

achtergronden en lessuggesties

voor

Logisch redeneren

Achtergrondinformatie Logisch redeneren

Dit lesmateriaal wijkt af van de gebruikelijke inleidingen tot de logica:

De hoofdrekenen zijn:

- *Dit is voor de leerlingen een onbekend vak en hun achtergrond is vaak niet erg wiskundig. Door met serieuze contexten te beginnen lijkt me een minder formele en een meer zinvoller introductie het proberen waard.*
- *De leerlingen komen situaties tegen die niet gladjes volgens het geleerde kunnen worden aangepakt. Zo kan misschien de behoefte aan meer precisie gewekt worden. In de volgende hoofdstukken zal dat ook echt wel gedaan worden.*
- *Door het bestrijken van allerlei gebieden wordt de suggestie gewekt dat de wereld vol zit met logica en onlogica.*
- *Het benoemen van onderdelen in een tekst (uitgangspunten & conclusie) werkt wel, maar is veel werk. Daar kunt u bezuinigen. Slechts één of twee laten maken en klassikaal bespreken? Daarmee duidelijk maken welke dilemma's en vragen spelen en wat van hen verwacht wordt als ze in groepjes eraan werken.*

Bij de opgaven.

Besprek de oplossingen en redeneringen van de leerlingen bij de eerste vragen in deel 1. Vraag naar gemeenschappelijke kenmerken in de oplossingen. Indien mogelijk, maak het type als-dan-redenering expliciet (en de omkering bij vader en zoon).

De opgave met de petjes is voor een paar groepjes te hoog gegrepen. Tenminste, als ze binnen 10 minuten tot een redelijk antwoord moeten komen. Hints zijn mogelijk.

Bij de opgave over even/oneven (2) vinden de meesten het juiste antwoord, maar alleen gemotiveerd met getallenvoorbeelden. Optie voor een klassikale bespreking: de formules $y = x^3$ en $y = x$ lijken gelijk na invullen van $x = 0$, $x = 1$ en $x = -1$. Maar toch zijn ze niet gelijk! Je moet oppassen met een paar kloppende voorbeelden.

De vraag over de vierhoek levert goede discussies. Hoewel het gegeven voor onderdeel b (punt D ligt rechts van AC) verwarrend is. Wij begrijpen direct dat bedoeld wordt binnen driehoek ABC, maar rechts van AC is veel ruimer. In een eerder experiment was een groepje overtuigd van de juistheid van de stelling. Ze passen het bewijs aan: er is altijd een diagonaal die de vierhoek in tweeën deelt. Een leerling: "Of moeten we dat nu ook eerst bewijzen?"

Een ander groepje was ook overtuigd van de stelling. Een van de leerlingen: "we moeten een andere manier van bewijzen vinden dan door hier een lijn te trekken."

Leerling: "je hoeft geen lijn te trekken. Je kunt ook zeggen dat de vierhoek uit 2 driehoeken bestaat."

De ene weer: "maar in het bewijs kun je dan niet uitgaan van A1, A2, ..."

Weer een ander groepje twijfelt ook over de stelling. Er ontstaat binnen de groep discussie over het kunnen verdelen van de vierhoek in twee driehoeken. Een van de leerlingen vindt dat daarmee de stelling moet worden aangepast, de anderen willen het gebruiken in het bewijs van de oorspronkelijke stelling. Het mooie van de discussies is dat goed naar voren komt welk type vragen je bij redeneringen kunt stellen en je kunt afvragen wat nu eigenlijk uitgangspunten (aannames) zijn en hoe je die in een redenering gebruikt.

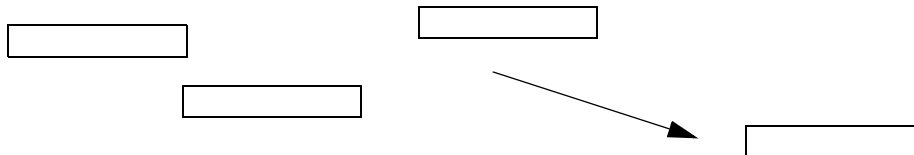
Dat is direct ook het lastige van deze fase in het materiaal. Voor de leerlingen is natuurlijk het primaire doel van de opgaven om het antwoord te vinden. "Is dit goed meneer?" Eigenlijk moeten ze leren over welke dilemma's dit materiaal gaat en welke vragen je daarbij stelt (op welk type vragen we een antwoord aan het zoeken zijn). Met als conclusies:

- *type vragen die je elkaar stelt (hoe weet je dat? weet je dat wel zeker?)*
- *rol van uitgangspunten als aannames (en die eigenlijk ook weer een bewijs/redenering vragen)*
- *volledigheid van redeneringen en redeneerstappen (welke extra informatie speelt eigenlijk een rol, hebben we voldoende informatie?)*
- *rol van voorbeelden*

Mooie opmerking van een leerling: "net als mijn biologieleeraar, die zegt ook altijd dat iets logisch is, maar heeft dan kennelijk een heel andere redenering voor ogen dan ik kan bedenken."

Discussies kunnen ook gaan over het verschil tussen waarheid en afleidbaarheid of het ontbreken van premissen.

In het vervolg gaat het lesmateriaal over bouwstenen van een redenering. Structuren van teksten en weergaven daarvan in (boom)schema's. In een tekst aangeven door onderstrepen of inkaderen.



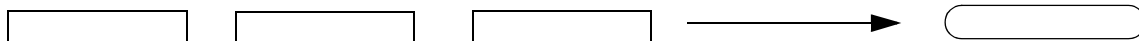
Onderwerpen zijn:

Wat staat in het blok-propositie definiëren.

Haken en ogen die hieraan kleven.

Teksten onderzoeken

Redenering structureren met uitgangspunten of aannames en conclusie:



Van verbindingswoorden naar het invoegen van logische connectieven tussen de blokken
 $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\supset$ $\neg$ en ook met waarheidstafels.

Dan komt de kern: wat doen we bij het redeneren?

Gebruikmaken van de uitgangspunten + andere kennis.

Er bestaan handige apparaatjes die vaak van pas komen: redeneerregels o.a. *modus ponens* en *modus tollens*. Die kunnen verscherpt worden (of zelfs ontwikkeld worden: "schrijf in een zin op hoe je tot een conclusie gekomen bent") met puzzels waar ze functioneren om strategieën te expliciteren (vergelijk rol van ziektes en symptomen bij het stellen van diagnoses).

Er is uiteindelijk aandacht voor zinnen met behulp van notaties voor proposities en logische connectieven. Eenvoudige afleidingen, redeneerstappen, tautologie en contradictie. Dus wel kennismaken met de geïdealiseerde wereld van de propositiologica, maar geen volledige verwerking daarvan.

Verder wordt in deze opgave het verschil tussen 'want' en 'dus' aangestipt, maar dat mag wel explicieter worden afgesloten.

Een observatie:

Bij de opgave over stenen die aan beide kant een plaatje hebben ontstaat een leuke discussie. De zin is "als aan de ene kant een maan staat dan staat aan de andere kant een vis." De eerste steen met een maan geeft geen problemen, maar bij de volgende steen met een vlinder ontstaat onenigheid.

Antwoorden zijn: "nee, achter 2 kan geen maan staan."

"Zon."

"Ieder hemellichaam buiten de maan."

Een buurman reageert op het laatste antwoord: "maar dan wordt het toch een andere bewering?"

Uitgangspunten voor het hele boekje

Dit onderwerp is zinvol voor de leerling nu en later. We laten zien waarom dit onderwerp bij wiskunde is geplaatst door aandacht te besteden aan cultuur, taal, geschiedenis en vervolgoopleidingen als rechten en letteren.

De grondbeginselen moeten goed gekend worden (ook enkele trainingsopgaven). Dan kan later over de rand gekeken worden (keuzestof). Voorbeeld: systemen met meer waarheidswaarden dan alleen 0 en 1 (dit is ook iets waar de opgaven met waarheidstafels op voorbereidt).

Toepassingsgebieden (o.a.): betogen, dialogen, discussies en debat bij wiskunde, filosofie, sociale wetenschappen, politiek, journalistiek, conflictoplossing, rechten.

Er is aandacht voor verschillen tussen discussie en debat (waarheidsvinding versus winnen), brainstormen, argumentatieleer, invloed van reclame en propaganda (mensen maken niet alleen keuzes op grond van een redenering). Betogen die niet zuiver zijn (bijv. retoriek en gevoelsargumenten). Rotsvaste overtuigingen die discussies vruchteloos maken.

Welke type vragen kun je stellen bij een redenering?

Nietvolmaakte redenering zo goed mogelijk aanvullen.

De experimenten met dit materiaal moeten de grenzen van de mogelijkheden verkennen (opgaven zullen variëren van te makkelijk tot te moeilijk).

Relatie met domeinen A en B voor wiskunde C (algemene vaardigheden en reflectie op de rol van wiskunde)

Reken- en algebraïsche-vaardigheden: In de diverse hoofdstukken staan opgaven waarmee extra aandacht aan rekenen en algebra kan worden besteed. De docent wordt aangemoedigd om dergelijke momenten te benutten voor een herhaling, oefening en verdieping van de gewenste vaardigheden. Uit de eerste experimenten bleek dat de som over even en oneven getallen in hoofdstuk 0 zich al uitstekend leent om langer bij stil te staan en algebraïsch te benaderen.

Geschiedenis: Boole, Klassieke paradoxen.

Maatschappelijke functie en relatie met andere vakken: Krantenartikelen, rechtspraak, taalwetenschap, kunst.

Rol binnen de wiskunde: Het materiaal bevat veel wiskundige contexten (zowel meetkundig als uit getaltheorie en analyse) waarbinnen het nut en de werking van logisch redeneringen worden uitgewerkt.

Het vervolg

Aan het eind van het materiaal geven we enkele keuzeonderwerpen aan. Het idee is dat we hiertoe op internet een verzameling met bronnen publiceren. Docenten kunnen daarvan gebruik maken, maar kunnen ook eigen materiaal er aan toevoegen. Dit zou zich niet moeten beperken tot krantenartikelen, maar ook bijvoorbeeld verwijzingen kunnen bevatten naar radio of tv-uitzendingen (uitzendinggemist.nl).

