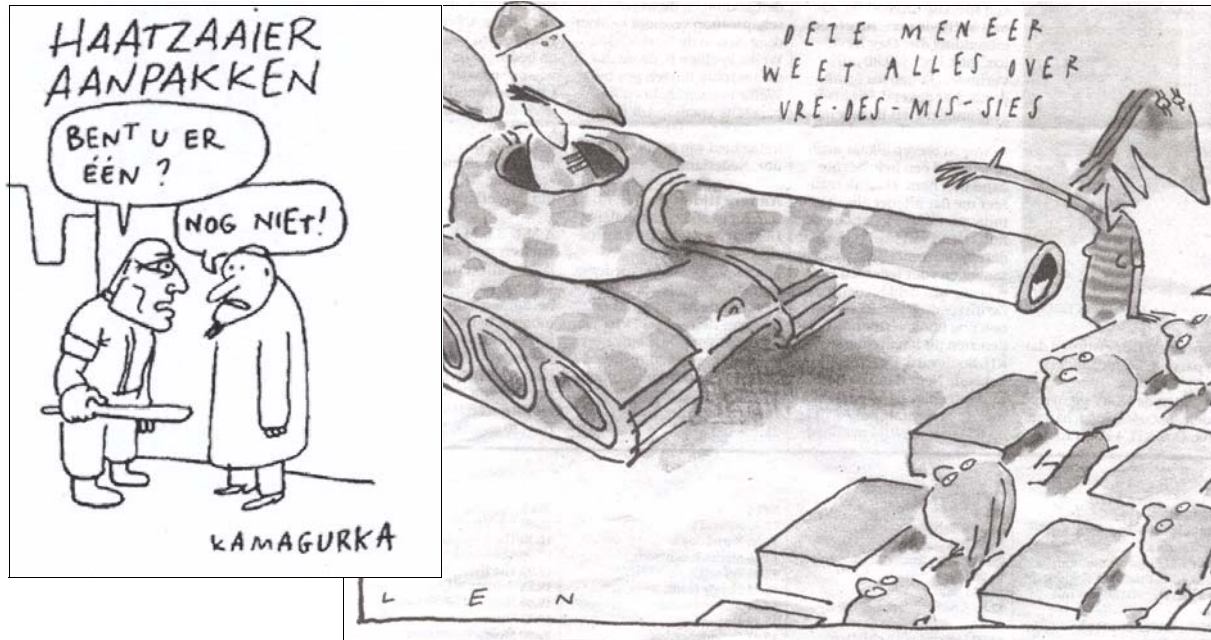


Waar zit jij nu?

## Hoofdstuk 9 Tautologie, contradictie en paradox

In de titel van dit hoofdstuk staan drie termen die voorkomen in klassieke teksten over logica. Enkele historische logici zullen in dit hoofdstuk de revue passeren. Eerst volgen drie opgaven die bedoeld zijn om zelf een idee te krijgen waarover de termen gaan en welke logische problemen ermee geïdentificeerd worden.

**29** Als je onderstaande plaatjes logisch bekijkt, dan is er iets vreemds aan de hand. Probeer dat onder woorden te brengen.



**30** Twee uitspraken over een wedstrijd:

“Wij hebben gewonnen en zij hebben verloren.”

“Wij schakelen ze uit, we maken ze in en we verpletteren ze.”

Beschrijf de twee uitspraken met een combinatie van proposities en geef ‘logisch’ commentaar op beide zinnen.

**31** Dichterlijke taal:

“Want wat dood is is dood, maar wat vermoord is leeft voort.” (M. Nijhoff)

“Ik verga en duur.” (Ellen Warmond)

“Sinds je er bent, ben ik weer alleen.” (Ellen Warmond)

“The more I give to thee, the more I have.” (Shakespeare)

“I am not who I am.”

“Voorspellen is moeilijk, zeker als het om de toekomst gaat.” (Wim Kan)

Deze dichters kramen geen onzin uit. Waarom dan toch deze uitspraken? Bedenk zinnige betekenissen van de uitspraken.

In de eerste opgave van dit hoofdstuk staan twee strips. Een woord of begrip is door een netwerk verbonden met andere woorden. Daardoor kan een woord een ander woord oproepen. Hier kan ‘tank’ leiden tot ‘oorlog’. Zo ontstaat de tegenstelling oorlog-vrede en dat is de bedoeling van de cartoonist. De andere strip gaat over het voorkomen van het zaaien van haat. De strip laat zien dat het aanpakken van haatzaaiers juist leidt tot haatzaaien: *als P dan niet Q* staat tegenover *als P dan Q*.

Bij de tweede opgave zijn meerdere symbolisaties mogelijk. Eigenlijk komt het telkens neer op  $A \wedge A$  &  $A \wedge \dots$ . In deze gevallen is iedere vorm equivalent met  $A$  (we hebben gewonnen). Vooral bij de tweede zin is gebruik gemaakt van een recept uit de retoriek (de kunst van het overtuigen), namelijk: herhaling met toenemende sterkte.

In de derde opgave lijken de uitspraken op het eerste gezicht ‘dubbelop’ of een ‘tegenstelling’. Bij nadere beschouwing is dat echter anders te interpreteren doordat bijvoorbeeld het woord ‘dood’ in verschillende netwerken kan voorkomen. Deze methode van verrassing daagt uit om de zin nog eens te lezen en om de lezer beter te raken. Een ‘dubbelop’ en een ‘tegenstelling’ blijven beter in ons brein hangen. En dat is natuurlijk de bedoeling van de auteur: aansporen tot verder lezen.

Kunnen we met onze logica enige greep krijgen op deze verschijnselen. Bekijk eens de volgende waarheidstabellen:

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow (A \vee B)$ | $A \vee (A \wedge B)$ | $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ |
|-----|-----|----------------------------|-----------------------|--------------------------------------------|
| 0   | 0   | 1                          | 0                     | 0                                          |
| 0   | 1   | 1                          | 0                     | 0                                          |
| 1   | 0   | 1                          | 1                     | 0                                          |
| 1   | 1   | 1                          | 1                     | 0                                          |
|     |     | (1)                        | (2)                   | (3)                                        |

Er zijn dus proposities die altijd waar zijn (1), en die nooit waar zijn (3).

Een propositie die altijd waar is, noemen we een **tautologie** en een propositie die nooit waar is een **contradictie** (tegenstelling).

**32** Een oefening voor de twee soorten proposities. Bepaal voor elk van de onderstaande zes of het een contradictie of een tautologie is.

$$A \vee A \qquad A \vee \neg A$$

$$A \wedge A \qquad A \wedge \neg A$$

$$A \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow \neg A$$

We missen in de waarheidstabellen proposities die op het eerste gezicht een contradictie vormen, maar het bij doordenken niet blijken te zijn.

**33** Het citaat van Nijhoff:

“Want wat dood is is dood, maar wat vermoord is leeft voort.”

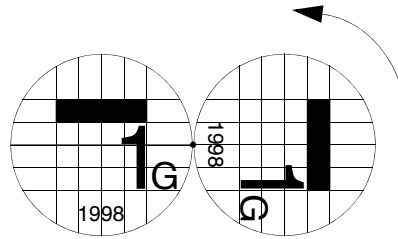
In het tweede deel staat zo’n schijncontradictie.

a. Wat is de contradictie?

b. Waarom is het een schijncontradictie?

De officiële naam voor een schijncontradictie is **paradox**. Soms wordt het begrip uitgebreid tot situaties waarbij een vraag een niet verwacht antwoord heeft. De volgende opgave is daarvan een illustratie.

- 34 Twee guldens (ken je ze nog?) liggen tegen elkaar aan. De linker gulden ligt vast. De rechter gulden gaat nu, zonder slippen, om de linker rollen. De vraag is: hoeveel omwentelingen heeft deze gulden nodig om in de oorspronkelijke positie terecht te komen?



Je denkt dat het antwoord zal zijn: één. Maar ....

In de oudheid hielden Grieken zich al bezig met paradoxen. De bekendste Griek is misschien wel Zeno van Elea (ca.490v.Chr. - ca.430v.Chr.). Zijn uiteenzettingen over de onmogelijkheid van beweging, zoals in het verhaal van Achilles en de schildpad, zijn beroemd en berucht.

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardlooptwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de Schildpad zwaar en langzaam was.

"Hoeveel voorsprong?" vroeg hij de Schildpad met een glimlach.

"Tien meter," antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit.

"Dan ga jij zeker verliezen, vriend" vertelde hij de Schildpad, "maar laten we vooral rennen, als je graag wilt."

"In tegendeel," zei de Schildpad, "ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen."

"Kom op dan ," antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan voordien. Hij wist hij de superieure atleet was, maar hij wist ook de Schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.

"Veronderstel," begon de Schildpad, "dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meters tussen ons snel kan afleggen?"

"Zeer snel," bevestigde Achilles.

"En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?"

"Misschien een meter - niet meer," zei Achilles na even nagedacht te hebben.

"Zeer goed," antwoordde de Schildpad, "dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen ?"

"Zeer snel inderdaad!"

"En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn , zodat u DIE afstand moet inhalen, ja?"

"Eeh ja" zei Achilles langzaam.

"En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen" ging de Schildpad stug door.

Achilles zei niets.

"En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen."

"Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen," antwoordde Achilles, nu al vermoeid.

"En zo kunt u nooit de achterstand inlopen," besloot de Schildpad met een sympathieke glimlach.

"U heeft gelijk, zoals altijd," besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

Conclusie: de achterstand wordt kleiner, maar Achilles haalt de schildpad nooit in. Dit is een paradox, want in werkelijkheid zou Achilles de schildpad wel inhalen. Deze paradox is met een wiskundige redenering op te lossen, maar dat is niet eenvoudig.

**35** Probeer de paradox zelf op te lossen (of zoek op internet de oplossing van deze paradox van Achilles en de schildpad).

**36** Twee klassieke paradoxen zijn de leugenaar-paradox en de paradox over de kapper die iedereen knipt die zichzelf niet knipt.

Zoek op internet naar klassieke paradoxen. Verzamel er tenminste drie. Beschrijf waarom het een schijnbare tegenstelling betreft en – indien mogelijk – geef aan hoe de tegenstelling kan worden opgelost.

**37** Het Belgische artikel hier-naast gaat over de relatie tussen straatverlichting en verkeersveiligheid.

In het artikel wordt geschreven over een paradox.

a. Leg uit waarom hier sprake is van een paradox.

b. Hoe wordt deze paradox verklaard?

#### **Vals gevoel van veiligheid**

Een aspect dat zowel door de overheid als door de bevolking vaak als argument ten voordele van verlichting wordt aangehaald, is de veiligheid. En uiteraard, het bestrijden van lichthinder en lichtvervuiling mag die veiligheid niet in gevaar brengen. Maar heel wat onderzoeken hebben echter aangetoond dat het meestal slechts om een gevoel van veiligheid gaat.

Een Europese studie, aangevraagd door verzekeringsmaatschappijen, publiceerde per land het aantal doden per 10.000 voertuigen en leverde volgende resultaten. In Denemarken, één van de minst verlichte landen in Europa, telde men op één jaar 59 doden. Frankrijk, waar men enkel in steden en op- en afritten verlicht, telde 83 slachtoffers per jaar. België, met veel verlichting, telde maar liefst 203 doden! Het moet natuurlijk gezegd dat België een van de dichtst bevolkte landen ter wereld is, maar ook in België zelf toonde een onderzoek van dokter Luc Beaucourt van de afdeling spoedopname van het UIA-ziekenhuis in Antwerpen aan dat er geen verband kan worden vastgesteld tussen meer ongevallen en minder verlichting.

Hoe kan men deze paradoxale situatie verklaren? Er zijn een aantal duidelijke redenen. Het is bewezen dat men roekelozer wordt wanneer de weg beter verlicht is. Men denkt immers dat men een gevaar snel genoeg zal opmerken wanneer de weg baadt in het licht. Hoewel dit in sommige gevallen waar is, moet men ook het volgende in acht nemen: wanneer de hindernis overstraald wordt door verlichting, wordt het juist moeilijker om de afstand en omvang ervan in te schatten.

Waarschuwingssignalisatie, zij het van aan de gang zijnde werken of gewoon de remlichten van auto's, valt minder snel op. Zo gebeuren heel wat ongevallen achteraan een file, waar een auto of vrachtwagen niet snel genoeg merkte dat er iets aan de hand was en hierdoor niet tijdig kon remmen. Verlichting overstraalt vaak ook de koplampen van auto's, waardoor tegenliggers pas op het laatste moment worden opgemerkt. Bij een inhalings-maneuver of wanneer er een spookrijder op de baan rijdt kan dit nefaste gevolgen hebben. En een auto die in een ongeval dan toch van de baan gaat heeft in België dan ook nog eens het grote gevaar dat er een lantaarnpaal in de berm staat, die tegen hoge snelheden een dodelijke impact kan veroorzaken.

[Bron: <http://www.vvs.be/wg/licthinder/mensen.php>]



- 38 Onderstaande tekst komt uit het boek *Magie van het gezond verstand* door Georges Charpak en Henri Boch. Ze signaleren dat in onze samenleving het bijgeloof in opmars is, terwijl het aantal verschijnselen waarop dat geloof gebaseerd is juist afneemt. Ze benoemen deze paradox als een schijnbare tegenstrijdigheid. Waarom schijnbaar?

We verkeren nu dus in een wat paradoxale fase waarin het geloof aan het 'paranormale' in de breedste zin van de term aan een opmars bezig is, vooral in meer ontwikkelde kringen, terwijl het aantal en de intensiteit van die verschijnselen juist drastisch afnemen.

De voornaamste redenen van deze schijnbare tegenstrijdigheid zijn de volgende:

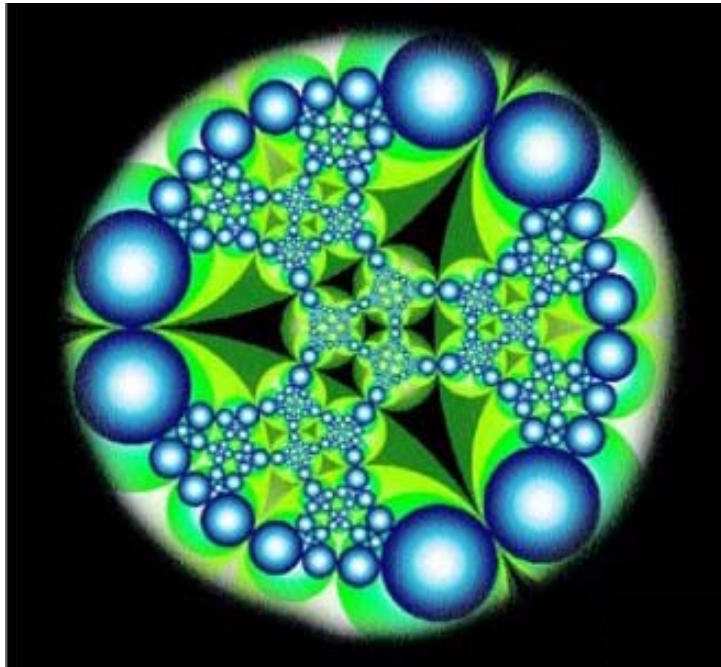
Om te beginnen zijn er de elektronische media. Het corpus van paranormale verschijnselen ondervindt hulp en steun van de elektronische media (vooral radio, tv en internet) die optreden als platform en signaalversterker en wel op een manier die in het verleden onbekend was. Was men bij het begin van de 20ste eeuw alleen in de omtrek op de hoogte als een boze geest zich manifesteerde in een dorpje, nu hoeft een nietsvermoedende klopgeest zich ook maar één keer te laten zien, of de hele planeet is via CNN op de hoogte van het verschijnsel.

Vervolgens zijn er medialeugens en inbreuken op beroepscode. De media – generaliseren is uiteraard onjuist en daarom zouden we beter spreken van 'een paar media die hun inhoud krijgen via programmamakers en journalisten' – vervullen in het geheel niet de stichtelijke Prometheus-rol waarvan hun oprichters vaak droomden. Ze presenteren lezers, luisteraars en kijkers ook niet wat ze voorgeschoteld zouden willen krijgen. Ze zijn niet de vertolkers, de bemiddelaars, de 'mediums' van een bestaande vraag, ze *creëren* die vraag zelf en doen dan alsof ze daar gewoon op inspelen. Ze zijn niet onpartijdig. Integendeel: ze accentueren en verheiligen de heropleving van navelstaren en koffiedik kijken.

Tot slot is er de onderwijswereld als doorgeefluik. In tegenstelling tot wat je zou mogen vermoeden – en ter bevestiging van het peil van het bijgeloof naar beroepsgroepen, zoals op de vorige pagina's grafisch weergegeven – is het onderwijsmilieu bepaald niet immuun voor bijgeloof. Soms zijn docenten zelfs een soort doorgeefluik voor pseudo-wetenschappen en andere bakerpraatjes. Onthutsende voorbeelden te over, of het nu gaat om miniversies van de piramide van Cheops waarin de wijn die wordt verkocht door een wijncoöperatie van leraren sneller oud wordt of om een catalogus van boeken voor docenten die groot heil verwachten van wichelroedeloperij of astrologie.

## Hoofstuk 10 Kennis in kaart

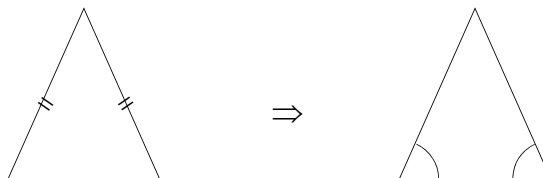
39 Bekijk onderstaande parelketting:



- a. Welke meetkundige transformaties (spiegelingen en rotaties) kun je in deze tekening zien?
- b. Hoeveel symmetrie-assen heeft de tekening?
- c. Als je een deel van de tekening hebt, dan kun je van daaruit de hele tekening construeren. Geef in de tekening een zo klein mogelijk deel aan waarmee dat lukt.

40 Deze opgave gaat over proposities uit de elementaire meetkunde.

Propositie A: In een gelijkbenigedriehoek zijn de basishoeken gelijk.

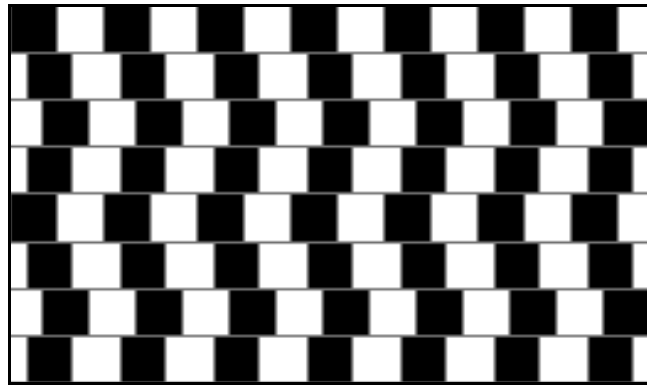


Propositie B: In een gelijkbenige driehoek staat de lijn van de top naar het midden van de overstaande zijde, loodrecht op die zijde.



Veronderstel dat propositie A waar is. Hoe kun je daaruit dan de waarheid van propositie B afleiden? Eenvoudiger gezegd: Als je A weet, dan krijg je B er gratis B. Nou ja, je moet er wel wat voor doen.

**41** Evenwijdige lijnen?



Bewering: de horizontale lijnen lopen allemaal parallel.

- a. Stel op een paar manieren de waarheid of onwaarheid van deze bewering vast.
- b. Verdedig je oplossingen. Noem daarbij de gebruikte regels (stellingen) uit de meetkunde.

Deze drie opgaven zijn voorbeelden van het volgende idee:

Je hebt een hoeveelheid kennis.

Die kennis is beschreven met behulp van proposities of een andere duidelijke manier.

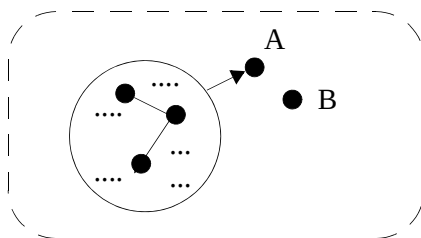
Je gebruikt logische redeneringen of andere regels om daarmee de beginkennis uit te breiden: kenniswinst.

**42** Ga na of je dit principe in de opgaven herkent.

Je kunt een bepaald kennisgebied zien als een verzameling uitspraken. Voorbeelden van zulke gebieden zijn: meetkunde, planeten, plantenm hersenen, muziekcomposities en sociale regels.

Maar er is meer: de onderdelen van zo'n gebied hebben een zekere samenhang. Om die samenhang zichtbaar te maken, kun je de kennis ordenen. Daarbij kun je gebruikt maken van het principe van kenniswinst.

Hieronder is beschikbare kennis omcirkeld en in beeld gebracht hoe je daarmee een nieuwe propositie kunt bereiken (kenniswinst):

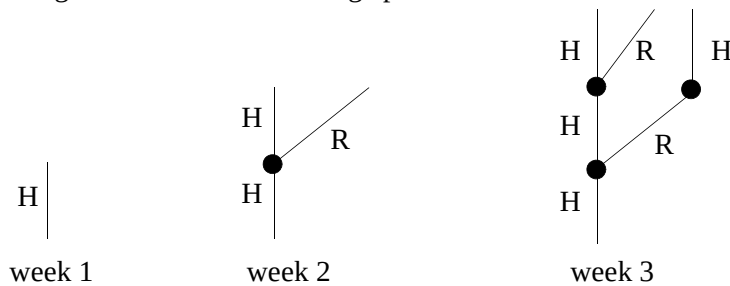


**43** In hoofdstuk 1 heb je bewezen:

De som van de hoeken van een vierhoek is  $360^\circ$ .

Kijk nog eens naar dat bewijs en probeer het in deze figuur te plaatsen.

Het volgende voorbeeld illustreert dit principe van kenniswinst.  
Bekijk de groei van een denkbeeldige plant:



Voor het schema zijn enkele definities nodig.  
H is een omhooggroeiend stengeldeel.  
R is een naar rechtsgroeiend stengeldeel.

Je kunt de groei dan zo beschrijven:

- Start met H
- op H groeit HR
- op R groeit H

Het resultaat na week 3 kun je ook zo beschrijven: (H)(HR)(HRH)

- 44 a.** Teken de plaatjes van de plant in week 4 en week 5.
- b.** Beschrijf de situaties in week 4 en 5 ook met de letters.
- c.** Gebruik de letters om de situatie van week 6 te beschrijven.
- d.** Onderzoek of in een beschrijving ook RR kan voorkomen.
- e.** Het aantal eindpunten van de plant is achtereenvolgens: 1, 2, 3, 5.  
Onderzoek het aantal eindpunten bij nummers 4, 5, 6 en 7.

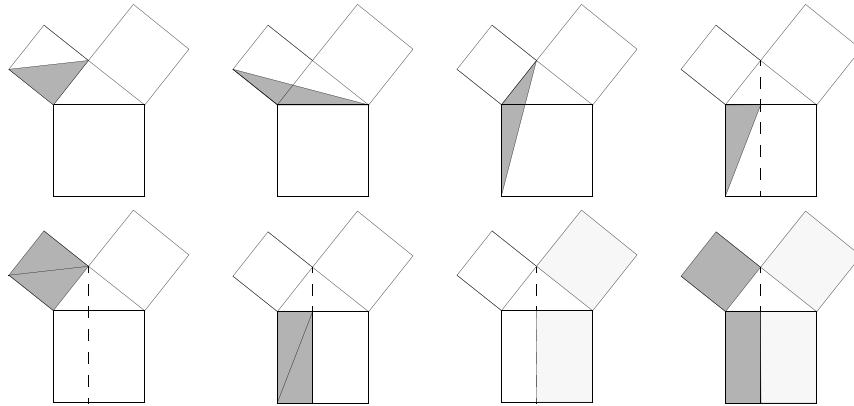
We begonnen met een model van een denkbeeldige plant. De resultaten van bovenstaande onderzoekjes leveren nieuwe kennis over die (denkbeeldige) plant. Dat is kenniswinst dankzij het spelen met definities en de regels voor de groei. Die definities en redeneer regels noemt men een axiomatisch systeem.

Het plaatje van kenniswinst kan op twee manieren worden opgevat:

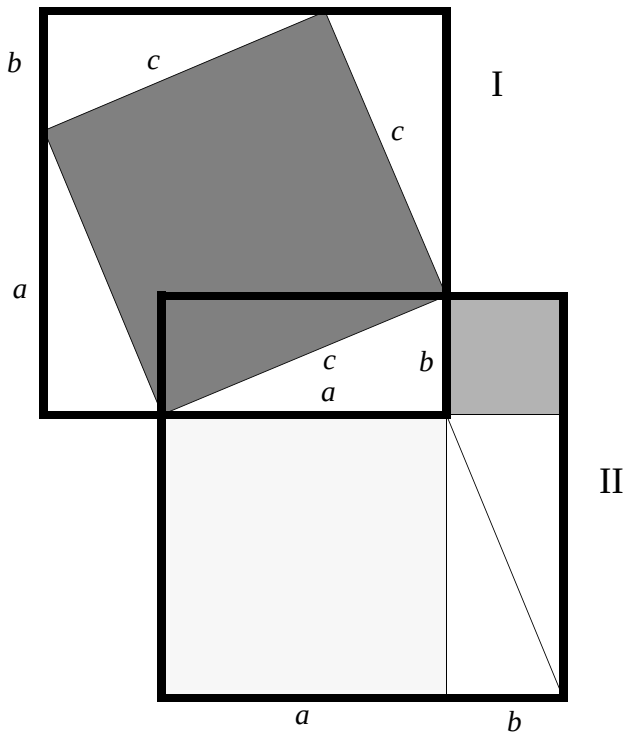
- I Kies een doel buiten de aannamen. Kun je dat doel vanuit de aannamen bereiken?  
Voorbeeld: Kan RR in het patroon van de plant voorkomen?
- II Begin met de aannamen en onderzoek wat je van daaruit kunt bereiken.  
Voorbeeld: Kun je iets te weten komen over het aantal eindpunten van de plant?

- 45 a.** In de wiskunde is de Euclidische meetkunde het meest bekende voorbeeld van een axiomatisch systeem. Zoek op internet enkele definities, uitgangspunten (postulaten) en algemene regels van dat systeem. Bijvoorbeeld via: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.
- b.** Met behulp van de postulaten en redeneerregels is Euclides in staat om een meetkundig systeem van allerlei stellingen (proposities) op te bouwen. Propositie 45 behandelt het construeren van vierkanten op een gegeven lijnstuk. Dit wordt gebruikt bij propositie 47, die bij ons bekend staat als de stelling van Pythagoras. Plutarchus (rond 100 na Christus) vertelt dat Pythagoras een os offerde toen hij de bewuste propositie gevonden had, maar de toeschrijving van propositie 47 aan Pythagoras blijft toch tamelijk onzeker.

De kern van Euclides' bewijs is hieronder in visueel steno vertoond. Geef bij ieder stapje aan waarom de oppervlakte van de gearceerde delen gelijk blijft.



c. Een ander bewijs van de stelling van Pythagoras gaat met algebra:



In het midden van deze figuur zie je een  $a$ - $b$ - $c$ -driehoek. De twee grote vierkanten hebben allebei zijden met lengte  $a+b$ . De oppervlakten zijn dus ook gelijk:  $(a+b)^2$ . Als je delen van ieder vierkant optelt moet je dus ook op iets identieks komen. Bedenk hierbij dat de oppervlakte van een driehoekje gelijk is aan  $a \cdot b / 2$ .

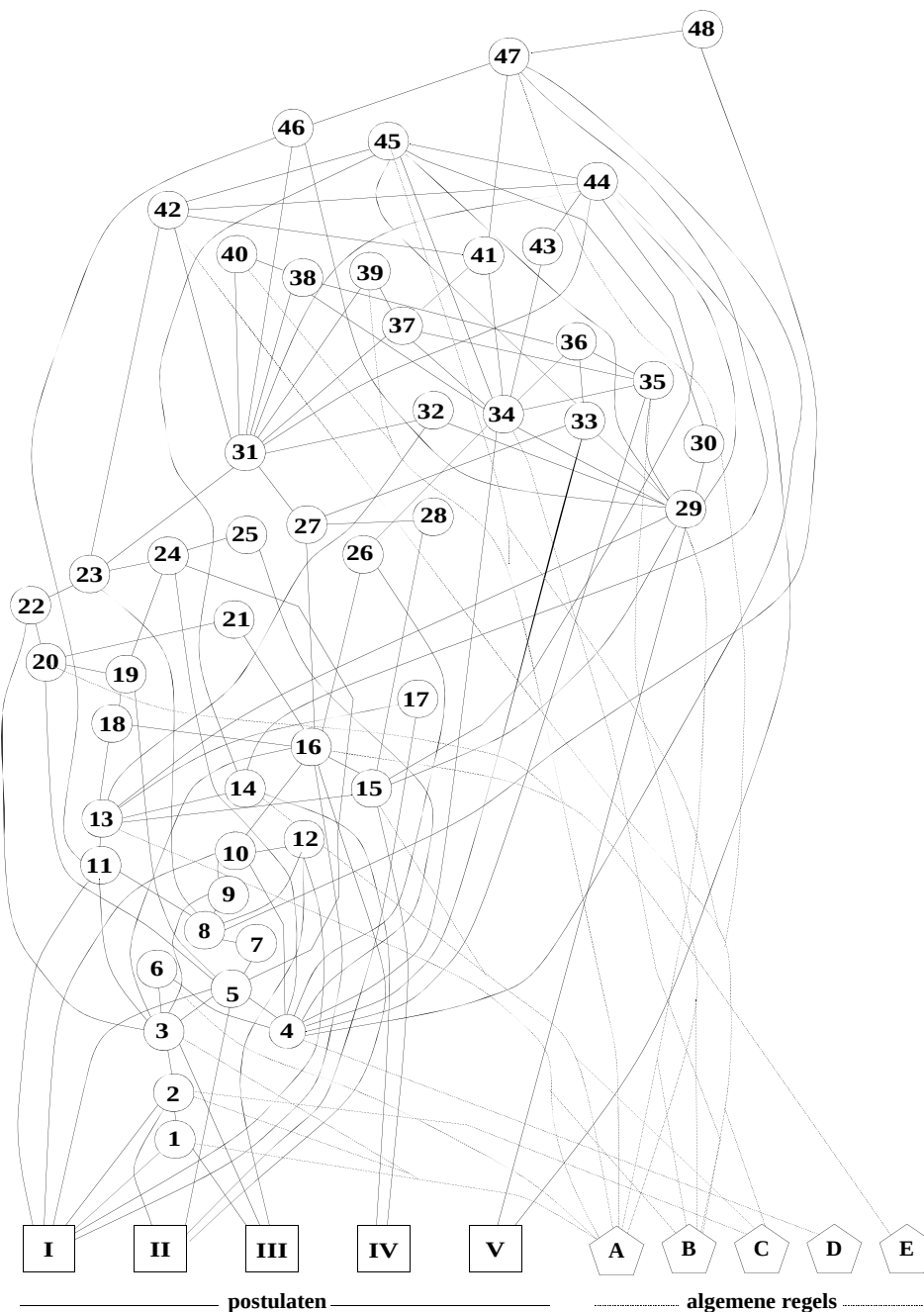
De oppervlakte van vierkant I is:  $a^2 + b^2 + 2ab$ .

De oppervlakte van vierkant II is:  $c^2 + 2ab$ .

Ga dit na en laat zien dat hiermee de stelling van Pythagoras bewezen is.

**46** Een nieuwe vraag bij deze beschrijvingen van een kennisgebied is: wat gebeurt er met mijn systeem als je een uitgangspunt verwijdert? Die vraag heeft een belangrijke rol gespeeld binnen de Euclidische meetkunde, met name rond het zogenaamde parallellenaxioma (postulaat 5).

In de volgende figuur\* worden de proposities weergegeven door hun nummer in een cirkeltje. Onderaan staan de postulaten en algemene regels. De verbindingslijnen geven aan dat hoger genummerde propositie naar de lager genummerde propositie of naar een postulaat of algemene regel verwijst. Omcirkel de proposities die van postulaat 5 afhankelijk zijn.



Het voert te ver om dieper in te gaan op de betekenis van je antwoorden bij de vorige opgave. Er is veel over dit onderwerp geschreven en het heeft geleid tot veel nieuwe meetkunde en tot reflecties over de opbouw van de wiskunde. Hier is vooral dit plaatje van belang als illustratie voor het principe van het in kaart brengen van kennis. De aard van het vak maakt dat er zo'n structuur kan worden getoond. Bij andere disciplines is vaak ook sprake van dergelijke structuren, maar die zullen zich minder makkelijk in zo'n figuur laten weergeven.

\* Deze opgave is geïnspireerd door werk van Aad Goddijn en de figuur is van zijn hand

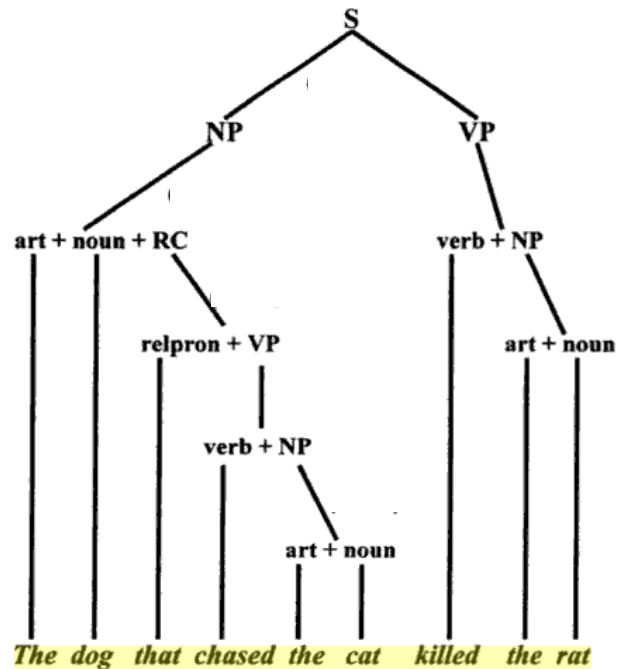
- 47 In de taalwetenschappen gebruikt men grammatica om de opbouw van zinnen te beschrijven. Bekijk bijvoorbeeld de zin:

“De rode keuken zal snel gemonteerd worden.”

Vertaal deze zin in twee andere talen en vergelijk de opbouw tussen de drie zinnen. Wat zijn overeenkomsten en verschillen in de structuur?

- 48 Lastiger wordt het met de Engelstalige zin:  
“The dog that chased the cat killed the rat”  
In de figuur hiernaast wordt de structuur van de zin met een graaf beschreven.

- Welke definities en regels spelen een rol bij het aanbrengen van deze graafstructuur?
- Vertaal de zin in het Nederlands en beschrijf de structuur met de Nederlandse variant van deze graaf. Wat valt je op met betrekking tot de definities en de regels?



- 49 In het boek “Gödel, Escher, Bach” van Douglas Hofstadter worden structuren van taal en kunst onderzocht en vergeleken. Daarbij spelen ‘kunsttalen’ een rol.

Bekijk bijvoorbeeld de taal MIU:

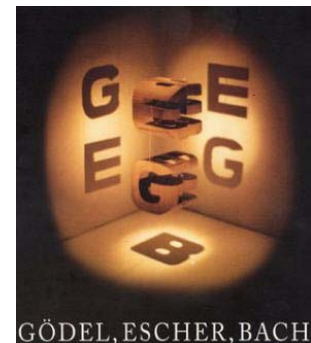
De taal bevat drie karakters: M, U en I.

De taal kent het woord (axioma of uitgangspunt): MI

Er zijn de volgende vier regels om nieuwe woorden (zinnen) te maken (de letters x en y staan voor willekeurige zinsdelen):

- $xI \rightarrow xIU$
- $Mx \rightarrow Mxx$
- $xIIIy \rightarrow xUy$
- $xUUy \rightarrow xy$

- Uit de eerste regel volgt dat je de zin MIU kunt afleiden uit MI.
- Welke regels moet je toepassen om MIUIU te maken?
- (moeilijk!) Bewijs dat in een zin het aantal I's nooit een 3-voud is.
- Is het mogelijk om MU af te leiden?



Een grammatica beschrijft van de systematiek en structuur van woorden en zinnen van een taal. De taal kan ook een volledig formeel-wiskundige beschrijving zijn of bijvoorbeeld een beschrijving van de structuur van een bepaald type muziek- of danscomposities.

- 50 Hierna volgen twee citaten. Een over taalkunde en een over dans. Beide teksten zijn voorbeelden van de rol van structuur en systematische afspraken in beide kunstvormen. Kies een onderwerp (taal, dans, muziek, beeldende kunst, rechtspraak, ...) en onderzoek hoe daar zo'n systematische benadering functioneert. Schrijf een verslag over je bevindingen (ca 2 A4-tjes).

### **Een citaat over taal en grammatica**

Taal als parasiet

IN DE EVOLUTIONAIRE TAALWETENSCHAP DRAAIT ALLES OM BETEKENIS

Hoe is menselijke taal ontstaan? Volgens de Leidse school van de evolutionaire taalwetenschap is betekenis de drijvende kracht. 'Betekenissen verrijken de mens maar kapselen hem ook in.'

Van Driem ziet de ontwikkeling van taal als een geleidelijk proces, gestuurd door natuurlijke selectie. Met kracht verwerpt hij de visie van generatieve taalkundigen à la Noam Chomsky, die stellen dat taal zich ergens in de afgelopen 200.000 jaar plotseling aandiende, toen de mens syntaxis (grammatica) leerde hanteren. Van Driem: "Generativisten doen heel ingewikkeld over syntaxis. Maar in vergelijking met zoiets ingewikkelds als betekenis is het Spielerei, ook al omdat het wiskundig zo eenvoudig is. Ze negeren dat de cognitieve voorwaarden voor het ontstaan van taal bij primaten allang aanwezig waren. Ook chimpansees en bonobo's kunnen betekenisvol met woordvolgordes omgaan."

De oorsprong van taal heeft volgens Van Driem dus niets te maken met het verwerven van het vermogen om grammatica te hanteren. Voor de evolutie van de menselijke spraakorganen geldt hetzelfde. Het gaat dan om de positie van het strottenhoofd. Waar mensapen door hun neus 'praten' en vooral de toonhoogte van hun klanken kunnen variëren, is de mens tot veel meer in staat. De relatief diepe ligging van het strottenhoofd in onze keel - met het risico van verslikken - verschaft ons een lang spraakkanaal dat lucht via de mond voert, waardoor een veelheid aan spraakklanken kan worden geproduceerd. "Maar", zegt Van Driem, "eerst kwam de taal om vervolgens via natuurlijke selectie de ontwikkeling van het spraakkanaal verder te sturen."

(...)

Onder welke condities kon taal gedijen? Mentale voorlopers zijn volgens Van Driem herinneringen en categorisch denken, met zijn indeling in bijvoorbeeld 'giftige' en 'niet giftige' bladeren. Ook het vermogen te bedriegen speelde een rol. Dat Homo ergaster en zijn opvolger erectus gereedschap hanteerden is op zichzelf geen voorwaarde, eerder een indicatie dat intellectueel het niveau in zicht kwam waarop taal kon ontstaan. Het zijn cognitieve vaardigheden die ook aanwezig zijn bij andere primaten. Dat die geen taal ontwikkelden komt volgens Van Driem omdat alleen de mens op een zeker moment in zijn evolutie over zulke grote hersenen beschikte dat zoiets complex als taal tot de mogelijkheden ging behoren.

"Waar het om gaat is de vergroting van de hersenschors, gepaard gaande met een enorme toename van het aantal mogelijke neuronale verbindingen. Dat graduele proces van natuurlijke selectie in de prehistorie van de hominiden mondde uit in een brein dat rijp was om door taal gekoloniseerd te worden. Vervolgens werd taal, door het voordeel dat zij bood, de dominante factor in de evolutie van het brein. De enorme verdere ontwikkeling van de prefrontale hersenschors is aan taal te danken, niet andersom."



**structuurdenken**

Forsythe beschikt over systeemkaarten ter ondersteuning van de choreografie, koestert een grote interesse in de grammatica en het functioneren van beweging, beeld en geluid. Beweging en geluid worden gegeneerd in een voortdurend proces van transformatie. Op zich elementair ('simpel') materiaal wordt onder hun handen en in de lijven van de dansers, via betrekkelijk eenvoudige operaties tot complexe, gelaagde, polyvalente constructies in tijd.

Dans is een taal van gecodeerde bewegingen. De academische techniek definieert basisbewegingen aan de hand van horizontale, verticale en transversale assen en vlakken ten opzichte van de (rechtopstaande) rug. De benen worden het liefst uitgedraaid, en de danser presenteert zich bij voorkeur diagonaal of frontaal aan het publiek. Deze drie punten vormen de basis voor een gedetailleerd vocabulaire van gecodeerde bewegingen.

Eén enkele beweging of combinatie van bewegingen kan naar believen de bouwsteen vormen voor een choreografie volgens simpele compositie-regels. Een van Forsythe's geliefde choreografische methodes is de contrapuntische: een aan de muziek ontleend compositieprincipe voor het creëren en fraseren van melodieën bovenop een basismelodie. Het contrapuntisch instrumentarium steunt daarbij vooral op variaties in timing, frasering van het materiaal en elementaire richtingswisselingen (links-rechts, voor-achter, diagonalen), ruimtelijke spiegelingen, canonstructuren, ingebouwde herhalingen. Een choreograaf kan aldus asymmetrieën tevoorschijn toveren uit een perfecte harmonie, en vice versa.

Ieder lichaamsdeel kan ieder waargenomen of denkbeeldig punt, lijn of vorm traceren. Dit punt-punt-lijn principe borduurt verder op Rudolf von Laban's notie van trace-forms. Stel je twee punten in de ruimte voor. Je neemt een lichaamsdeel en verbindt de twee punten: de voet veegt een lijn achterwaarts over de vloer, de atlaswervel traceert de contouren van het plafond. Je kunt ook letters of woorden met een lichaamsdeel beschrijven. Nadere specificaties of inperkingen kunnen gegeven worden in termen van het aantal lichaamsdelen dat opeenvolgend of simultaan in actie komt, de ruimtelijke vlakken waarin bewogen wordt, het behouden van een bepaald volume. Bijvoorbeeld 9-point deployment of de kubus: een danser stelt zich een kubusvormige figuur voor rond het lichaam, met de ruggengraat als verticale as. Ieder van de zes vlakken heeft negen punten: op de uiteinden en midden op iedere lijn. Handen, voeten, of willekeurig welk lichaamsdeel kunnen van punt naar punt bewegen.

Een methode die Forsythe soms hanteert voor het creëren van materiaal. Een bewegingsalfabet wordt gevormd door een verzameling van 26 reeksen geabstraheerde gebaren, manipulaties en andere ('denkbeeldige') handelingen. Voor iedere letter van het alfabet kan een woord worden verzonnen - overwegend namen, werkwoorden, zelfstandige en bijvoeglijke naamwoorden. Daarbij komt een beweging. Bijvoorbeeld: s = scratch: krab-bewegingen. Het eerste woord of beweging in een reeks roept een andere beweging of een volgend woord op. Bijvoorbeeld: scratch = dj > d = disk: van krabben naar platen draaien naar knieschijf, en/of j = jockey: paardenrace. Reeds spoedig ontstaat een associatief verbonden familie van 26 'gedanste woorden'.

De regels voor het genereren van in de tijd opeenvolgende configuraties schrijven onder meer het aantal herhalingen voor, de lengte, de aard van de variaties en ruimte voor eventuele externe ingrepen. Elementaire formeel-geometrische operaties zijn bijvoorbeeld: iedere frase 'vermenigvuldigt' (herhaalt) zichzelf; iedere frase wordt, gelijk een anagram, verlengd met een in de tijd omgekeerde versie van zichzelf; iedere frase wordt verlengd met het eigen ruimtelijk spiegelbeeld achter het origineel; iedere frase 'vermenigvuldigt zichzelf' bij een volgende danser met vaste vertraging.

## Tot slot

### 51 "Als de brug open is, dan staat het sein op onveilig."

De tekst hieronder komt uit het boekje *Exakte Logica* van de wiskundige Hans Freudenthal. Wat is je commentaar op zijn voorbeeld voor de motivatie van de waarheidswaarden van de als-dan-vorm.

Om te weten te komen, of een samengestelde propositie „ $p$  en  $q$ ” waar is, behoef ik alleen te weten, of de twee onderdelen  $p$ ,  $q$  waar zijn. Is dat het geval, dan is „ $p$  en  $q$ ” waar. Enige nadere kennis omtrent de inhoud van  $p$  of van  $q$  is hiervoor niet vereist. Evenzo kan ik tot de waarheid van „ $p$  of  $q$ ” besluiten, zodra ik weet dat tenminste een der samenstellende proposities waar is; de inhoud van  $p$  en van  $q$  doet er niet toe.

(Merk op: „ $p$  of  $q$ ” wordt ook dan als waar beschouwd, wanneer zowel  $p$  als ook  $q$  waar is.)

Iets dergelijks geldt ten aanzien van „als  $p$ , dan  $q$ ”. Wanneer is zulk een propositie waar? Laten we het voorbeeld van daarstraks beschouwen. Er zijn op zichzelf vier mogelijkheden, die we door de vier hokjes in het schema

|      |          |      |      |       |
|------|----------|------|------|-------|
|      |          | brug | open | dicht |
| sein | onveilig |      |      |       |
|      | veilig   |      |      |       |

willen weergeven. Welke van deze vier gebeurlijkheden bevestigen nu de uitspraak

„als de brug open is, dan staat het sein op onveilig”, en welke zijn er mee in strijd? Als ik de brug open vind en het sein op „onveilig” (hokje links boven), wordt de uitspraak bevestigd;

evenzo als ik de brug dicht vind en het sein op „veilig” (hokje rechts onderaan). En dit geldt ook nog, als de brug dicht is en het sein op „onveilig” (hokje rechts boven), want de uitspraak zegt in 't geheel niets over wat zich voordoet, indien de brug dicht is; het sein mag dan op „veilig” of „onveilig” staan. Maar als ik eens een keer de brug open en desondanks het sein op „veilig” vind (hokje links onderaan), is de uitspraak weerlegd.

Ik constateer dus: Een propositie „als  $p$  dan  $q$ ” is alleen onwaar, als  $p$  waar en desondanks  $q$  onwaar is; in alle andere gevallen is zij waar — dus zij is waar, zowel indien  $p$  onwaar is en  $q$  willekeurig, als ook indien  $q$  waar is en  $p$  willekeurig.

We schrijven in het vervolg:

$p \wedge q$  in plaats van „ $p$  en  $q$ ”,  
 $p \vee q$  „ „ „ „ „ $p$  of  $q$ ”,  
 $p \rightarrow q$  „ „ „ „ „als  $p$ , dan  $q$ ”,  
 $p \leftrightarrow q$  „ „ „ „ „ $p$  dan en slechts dan, als  $q$ ”.

Het teken  $\vee$  is ontstaan uit de  $v$  van Latijns vel (= of); de  $\wedge$  is de  $v$  op zijn kop. De tekens  $\rightarrow$  en  $\leftrightarrow$  spreken voor zichzelf.

Voor de diverse verbindingsen heeft men ook de namen:

$p \wedge q$  conjunctie (van  $p$  en  $q$ ),  
 $p \vee q$  disjunctie (van  $p$  en  $q$ ),  
 $p \rightarrow q$  implicatie (van  $p$  naar  $q$ ),  
 $p \leftrightarrow q$  wederzijdse implicatie.

52 In het begin van dit boekje stond een opgave over verschillen in strafmaat (opgave 18 op pagina 40 ).

We hebben het commentaar van een jurist gevraagd. Zijn reactie is:

“De strafmaat wordt bepaald door o.a. het wettelijk strafmaximum (de bovengrens) en de beleidsregels van het OM. Een ondergrens/strafminimum is er (nog) niet. Desalniettemin bestaat er voor de strafrechter veel ruimte om in een individueel geval een strafmaat vast te stellen. De rechter kijkt naar de ernst van het feit, de omstandigheden waaronder het feit is begaan, de persoon van de verdachte en persoonlijke omstandigheden van de dader.

De penningmeester uit Kessel lijkt erg mild bestraft te zijn, terwijl de vrouw die collectegeld stal zwaar werd bestraft. Ik heb echter de indruk, dat penningmeester is veroordeeld voor verduistering (321 WvSr) en de vrouw wegens diefstal (310 WvSr). Diefstal kent een zwaarder wettelijk strafmaximum dan verduistering. Bovendien geven de krantenartikelen weinig informatie over de persoonlijke omstandigheden van de daders. Misschien is de vrouw al eerder veroordeeld en de penningmeester niet eerder. Het kan m.i. dus best zo zijn, dat de verschillen in strafmaat – als kennis wordt genomen van het gehele strafdossier – verklaarbaar zijn. Toch denk ik ook dat er verschillen in strafmaat zijn in goed vergelijkbare gevallen, die waarschijnlijk verklaard worden door de persoon van de rechter.”

Is de strafmaat dus een kwestie van logisch redeneren?

