Meetkunde met coördinaten

Blok I

Redeneren met vormen, getallen en formules

Inleiding op dit blok

In dit eerste blok brengen we meetkunde en algebra dicht bij elkaar.
Meetkunde gaat over figuren, algebra gaat over formules en rekenen daarmee.

We doen dat aan de hand van drie onderwerpen die je gedeeltelijk kent:

a. De stelling van Pythagoras. Paragraaf 1 tot en met 3.
Die gaat over het rekenen aan rechthoekige driehoeken. Je komt oude bekenden tegen, maar ook heel wat nieuws. Aan de hand van Pythagoras rekenen we onder andere wat meer met wortels.

b. Gelijkvormigheid. Paragraaf 6 tot en met 9.
In dit blok pakken we gelijkvormigheid aan op een andere manier dan in de onderbouw. Weer kom je het samengaan van werken met figuren en rekenen met algebra volop tegen.

c. De stelling van Thales. Paragraaf 10.
Bij deze stelling komen cirkels ter sprake. Alles wordt verbonden met de twee vorige onderwerpen, weer via de meetkunde én de algebra.

En paragraaf 4 en 5 dan?
Daar gaat het over de methode zélf. Over de manier waarop we algebra en meetkunde combineren. Omdat die methode verder steeds wordt gebruikt, is het de eigenlijke kern van het blok.

Veel succes!

Meetkunde met coördinaten
Blok I: Redeneren met vormen, getallen en formules

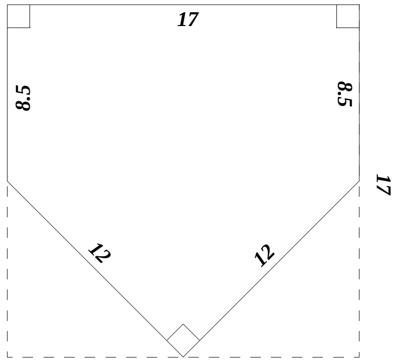
Experiment: Nieuwe Meetkunde VWO B, 2013.
Op voorstel van de cTWO (Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs).

Ontwikkelteam: Richard Berends (NSG Groenewoud, Nijmegen), Josephine Buskes (Kandinsky College, Nijmegen), Aad Goddijn (FIsme), Sieb Kemme (cTWO), Dick Klingens (Krimpenerwaard College, Krimpen a/d IJssel).
Ontwerp blok 1: Aad Goddijn (FIsme; Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen).

Versie: ***Experimentele versie 1***
Datum: 25 oktober 2008.

1: Home plate en Grass line

Op de voorplaat van dit blok staat David Ortiz van de Boston Red Sox. Hij staat hier in de *left-handed batter's box* van het baseball veld. Wordt ook maar linkshandig; Ortiz is in 2008 goed voor $13 000 000 aan inkomsten!
Dit wordt vast weer een van zijn homeruns. Via first, second en third base terug over de *Home Plate*, dat is de witte vijfhoek op de foto.
De baseball spelregels leggen de maten van de ***homeplate*** zó vast:

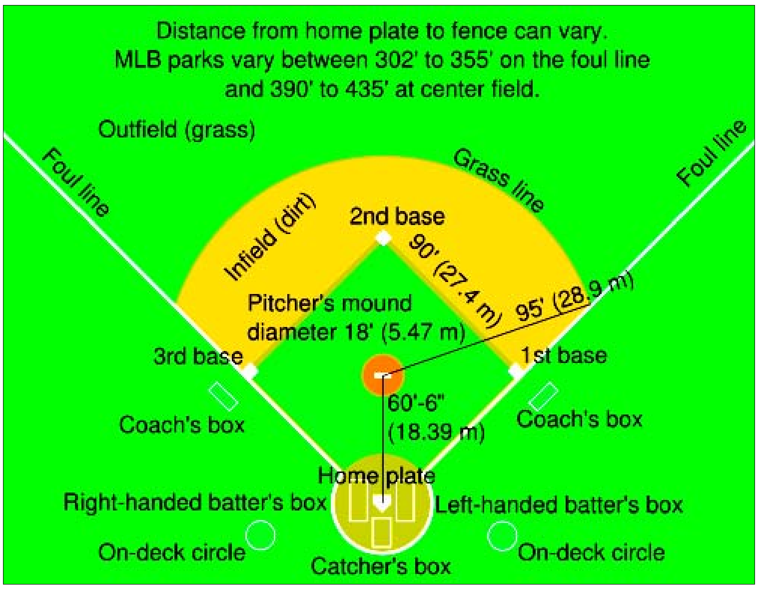


Home base is a five-sided beveled [afgeschuind] *slab that measures 17 inches by 17 inches, with two of the corners cut off so that the two parallel sides are 8.5 inches long and the two sides that come together to make a point are 12 inches long. Shaped like a house.*

1.1 De Home plate onderzocht

De Home plate is dus een vierkant van 17 bij 17 inch, waar twee hoeken vanaf zijn gesneden. In de figuur hiernaast zijn de rechte hoeken en de maten aangegeven.
Ga met een berekeningen na of dat dit allemaal wel exact kan kloppen!
Schrijf je berekening met je conclusie op en geef aan op welke stelling je aanpak berust.

De Home Plate ligt met de zijden van 12 inch in de rechte hoek van de twee *foul lines*. Op het overzicht van het veld is het maar een klein ding.

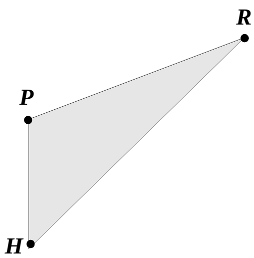


1.2 De Grass line

De *Grass line* is een grote cirkel om de *Pitcher's mound*; de straal is in de figuur aangegeven. Het is de grens tussen *infield* en *outfield*. De overgang van '*dirt*' naar '*grass*' voel je als je als speler aan je voeten als je hard loopt en in de lucht kijkt om de bal te vangen.
De foul lines zijn de lijnen waar de bal binnen moet blijven. De Grass line loopt tot aan de foul lines.

Hoever van de 12-12 hoek van de home plate snijdt de grass line de foul lines?

Gebruik de hulpfiguur hiernaast!
Daarin moet je dus *HR* berekenen.
Trek eerst de loodlijn *PS* uit *P* op *HR* en bereken daar de lengte van.
Bedenk daarbij: *HS* = *PS*.



berekening van PS:

berekening van SR:

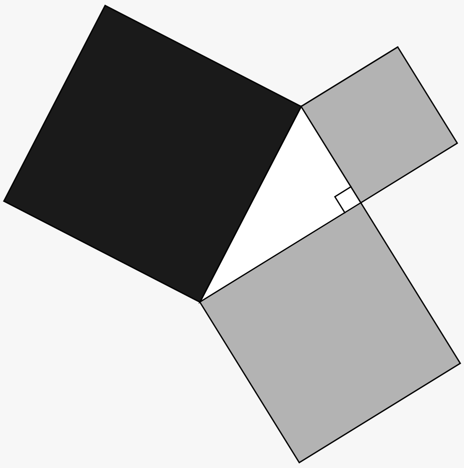
berekening van HR:

2: Pythagoras beredeneerd

Bij de baseball-opgaven op de vorige bladzijde kwamen rechte hoeken en afstanden voor. De welbekende stelling van Pythagoras gaat over de zijden van een driehoek die een rechte hoek heeft. Die stelling heb je al vaak gebruikt. In deze paragraaf kijken we eerst waarom het zo absoluut zeker is dat de stelling klopt. We gaan dus de stelling *bewijzen*.
Je kunt de stelling op *twee* manieren onder woorden brengen.

Eerste manier: met oppervlaktes van vierkanten in een figuur

De stelling van Pythagoras in oppervlaktevorm



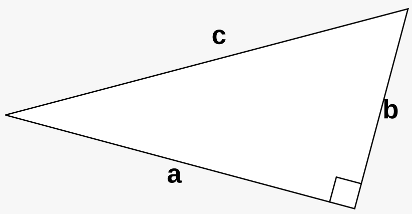
Gegeven situatie:
Een driehoek met een rechte hoek.
Op elke zijde is een vierkant gezet.

De Stelling van Pythagoras zegt:
De oppervlaktes van de vierkanten rond de rechte hoek zijn samen gelijk aan de oppervlakte van het derde vierkant.

In de figuur:
Donker en licht grijs zijn in oppervlakte gelijk

Tweede manier: met lengtes en een formule

De stelling van Pythagoras in algebravorm



Gegeven situatie:
Een driehoek met een rechte hoek.
De zijden hebben lengtes ***a***, ***b*** en ***c***.
De zijde met lengte ***c*** ligt tegenover de rechte hoek.

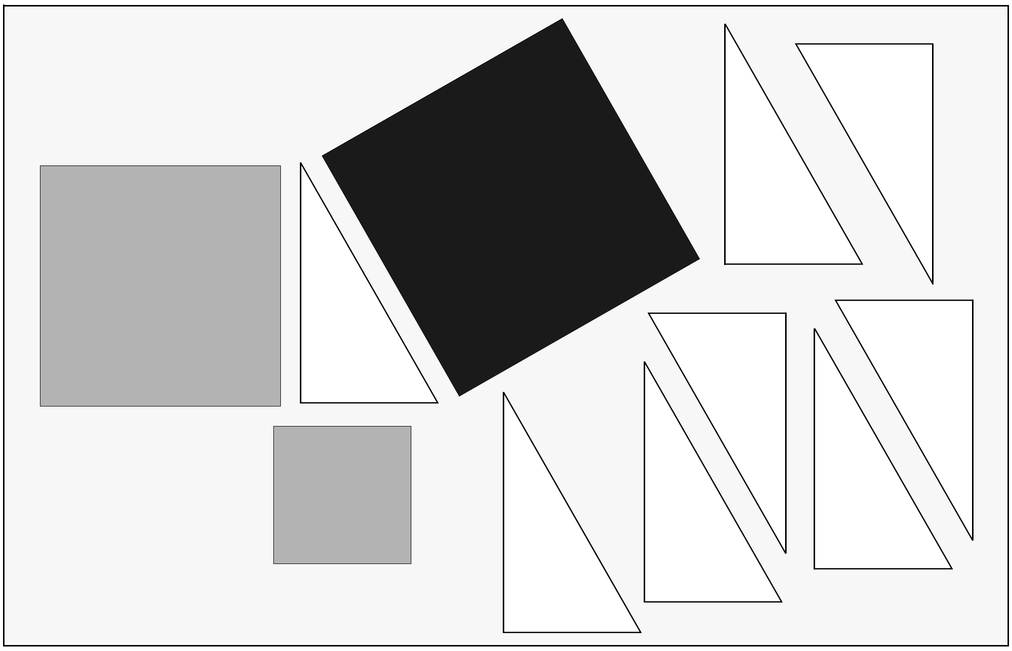
De Stelling van Pythagoras zegt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Bij de eerste manier zie je drie vierkanten in de figuur. Bij de tweede manier zie je in letters de kwadraten van *a*, *b* en *c*. Die *kwadraten* zijn de *oppervlakten* van de vierkanten, dus er staat helemaal hetzelfde.
In dit blok kijken we vaak op deze twee manieren naar meetkundige problemen: de manier met *figuren* en de manier met *getallen en algebra*.

Bij beide manieren hoort een bewijs van de stelling van Pythagoras.

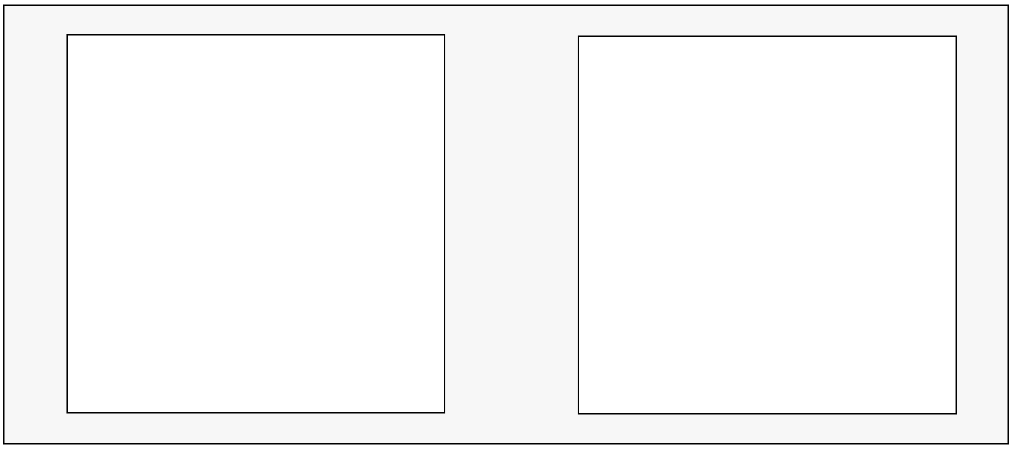
Redeneren op de eerste manier: oppervlaktes van de vierkanten



2.1 Een legpuzzel

Hierboven zie je de drie vierkanten die op de zijden van witte rechthoekige driehoek passen. Er zijn nog zeven extra driehoeken, van precies dezelfde vorm.

Hieronder zie je twee keer het zelfde vierkant, waarvan de zijde gelijk is aan de zijden van de twee lichtgrijze vierkanten samen.



a. Laat zien door tekenen (of puzzelen met de stukken die je uit bladzijde 37 knipt) dat
- de twee lichtgrijze vierkanten plus vier witte driehoeken passen precies samen in een van de witte vierkanten
- het ene donkergrijze vierkant plus vier witte driehoeken passen precies samen in het ander (even grote) witte vierkante.

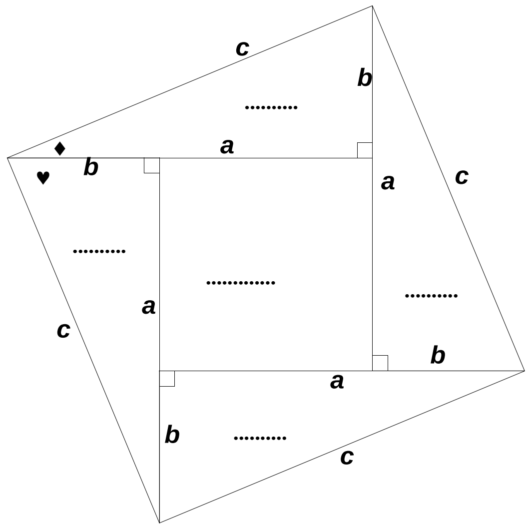
b. Hoe weet je nu dat inderdaad geldt: de twee lichtgrijze vierkanten zijn samen even groot als het donkergrijze vierkant?

Redeneren op de tweede manier: van lengtes *a*, *b* en *c* naar formule

2.2 We gaan uit van deze tekening

Hier zijn vier rechthoekige *abc*-driehoeken aan elkaar gelegd. Zo ontstond een groot vierkant en een binnenvierkant.

De oppervlakte van het grote vierkant is c^2.



a. Waarom is de grote figuur eigenlijk een vierkant? Leg dat uit door te verklaren waarom de hoeken met ♦ en ♥ samen 90° zijn.

b. Zet in de vijf delen van het grote vierkant uitdrukkingen (met *a* en *b* erin) voor de oppervlaktes.

c. Stel de vergelijking op die de samenhang tussen c^2 en de andere stukken aangeeft:

c^2 = ...

d. Werk het rechterlid nu verder uit totdat je uiteindelijk de formule $c^2 = a^2 + b^2$ te pakken hebt.

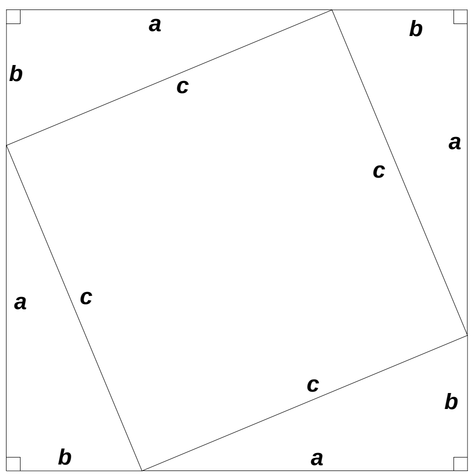
$$c^2 = a^2 + b^2$$

oefening

2.3 Een andere mogelijkheid

Er is nóg een mogelijkheid vier rechthoekige ***a-b-c*** driehoeken tot een buiten- en binnenvierkant te leggen: met de rechte hoeken buiten. Zie hiernaast.

Weer kun je op twee manieren de oppervlakte van het grote vierhoek bekijken: als geheel en in delen.



a. Stel de vergelijking die daarbij hoort op, en herleidt die ook tot de Pythagoras-vergelijking.:

De omkering van de stelling van Pythagoras

2.4 Twee driehoeken in onderzoek

Hier zijn van twee verschillende driehoeken de zijden gegeven. Je moet nagaan of de driehoeken rechthoekig zijn of niet.

a. De zijden zijn 68, 61 en 30.

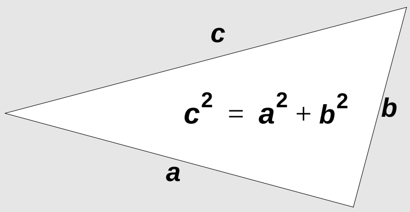
Deze driehoek is WEL / NIET rechthoekig, want ....

b. De zijden zijn 65, 56 en 33.

Deze driehoek is WEL / NIET rechthoekig, want ....

Deze opgave heb je vast opgelost, door na te gaan of de relatie $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$ geldt voor de zijden. Klopt de gelijkheid, dan weet je dat de hoek recht is.
Dat is juist, maar wat je gebruikt, is eigenlijk niet de stelling van Pythagoras, al lijkt het er als twee druppels water op.

Omkering van de stelling van Pythagoras



Gegeven situatie:
Een driehoek met zijden hebben ***a***, ***b*** en ***c*** waarvoor geldt
$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$

De ***Omkering*** *van de stelling van Pythagoras zegt*:

De hoek tegenover zijde ***c*** zijde is recht.

2.5 Slotvoorbeeld met een volledige redenering

Een driehoek met zijden 61, 60, 11.
Vraag: is de hoek tegenover zijde 61 recht?
Onderzoek: Er bestaat een rechthoekige driehoek met zijden 60 en 11. (Misschien is dat een *andere* driehoek dan die met 61, 60, 11.)

De zijde c van deze (nieuwe) driehoek kunnen we uitrekenen. $\boldsymbol{c} = \sqrt{\mathbf{60}^2 + \mathbf{11}^2} = \mathbf{61}$.

a. De waarde 61 is exact goed. Ga dat na met een berekening.

b. Het was dus toch dezelfde driehoek! Wat is nu het antwoord op de vraag hierboven?

c. Bij welke van de twee vragen van opgave 2.4 kun je deze redenering gebruiken?

3: Oefenen en verdiepen

3.1 Rekenen met Pythagoras

(Noteer bij je antwoorden ook of je de stelling zelf, of de omgekeerde gebruikt hebt)

a. Een driehoek heeft zijden ter lengte 5, 12 en 13. Maak een schets van die driehoek, zet de lengtes van de zijden erbij en geef aan welke hoek rechts is.

b. Een rechthoekige driehoek heeft een schuine zijde van lengte 10. De twee andere zijden hebben gehele getallen als lengte. Bereken die lengtes.

c. Een grote vierkante tafel heeft een diagonaal van 1 meter. Dan ligt de lengte (en de breedte) tussen:
A: 60 en 65 cm
B: 65 en 70 cm
C: 70 en 75 cm
D: 75 en 80 cm.
Leg je antwoord uit.

d. Van een rechthoekige driehoek hebben de zijden bij de rechte hoek lengte 9581 en 7980. Bereken de lengte van de schuine zijde.

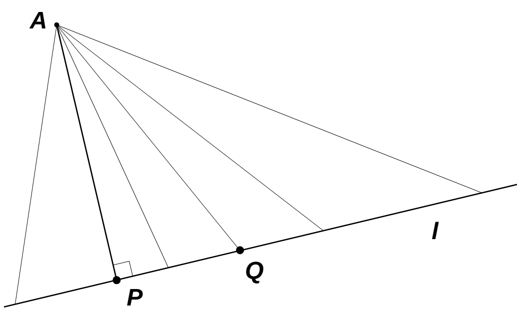
3.2 De schuine zijde is altijd de langste

In elke rechthoekige driehoek met zijden $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$ (de laatste de schuine) geldt $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$.

a. Leg uit hoe je vanuit die formule kunt concluderen dat $\boldsymbol{c}$ groter is dan $\boldsymbol{a}$.

3.3 De loodlijn is de kortste verbinding

In deze figuur is *A* een punt buiten de lijn *l*. De volgende uitspraak zal jou waarschijnlijk niet verrassen:
Van alle mogelijke verbindingslijnstukken van A met punten van l is het lijnstuk dat loodrecht op l staat het kortste.



Gebruik de rechthoekige driehoek *APQ* om dit aan te tonen. *AP* is daar de loodlijn uit *A* op lijn *l* en *AQ* is niet de loodlijn.
Toon dus aan dat |*AP*| < |*AQ*|. Noteer je redenering; je kunt daarin verwijzen naar een eerdere opgave.

3.4 Wortels en rekenmachines

Bij vraag 3.1d werd het kwadraat van de schuine zijde, zeg maar c^2, een groot getal. Omdat je c zelf wilt weten, berekende je de wortel, natuurlijk met de rekenmachine.

a. Waarschijnlijk gaf die rekenmachine een geheel getal als antwoord. Controleer door de drie getallen in de Pythagorasformule in te vullen, of er geen afrondingsfoutje is gemaakt.

b. Nog zo'n vraag als 3.1d, maar met andere getallen. Ook met de rekenmachine doen:
Van een rechthoekige driehoek hebben de zijden bij de rechte hoek lengte 1000000 en 1.
Wat is de lengte van de schuine zijde?

c. Ben je het met het antwoord van de rekenmachine eens? Waarom wel/niet?

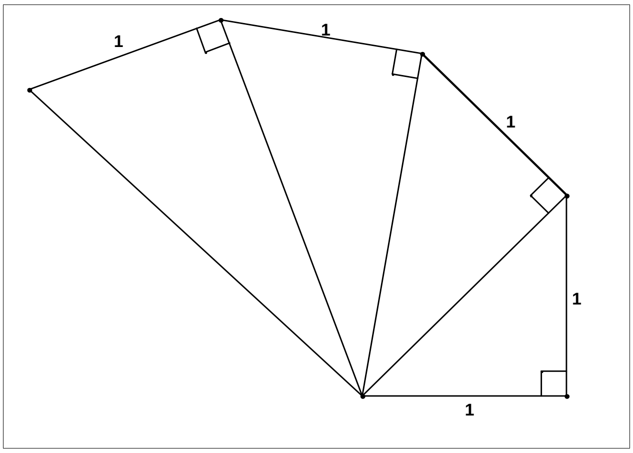
3.5 Kiezen uit wortelvormen

Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde 650 en een van de rechthoekszijden is 72.
Welke van deze formules geeft de derde zijde:? Omcirkel het antwoord.

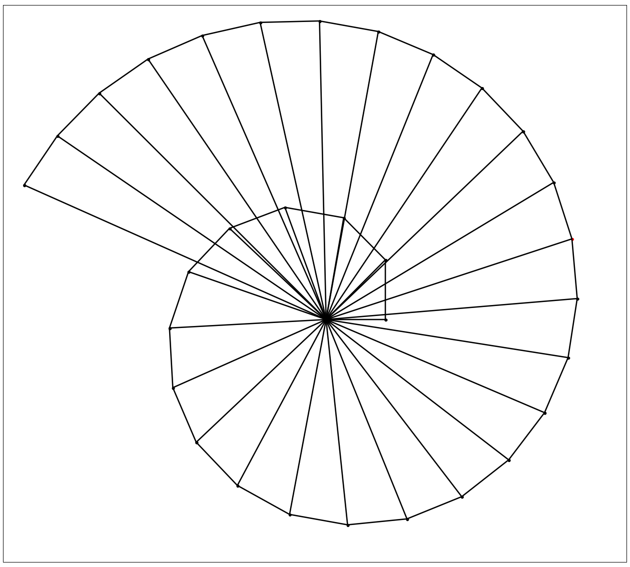
$\sqrt{650 + 72}$ $\sqrt{650^2 - 72^2}$ $\sqrt{650^2 + 72^2}$ $\sqrt{650 - 72}$

3.6 Driehoeken in serie

a. Bereken de lengtes van de lijnstukken in de eerste figuur waar nog geen lengte bij aangegeven is.
Rond je resultaat niet af; laat wortels dus staan, tenzij je zeker weet dat de lengte een geheel getal is.



b. Zoals in de tweede figuur te zien is, kan het proces onbeperkt voortgezet worden.
Na hoeveel stappen is een lijnstuk van lengte 1000 bereikt? Licht je antwoord toe.



In de tweede figuur zie je ook een spiraalachtige lijn, opgebouwd uit gelijke stukjes van lengte 1. De lijnen vanuit het centrum lijken dan ook heel gelijkmatig te lopen.

c. Zijn de hoeken tussen de opeenvolgende lijnen inderdaad gelijk? Licht je antwoord toe!

3.7 Stomp, recht en scherp

In deze tabel nog enkele voorbeelden van driehoeken met zijden ***a***, ***b*** en ***c***.

	a	b	c	scherp / recht / stomp
I	5	3	4	
II	30	30	59	
III	3	4	5	
IV	30	30	3	

	a	b	c	scherp / recht / stomp
V	5	3	4	
VI	30	30	46	
VII	70	70	99	
VIII	71	71	100	

a. Geef nu aan of de hoek tegenover zijde ***c*** scherp, recht of stomp is. Maak zo nodig een schets van een driehoek.

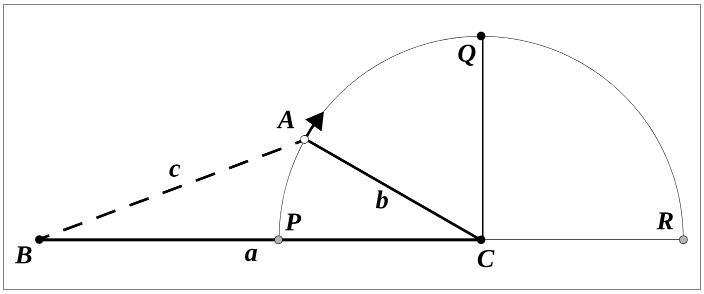
b. In de gevallen VII en VIII wijkt de hoek tegenover zijde ***c*** maar heel weinig van de rechte hoek af. Maar in die gevallen kon je tóch beslissen over stomp of scherp door Pythagoras te gebruiken. Vul nu stomp/recht/scherp aan in de rechterkolom:

	de hoek tegenover zijde c is
$a^2 + b^2 < c^2$	
$a^2 + b^2 = c^2$	
$a^2 + b^2 > c^2$	

c. Voorbeelden. Vul aan in de rechterkolom; je hoeft alleen stompe en rechte hoeken te signaleren, want scherpe zijn er altijd wel.

12, 7, 9	***stompe*** hoek tegenover zijde met lengte ***12***
12, 13, 5	.... hoek tegenover zijde met lengte ......
5, 14, 12	.... hoek tegenover zijde met lengte ....

d. In de figuur hier rechts moet je je voorstellen dat ***B*** en ***C*** vaste punten zijn. ***BC*** heeft lengte ***a***. Stel je voor dat punt ***A*** bezig is over de halve cirkel te lopen, vanaf ***P*** via ***Q*** naar ***R***. De lengte van ***AC*** is steeds ***b***. Maar ***c,*** *de lengte van* ***BA***, verandert tijdens de beweging.



Beschrijf hoe ***c*** *in grootte verandert tijdens de beweging; maak duidelijk wanneer c stijgt of daalt, wat de kleinste en grootste waarde is, wanneer de stijging of daling meer of minder sterk is, wanneer een bepaalde waarde bereikt wordt, enzovoort.*

3.8 De gehele driehoeken

In een paar opgaven van deze paragraaf kwamen rechthoekige driehoeken voor waarbij de lengtes van zijden alledrie gehele getallen zijn. Zulke drietallen heet *Pythagoreïsche drietallen*.
Bij het berekenen van de derde zijde moet vaak een wortel bepaald worden. Dat levert zelden een mooi getal op. Hoe vinden we toch van die mooie *Pythagoreïsche drietallen*?

a. Controleer door narekenen dat lijnstukken met deze lengtes een rechthoekige driehoek kunnen vormen:

$$\boldsymbol{a = 58^2 - 23^2,\qquad b = 2\cdot 58\cdot 23\qquad c = 58^2 + 23^2}$$

b. Zou dit trucje vaker werken?
Kies zelf eerst eens twee andere getallen in plaats van 58 en 23 om het patroon te testen.

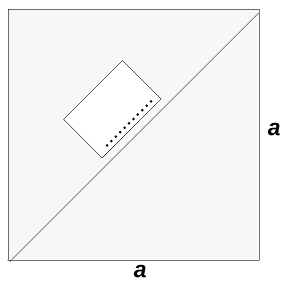
c. Om te kijken of het altijd werkt, kiezen we in plaats van speciale gehele positieve getallen nu letters, ***n*** en ***m***, die willekeurig getallen voor kunnen stellen.
We gaan wel uit van ***n* > *m***, want anders is ***a*** negatief.
Ga door algebraïsch uitwerken na of

$$\boldsymbol{a = n^2 - m^2,\qquad b = 2\cdot n\cdot m\qquad c = n^2 + m^2}$$

altijd een Pythagoreïsch drietal is.

Intermezzo √2

3.9 Vierkant en diagonaal

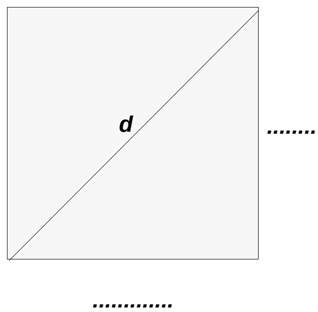


a. Hiernaast zie je een vierkant met diagonaal. Er zijn twee rechthoekige driehoeken. De zijde is aangegeven met ***a***.
Er geldt nu:

de diagonaal van een vierkant met zijde a heeft lengte $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$

Toon dit aan door de volgende redenering af te maken:

Noem de schuine zijde van een driehoek even c.
Dan geldt c^2 = ...



b. Er onder is een vierkant getekend met diagonaal ***d***.
Laat zien (met Pythagoras of anders) dat geldt:

de zijde van een vierkant met diagonaal d heeft lengte $\boldsymbol{\dfrac{d}{\sqrt{2}}}$

c. Wat is de diagonaal van een vierkant met zijde 100 cm?
Geef een antwoord in honderdste millimeters nauwkeurig.

d. Wat is de zijde van een vierkant met diagonaal 200 cm?
Geef een antwoord in honderdste millimeters nauwkeurig.

3.10 Rekenen met √2 : wortels uit de noemer halen

De formule voor de zijde van het vierkant, waarvan de diagonaal ***d*** is, was: $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Er is ook een formule waarin geen √**2** in de noemer voorkomt. Er geldt namelijk: $\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$

a. Toon dit aan door links en rechts van het gelijkteken met √**2** te vermenigvuldigen.

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$$

$\times\sqrt{2}$ $\qquad$ $\times\sqrt{2}$

....

b. Toon dit aan door in de breuk $\frac{1}{\sqrt{2}}$ teller en noemer met √**2** te vermenigvuldigen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times .....}{\sqrt{2} \times ....} = \frac{.....}{.....} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

3.11 Rekenen met √2 : uitwerken van vermenigvuldiging

a. Werk de volgende vermenigvuldigingen uit naar een vorm waarin maar één wortel voorkomt:

$$(1 + \sqrt{2}) \times (1 + \sqrt{2}) = \text{.......................................} = ...\sqrt{2} + ...$$

$$(2 + 2\sqrt{2}) \times (3 - \sqrt{2}) = \text{.......................................} = ...\sqrt{2} + ...$$

b. Maak gebruik van $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ om de volgende vermenigvuldiging te vereenvoudigen, zodat geen wortel in het resultaat voorkomt:

$$(\sqrt{2} - 1) \times (\sqrt{2} + 1) = \text{.............} - \text{..............} = ...$$

$$(5 + 2\sqrt{2}) \times (5 - 2\sqrt{2}) = \text{...........}$$

c. Herleid de breuken hieronder tot uitdrukking zonder wortel in de noemer, door teller en noemer met een handig gekozen uitdrukking te vermenigvuldigen.

$$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1 \times \text{............}}{(2 + \sqrt{2}) \times \text{.........}} = \frac{....}{....} = \qquad = ...\sqrt{2} \quad .... \quad \text{............}$$

$$\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \qquad = ...\sqrt{2} \quad .... \quad \text{............}$$

$$\frac{3\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} + 1} = \frac{\text{............} \times \text{............}}{\text{............} \times \text{.........}} = \qquad = \frac{24}{7} - \frac{3}{7}\sqrt{2}$$

4: Een belangrijke methode

4.1 Het vlaggemastprobleem

We lossen nu we een probleem, waarvan je de oplossing niet onmiddellijk kunt zien, op een speciale manier op. Het gaat echt om een speciaal, maar heel algemeen bruikbaar werkplan.

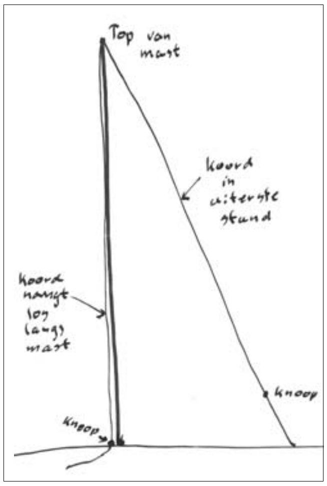
probleemstelling

Aan de top van een rechtopstaande vlaggemast zit een koord. Eén meter vanaf het losse eind zit een knoop. Als het koord los naar benden hangt, komt de knoop precies op de grond.
Je trekt aan het eind van het touw en brengt dat eind zover mogelijk van de mast naar de grond.
Het koord raakt nu de grond op 6 meter van de voet van de mast.

Vraag

Hoe hoog is de vlaggemast?

a. ***Stap 1: SCHETS MAKEN***
Maak een schets van de situatie!
Maak dus een schets waarin je koord, grond en mast tekent. Van het koord tekent je zowel de loshangende stand als de stand met de uiterste punt op de grond. Ongeveer zoals hiernaast; het kan niet precies, want je weet de juiste verhoudingen nog niet. Je doet als het ware alsof je de lengte weet!
Kleur in de schets de twee lijnstukken die in werkelijkheid even lang zijn.
Markeer ook de rechte hoek die er is.



b. ***Stap 2: GEGEVENS EN ONBEKENDE INVULLEN***
– Zet de ***bekende gegevens*** op de juiste plekken in de tekening; in dit geval de 1 en de 6 meter.
– Geef het ***onbekende*** stuk met de letter ***x*** aan.
Bij de mast; want daar moet je de lengte van weten. ***x*** komt nóg een keer in de tekening voor, het gaat om *twee* standen van het koord.

c. ***Stap 3: VERGELIJKING OPSTELLEN BIJ DE SCHETS***
Gebruik de rechte hoek en gebruik hier Pythagoras. Vul de zijden van de driehoek in::

$$(\text{.........})^2 = (\text{.........})^2 + (\text{.........})^2$$

Je hebt nu een *vergelijking opgesteld* waaraan het gevraagde getal ***x*** moet voldoen.

d. ***Stap 4: VERGELIJKING OPLOSSEN***
Om de onbekende *x* te bepalen, moet de vergelijking worden opgelost.
Ga je gang en noteer je afleiding.

x = ...

Terugblik: de vier stappen in een notedop:

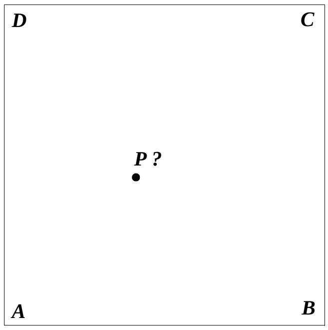
a. ***Schets maken*** bij het probleem, alsof de oplossing er al is.
b. ***Gegevens en onbekenden invullen***; als getallen of letters. Meestal hoef je maar met één onbekende te werken. Gebruik *x* voor die onbekende. Als er meer zijn gebruik je bijvoorbeeld *y* en *z*.
c. ***Vergelijking opstellen*** bij het verband dat er in de figuur is.
d. ***Oplossen van de vergelijking***.

4.2 *Bijzonder punt in vierkant zoeken.*

probleemstelling
Gegeven een vierkant ABCD van 10 bij 10 .

Gezocht
Een punt P binnen het vierkant dat even ver van A *ligt als van de zijden BC en CD.*
De afstand van het punt tot deze A, BC en CD moet gevonden worden.

De vier stappen kun je in de volgende situatie weer gebruiken.



a. ***Stap 1***: Maak de schets af met de lijntjes die de afstanden voor stellen. . (De plaats van *P* is alleen ‘ongeveer’ aangeduid).

b. ***Stap 2***: Vul de *bekende* zijde 10 en de *onbekende* ***x*** op zoveel mogelijk plekken in de figuur in.

c. ***Stap 3a***: Een *vergelijking* opstellen.
Tip: Teken het vierkant om het schuinliggende lijntje *x*. Schrijf een kleine formule in *x* bij de zijden.
Stap 3b van het plan
Nu kun je wel de *vergelijking opstellen* waaraan de onbekende ***x*** moet voldoen.

d. ***Stap 4 van het werkplan.***
Omwerken van de vergelijking; de onbekende berekenen. Ga je gang en noteer je afleiding. (Maak gebruik van de oefening met wortelrekenen op de vorige bladzijde)

x = **........**

4.3 *Oefening baart kunst: nog een bijzonder punt*

probleemstelling
Gegeven een vierkant ABCD van 10 bij 10 .

Gezocht
Een punt P binnen het vierkant dat even ver van A *, B en de zijde CD af ligt.*
Die afstand van het punt tot deze A, B en CD moet gevonden worden.

a. Vind die *afstand* volgens het bekende plan!

stappen	schets

5: Voortzetting

5.1 Twee vierkanten met cirkels

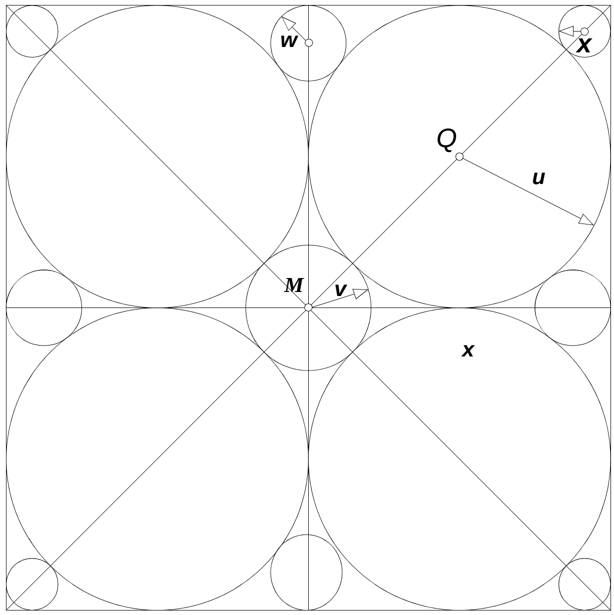
De twee grote vierkanten op deze bladzijde hebben zijde 8; ze zijn ook op de juiste schaal getekend, zodat je later je antwoorden met kunt controleren door meten.
De bedoeling is dat je de stralen van alle getekende cirkels berekent.

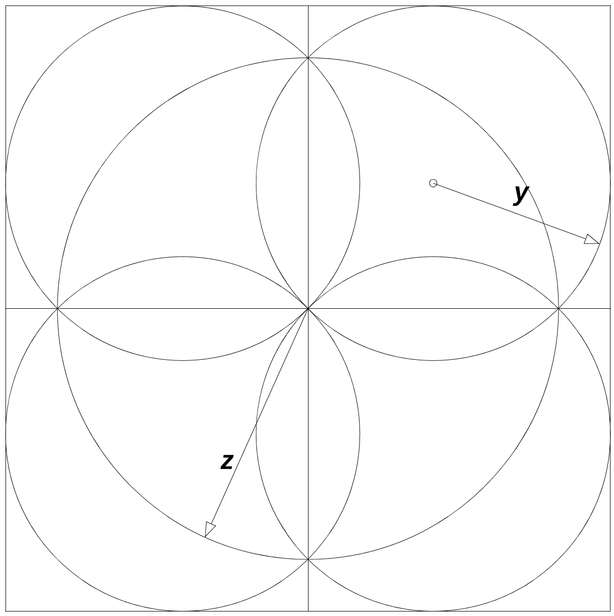
Doe dat met behulp van wat je in dit blok tot nu toe gedaan hebt.

Denk er aan dat je in de tekeningen ook andere lijnen en punten kunt toevoegen. Middelpunten, diagonalen, halverende lijnen, parallellen aan de zijde. Je bent vrij te kiezen.

Geef hieronder kort je berekeningen aan.
De letters zijn al bij stralen aan gegeven, maar je moet soms meer van dezelfde letters toevoegen.

Let op de *letters* voor de volgende vragen.





u.

v. Tip: Wat is *MQ*?

w. Tip: Verbind het middelpunt van de w-cirkel met dat van de ***u***-cirkel er naast. Laat zien dat

$$(2 - w)^2 + 2^2 = (u + w)^2$$

x. Let op *QA*!

y.

z.

6: Gelijkvormigheid, wat is dat?

Twee beeldformaten
Hier zie je één foto op twee verschillende beeldformaten: breedbeeld (16 : 9) en standaard (4 : 3).

Dat kan niet allebei goed zijn! Voor de linkerfoto is alles alleen opgerekt in de *dwars*richting.
Dit is beter:


Nu is op grote afbeelding *alles* met een factor 1,33 vergroot ten opzichte van de kleine foto.
Nu is de vorm van de fiets niet veranderd. Alleen jammer van dat zadel....

Je bent gewend met verhoudingen en gelijkvormigheid te werken met behulp van het begrip *vergrotings-factor* en je hebt geleerd daarbij te rekenen met de *verhoudingstabel*.
In dit hoofdstuk leggen we meer nadruk op het goed blijven van *de vorm* bij het vergroten, dan op de verhoudingsfactor. Daarom eerst op weg naar een nauwkeurige afspraak over ‘gelijkvormigheid’.

Intuitief ‘gelijkvormig’

Twee figuren zijn gelijkvormig als de onderlinge verhoudingen in de ene figuur precies dezelfde zijn als in de ander figuur. De figuren kunnen in ware grootte nog wel verschillen.

6.1 De onderlinge verhoudingen van twee rechthoeken

a. Laat zien dat de verhouding van *lengte* en *breedte* bij deze twee rechthoeken niet dezelfde is.
Doe dat door de lengte door breedte te delen in beide gevallen en de resultaten te vergelijken.

b. Denk aan twee cirkels met verschillende stralen ***a*** en ***b.*** Waarom weet je zeker dat de *verhouding* van omtrek en straal voor de twee cirkels gelijk is?

Wiskundige beschrijving van *gelijkvormigheid*

Exacte vastlegging van het begrip 'gelijkvormig' voor driehoeken
Twee driehoeken ABC en PQR noemen we gelijkvormig als de verhoudingen van de zijden in de ene driehoek gelijk zijn aan die in de tweede driehoek.
*Er moet dus gelden **AB : AC = PQ : PR** en **AB : BC = PQ : QR***

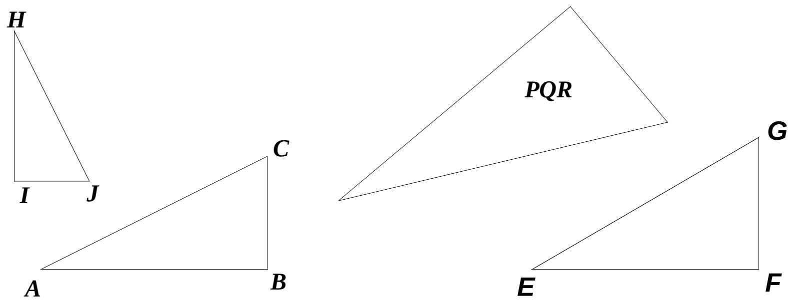
Notatie
We noteren de gelijkvormigheid met een speciaal teken en gebruiken het afkortingsteken ∆ voor 'driehoek':
Overeenkomstige hoekpunten moet je op dezelfde plaats zetten.

∆ ABC ~ ∆ PQR

Geheugensteun
Welke verhoudingen van zijden moeten overeenkomen, wordt handig aangegeven met tekentjes of streepjes onder of boven de letters.
*Hier zie je de eerste verhouding, **AB : AC = PQ : PR,** aan twee kanten aangegeven.*

∆ ABC ~ ∆ PQR

6.2 Voorbeeld:



a. Controleer of geldt ***∆HIJ ~ ∆ ABC en ∆EFG ~ ∆ ABC***.
Noteer welke verhoudingen je hebt nagemeten:

b. De vierde driehoek *PQR* ís gelijkvormig met *ABC*. Zet de letters *P*, *Q* en *R* op bij de juiste hoekpunten.

Gelijkvormigheid en hoeken; de hoofdeigenschappen

I.
Als ∆ ABC ~ ∆ KLM, dan zijn ook de overeenkomstige hoeken gelijk:
∠A = ∠K, ∠A = ∠K en ∠C = ∠M.
II.
Als van ∆ ABC en ∆ KLM twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, dan geldt ∆ ABC ~ ∆ KLM.

III.
Als van ∆ ABC en ∆ KLM geldt dat AB : BC = KL : LM, en dat de ingesloten hoeken gelijk zijn (d.w.z. dat ∠B = ∠L), dan zijn de driehoeken gelijkvormig.

6.3 Controle

a. Vergelijk in de figuur bij de vorige opgave ter controle de hoeken bij *A*, *E*, *H* en *P*.

b. Bij eigenschap II. staat ‘twee overeenkomstige hoeken’. Maar hoe zit dat dan met de derde hoeken van de driehoeken? Zouden die ongelijk mogen zijn?

c. Teken twee driehoeken *ABC* en *KLM* waarvan de zijden verhoudingen *AB* : *BC* en *KL* : *LM* gelijk zijn en de driehoeken toch niet gelijkvormig zijn.
(Let op de derde hoofdeigenschap!)

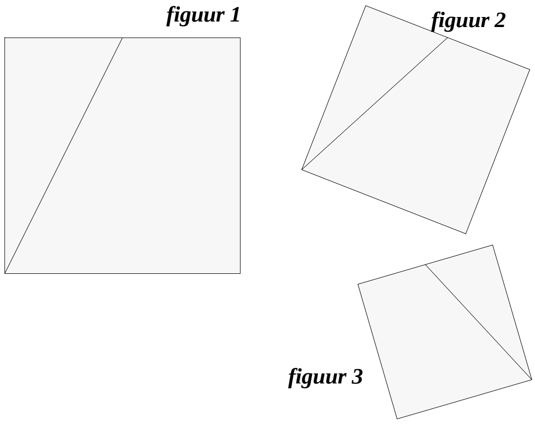
Oppervlakteverhoudingen

In de *hoofdeigenschappen* (het lijstje op bladzijde 17) staat niets over verhoudingen van oppervlaktes. Eerst een voorbeeld, om even aan te rekenen.

6.4 Vierkanten met driehoeken

In de vierkanten hiernaast loopt de schuine lijn van een hoekpunt naar het midden van een zijde.

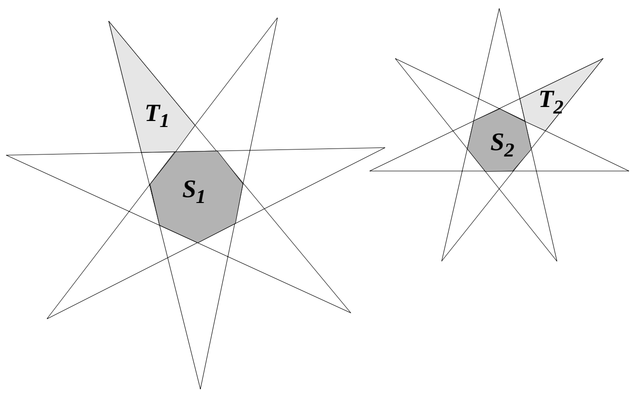
a. Bereken in de figuren de verhouding waarin die lijn de oppervlakte van het vierkant in twee delen verdeelt.



Het zal je niet verbaasd hebben dat ook de verhoudingen van de oppervlaktes in de verschillende figuren dezelfde zijn. De figuren zijn immers op precies dezelfde manier in twee delen verdeeld.

In deze figuur is het lastiger om de verhoudingen van de oppervlaktes tussen de delen van de figuur te berekenen, maar je kunt toch wel iets zeggen over de oppervlakteverhoudingen in de twee figuren:

die zijn gelijk.



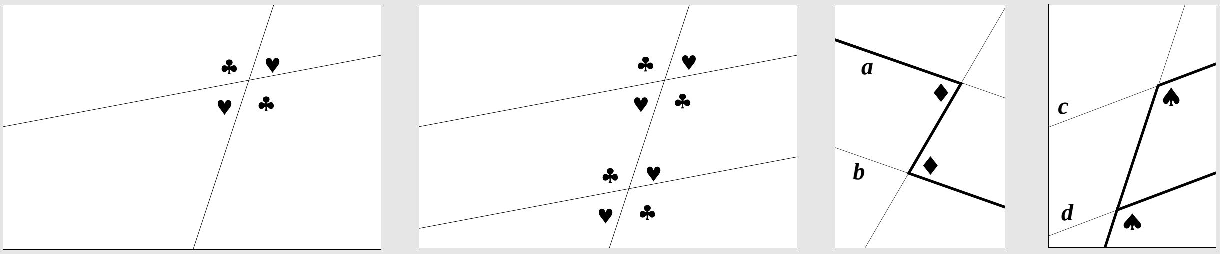
Dus:

Opp(T_1) : Opp (S_1) = Opp(T_2) : Opp (S_2)

7: hoeken en evenwijdigheid, een déjà vu

Eigenschappen van hoeken en evenwijdige lijnen

In deze paragraaf gebruiken we evenwijdige lijnen om allerlei gelijkvormige driehoeken te maken.
Bij evenwijdige lijnen hoort het fenomeen van de Z-hoeken en de F-hoeken. Dat herhalen we in het kort.



Twee snijdende lijnen.

Er zijn twee paar gelijke overstaande hoeken.

Hetzelfde, maar een extra lijn, evenwijdige een een van de andere, is toegevoegd.

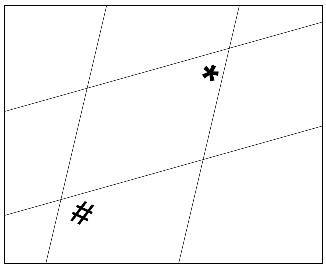
Rond de twee snijpunten komen de hoeken overeen; het een is een verschuiving van de andere

***Z-hoeken** en **F-hoeken**.*
*Als de hoeken ♦ en ♦ links gelijk zijn, zijn de lijnen **a** en **b** evenwijdig.*

*Als de hoeken ♠ en ♠ rechts gelijk zijn, zijn de lijnen **c** en **d** evenwijdig.*

7.1 Twee evenwijdige paren lijnen

In de figuur hiernaast zie je twee paren evenwijdige lijnen. Er zijn nu vier snijpunten en er is een parallellogram te zien. Twee hoeken in de figuur zijn gemarkeerd.

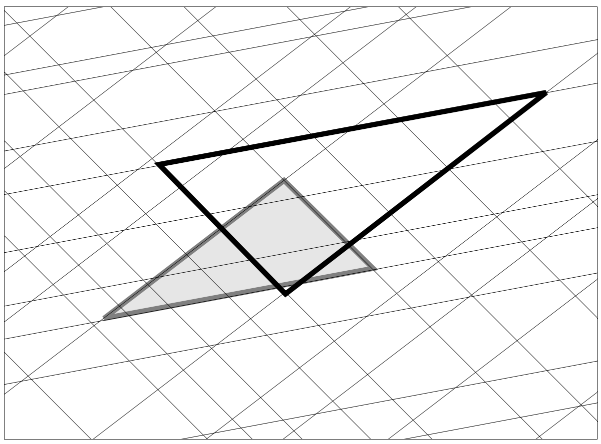


a. Zet de ook tekentjes in de andere veertien hoeken.
b. Hoe groot is hier een hoek van * + # ?
c. Vul deze beweringen aan:

– *Binnen een parallellogram zijn de overstaande hoeken* **........**
– *In een parallellogram zijn de twee hoeken die aan één zijde liggen* **........**

7.2 Drie bundels evenwijdige lijnen

Als je van elk van de drie richtingen één lijn uitkiest, bepaal je een driehoek.
Twee van zulke driehoek zijn al gemarkeerd.



a. Plaats tekentjes in de overeenkomstige hoeken, zodat blijkt dat de driehoeken gelijkvormig zijn.
b. Teken er nog twee andere driehoeken bij, gebruikmakend van de lijnen. Zijn die ook gelijkvormig met de eerdere twee? Licht je antwoord toe.

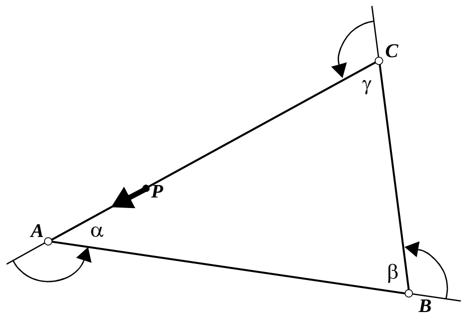
De hoeken van elke driehoek zijn samen 180°

Die stelling ken je al. Wel mooi om toch even te zien waarom dat eigenlijk zo is! Bij dit onderdeel heb je geen gelijkvormigheid nodig, maar in de volgende paragraaf is die hoekensom van de driehoek wel belangrijk; vandaar.

7.3 Eerste redenering; omlopen en draaien

De hoeken van de driehoek zijn α, β en γ. We moeten aantonen: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Stel je voor dat je bij *P* op de driehoek begint met een rondgang in de richting van de pijl. Bij *A*, *B* en *C* moet je een draai naar links maken.

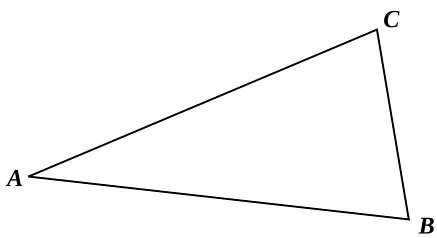


a. Noteer de grootte van die draaiingen, uitgedrukt in α, β en γ, bij de pijlen die de draaiingen aangeven.

b. Bij *P* ben je weer terug in dezelfde richting! Wat betekent dat voor de drie draaien samen?
Schrijf dat op als een vergelijking:

c. Herleid die vergelijking tot wat bewezen moest worden.

7.4 Tweede redenering, meetkundig.



a. Hiernaast is een Δ *ABC* getekend. Zet α, β en γ in de hoeken.

b. Trek een lijn door één van de hoekpunten, die evenwijdig is aan de zijde tegenover dat hoekpunt. Er ontstaan daar drie hoeken bij elkaar. Hoe groot zijn die samen?

c. Zet de juiste letters in die hoeken en leg uit waarom de som van de hoeken van een driehoek 180° is.

7.5 Oefenen van de stelling over de hoekensom van de driehoek.

a. In een of andere driehoek zijn twee hoeken 34° en 57°. Hoe groot is de derde hoek?

b. Een rechthoekige driehoek heeft een hoek van 28°. Hoe groot zijn de andere twee hoeken?

c. Een gelijkbenige driehoek heeft een hoek van 100°. Hoe groot zijn de andere twee hoeken?

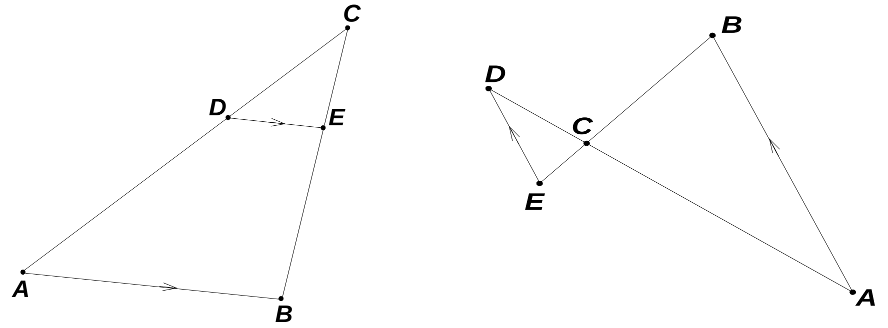
d. Een gelijkbenige driehoek heeft een hoek van 36°. Hoe groot zijn de andere twee hoeken? Let op: er zijn twee mogelijkheden!

e. Een driehoek heeft een hoek van 40°. Hoeveel zijn de andere twee hoeken samen?

f. Een driehoek heeft hoeken α, β en γ. Druk γ in α en β uit.

8: Evenwijdigheid en gelijkvormigheid: goede vrienden

8.1 In deze twee figuren zijn de lijnen AB en DE evenwijdig.



a. Beide figuren kun je ‘lezen’ als ‘twee driehoeken’. Welke driehoeken?

b. Elk van deze figuren bevat twee gelijkvormige driehoeken: Δ *ABC* en Δ *DEC*.
Noteer de drie bijhorende gelijke verhoudingen die er zijn; voor beide figuren zul je hetzelfde opschrijven!

8.2 Drie gelijkvormige driehoeken in één figuur

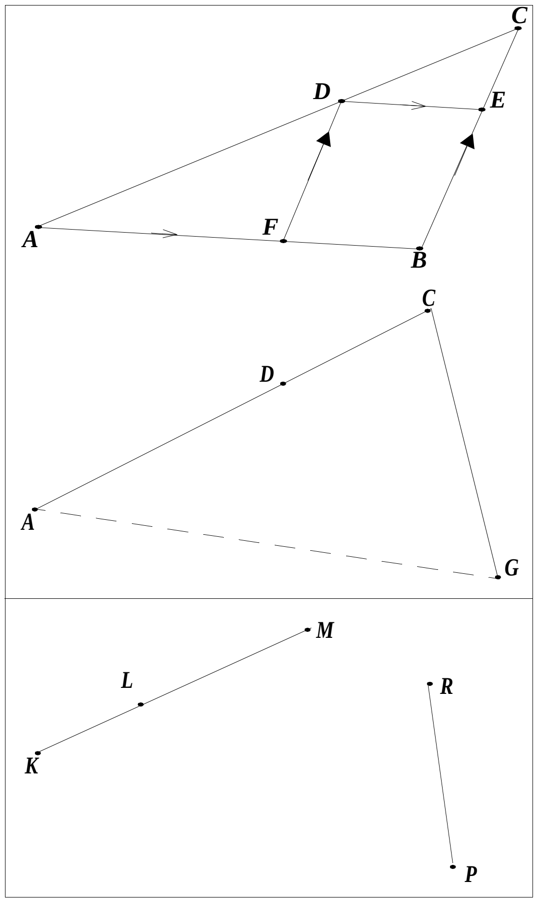
Hier is in de eerste figuur hiernaast bovendien nog *FD* evenwijdig aan *BC*.

a. Welke zijn de *drie* driehoeken? Noteer ze met de hoekpunten in de juiste volgorde!

b. UIt de gelijkvormigheid van twee van die driehoeken kun je afleiden dat *AD : DC = FD: EC*.
Hoe volgt hieruit dat *AD : DC = BE : EC*?

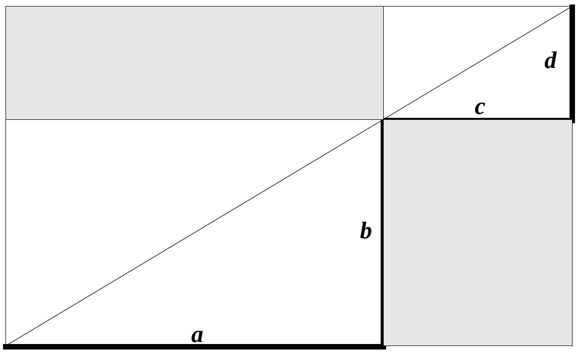
c. Bepaal in de tweede figuur door een handige lijn te tekenen op lijnstuk *GC* een punt *H* dat *GC* precies in de verhouding *AD* : *DC* indeelt.

d. Bepaal in de derde figuur door tekenen van lijnen een punt *Q* op *PR*, zo dat *KL : LM = PQ : QR.*
(Maak op een of andere manier een tussenstapje, zodat je het idee van vraag **c** *twee keer uitvoert .....)*



Snelrecht bij verhoudingscontrole

8.3 Een rechthoek met diagonaal en extra lijnen evenwijdig aan de zijden.



a. In deze figuur geldt ***a : b = c : d***. Waarom? (Je kunt in je antwoord verwijzen naar wat we eerder gezien hebben.)

b. De diagonaal verdeelt de grote rechthoek in gelijke delen. Verklaar nu waarom de grijze rechthoeken gelijke oppervlakten moeten hebben.

c. Hoe volgt daaruit dat ***a · d = b · c****?*

8.4 Verhoudingen controleren met vermenigvuldigen

Bij de vorige opgave bleek hoe je een gelijkheid van verhoudingen zoals ***a : b = c : d*** om kunt zetten in een gelijkheid van oppervlaktes van rechthoeken: ***a · d = b · c****.* De algemene regel is:

Het product van de buitentermen is gelijk een het product van de binnentermen.

a. Als je de verhoudingsgelijkheid weergeeft als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

kun je ook op grond van je kennis van breuken komen tot het resultaat ***a · d = b · c****.*
Welke redenering volge jij daarbij?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

b. Controleer door vermenigvuldigen welke van deze verhoudingen kloppen; noteer je berekening en je conclusie.

55 : 89 = 144 : 233 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

221 : 323 = 403 : 589 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

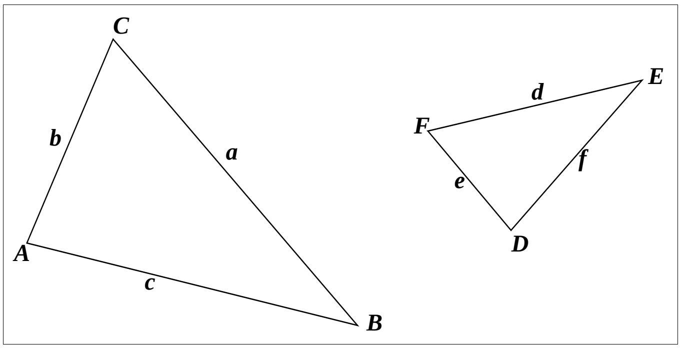
2 : 45 = 91 : 2047 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c. Leg uit waarom geldt: ***Als a : b = c : d, dan geldt ook a : c = b: d***

Verhoudingen en factoren

8.5 De vergrotingsfactor

Hier is gegeven dat de twee driehoeken gelijkvormig zijn: $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$.
De zijden zijn aangeduid met kleine letters.
Let op: de zijde met de kleine letter ligt tegenover de hoek met de hoofdletter.
Met deze kleine letter notatie in de driehoek reken je wat gemakkelijker met de zijden dan met de notatie AB.



a. Een van de verhoudingen die geldt is

b : a = e : d.

Laat met algebra zien dat daaruit volgt wat helemaal rechts hieronder staat.

b : a = e : d	....	....	$e = \frac{d}{a} \cdot b$

b. Kies een andere verhoudingsgelijkheid om de volgende gelijkheid af te leiden.

....	....	....	$f = \frac{d}{a} \cdot c$

Je hebt nu gezien

*dat je **e** kunt bepalen door **b** met de factor* $\frac{d}{a}$ *te vermenigvuldigen*

*dat je **f** kunt bepalen door **c** met de factor* $\frac{d}{a}$ *te vermenigvuldigen.*

Dit geldt natuurlijk ook:

*dat je **d** kunt bepalen door **a** met de factor* $\frac{d}{a}$ *te vermenigvuldigen.*

c. Leg uit waarom je evengoed de factor $\frac{e}{b}$ *of de factor* $\frac{f}{c}$ *kunt gebruiken in plaats van* $\frac{d}{a}$.

vergrotings- of verkleiningsfactor

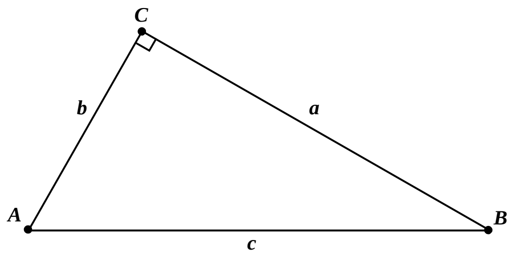
De zijden van de tweede driehoek kun je vinden door de zijden van de eerste driehoek met een zelfde getal te vermenigvuldigen. Dat getal ken je als je de eerste driehoek kent en één zijde van de tweede.

8.6 Oefenen!

de ene driehoek			factor	de andere driehoek		
a	**b**	**b**		**d**	**e**	**f**
3	4	5			12	
16	22	35		12		
4,8	7,2	3,6				12
	10			4,5	2,5	5,8

9: Een beeldschone driehoek

Dit is hem: de rechthoekige driehoek, waarbij de schuine zijde horizontaal ligt



9.1 Eerst gaan we zo veel mogelijk aangeven wat we al van de figuur weten.

a. Trek de lijn uit *C* loodrecht op *AB*. Je krijgt een voetpunt, noem dat *D*.

b. Er geldt: $\angle A + \angle B = 90°$. Zet een α en β in die twee hoeken om de grootte te markeren. Er zijn nog twee hoeken die je kunt markeren met α en β. Doe dat in de tekening.

c. Verklaar waarom $\Delta\,ADC$, $\Delta\,CDB$ en $\Delta\,ACB$ gelijkvormig zijn.

d. We geven namen aan de lengtes van de lijnstukken. Zet letters *p* en *q* bij *AD* en *DB* en *h* bij *DC*.

9.2 Nu gaan we met behulp van gelijkvormigheid allerlei samenhangen ontdekken tussen de lijnstukken. We vinden uiteindelijk een bekende formule terug

Voorbeeld: in deze gelijkvormigheid is op de manier van blz. 17 aangegeven van welke zijden we de verhoudingen vergelijken:

$$\Delta\,\boldsymbol{ADC} \sim \Delta\,\boldsymbol{CDB}$$

De *verhouding* die daar bij hoort is $\boldsymbol{p : b = h : a}$.

Omgezet naar een *algebraïsch verband*. $\boldsymbol{pa = hb}$

a. Leid net zo het *algebraïsche verband* af dat bij deze gelijkvormighoud hoort:

$$\Delta\,\boldsymbol{CDB} \sim \Delta\,\boldsymbol{ACB}$$

b. Het resultaat was een vergelijking waarin $\boldsymbol{a^2}$ voorkwam. Stel nu zelf de gelijkvormigheid op, waar een *algebraïsche verband* uitrolt, waarin $\boldsymbol{b^2}$ voorkomt.

Δ **.........** ~ Δ **.........**

c. Tel de formules voor $\boldsymbol{a^2}$ en $\boldsymbol{b^2}$ bij elkaar op en herleid met behulp van $\boldsymbol{p + q = c}$ tot een bekend verband:

$\boldsymbol{a^2 + b^2 =}$

9.3 Toon met de techniek van de vorige opgave aan dat $h^2 = pq$

10: De stelling van Thales

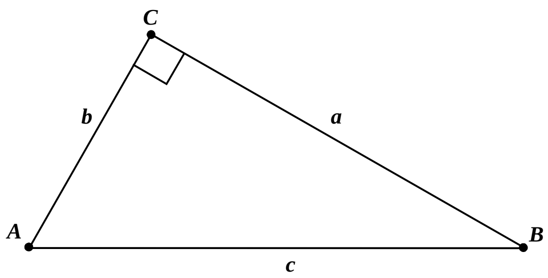
De rechthoekige driehoek van de vorige paragraaf heeft nog een mooie eigenschap. Bij die eigenschap gaat het om het verband van de driehoek met een speciale cirkel: de cirkel waarvan de schuine zijde een middellijn is.
Eerst gaan we dat verband meetkundig onderzoeken.

10.1 Het midden van de schuine zijde

a. Teken in de driehoek nauwkeurig het midden *M* van de zijde *AB*.

b. Maak driehoek *ACB* nu af tot rechthoek *ACBZ*.

c. Geef een korte redenering waaruit volgt:
MA = *MB* = *MC.*
(Je mag natuurlijk gebruiken wat je weet over de diagonalen van een rechthoek.)



d. *M* is het middelpunt van de cirkel die door A en *B* gaat. Teken die cirkel met je passer.

e. Punt *C* ligt op die cirkel. Waarom is dat zo?

Bij deze opgave zie je dat een rechthoekige driehoek precies past in de helft van een cirkel. Samengevat:

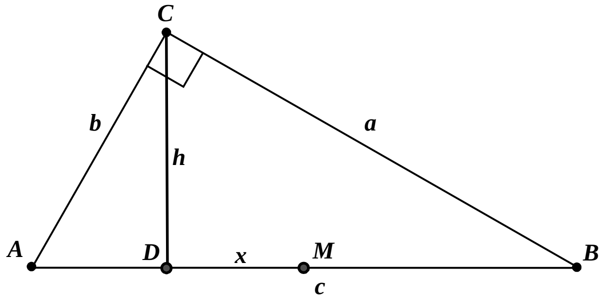
stelling van de cirkel en de rechthoekige driehoek

De schuine zijde van een rechthoekige driehoek is de middellijn van een cirkel die door het punt met de rechte hoek gaat.

Aan de hand van de volgende opgave zie je dat het ook sterk samenhangt met de meer algebraische opgaven van de vorige bladzijde.

10.2 Nogmaals AM = MC!

In deze figuur is ***x*** de afstand van *M* tot *D.*



a. Geef ook *p* en *q* in de figuur aan, zoals die eerder gebruikt zijn. Laat zien dat ***p* = ½ *c* -*x***

b. Geef een soortgelijke formule voor ***q***.

c. Leidt nu uit $\boldsymbol{h^2 = pq}$ door invullen en uitwerken van het product af dat $\boldsymbol{CM = \frac{1}{2} c}$.

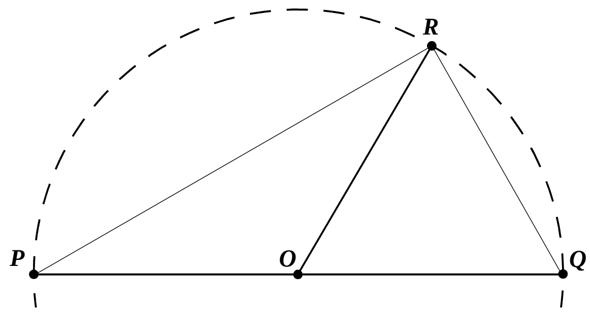
Net als bij de stelling van Pythagoras, is hier een omkering van. Dat is de zogenaamde *stelling van Thales*. Daarbij ga je uit van een driehoek, die in de halve cirkel past.

Stelling van Thales

Als PQ de middellijn is van een cirkel, en R ligt op die cirkel, dan is hoek ∠QRP recht.

10.3 De stelling van Thales; met hulp van algebra bewezen

Nu gaan we uit van deze figuur, waarin *O* het midden van *PQ* is en geldt: *OP* = OQ = *OR.* Voor het gemak noemen we dat even ***r***. Er is dus een cirkel met middellijn *PQ,* middelpunt *O,* waar *R* op ligt en de straal van die cirkel is ***r**.*



a. Zet letters ***r*** op de juiste plaatsen.

b. We willen laten zien dat ∠ *PRQ* recht is. Teken dus de lijnen *PR* en *RQ*. Zet er letters **s** en ***t*** bij.

c. Nu moeten we gaan rekenen, en uiteindelijk via Pythagoras de slotconclusie trekken.
Welk algebraïsch verband tussen ***s, t*** en ***r*** moeten we dan uiteindelijk aantonen?

d. Er is nog niet zoveel houvast, geen rechte hoek te zien. Voeg weer de loodlijn uit *R* op PQ toevoegen. Noem het voetpunt ***U*** en noem ***OU*** nu ***x*** en ***UR y***. Voeg de letters aan de tekening toe.

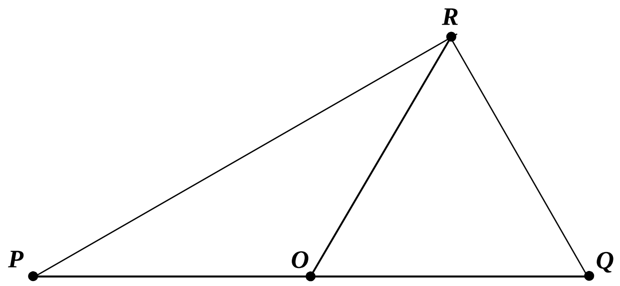
e. Waarom geldt in ieder geval $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$?

f. Druk nu $\boldsymbol{s^2}$ en $\boldsymbol{t^2}$ ook in ***x, y*** en ***r*** uit en leid de het verband tussen ***s, t*** en ***r*** af.

10.4 De stelling van Thales; meetkundig bewezen

We gaan uit van dezelfde figuur.

Voeg weer de letter ***r*** toe bij de gelijke lijnstukken.



a. De figuur bevat twee gelijkbenige driehoeken. Laat met tekentjes als # en ⁎ zien welke hoekgelijkheden daaruit volgen.

b. De figuur bevat ook een hoek die gelijk is aan #+#.

c. Zet ## in die hoek en geef een redenering die dit onderbouwt.

d. Er is één hoek over. Die is natuurlijk geschikt voor ⁎⁎.

e. Hoe kun je nu met behulp van de tekentjes concluderen dat de hele hoek bij ***R*** 90° is?

11: Samenvatting

A: Er waren drie meetkundige onderwerpen

I: Pythagoras
Je leerde de stelling van Pythagoras zelf en de omkering ervan beter kennen. In beide stellingen gebruik je de kwadraten van de lengte van de zijde; dat zijn de oppervlaktes van de vierkanten die je op de zijden kunt tekenen.

De Stelling van Pythagoras
In een rechthoekige driehoek zijn de oppervlaktes van de vierkanten rond de rechte hoek
samen gelijk aan de oppervlakte van het derde vierkant.

Omkering van de Stelling van Pythagoras
Als in een driehoek de oppervlaktes van de vierkanten op twee zijden
samen gelijk zijn aan de oppervlakte van het vierkant op de derde zijde,
dan heeft de driehoek een *rechte* hoek tegenover de derde zijde.

Bij de omkering hoort een aanvulling; die zegt iets over de hoek tegenover de derde zijde als er geen gelijkheid is. je moet in de omkerings stelling een paar worden vervangen. Zo:

Pythagoras; aanvulling stomp-recht-scherp

....	***samen gelijk zijn aan***	***..............., dan ....***	***rechte hoek***	***.......***
....	***samen groter zijn dan***	***..............., dan ....***	***scherpe hoek***	***.......***
....	***samen kleiner zijn dan***	***..............., dan ....***	***stompe hoek***	***.......***

Je hebt gezien:
- hoe je de stellingen kunt bewijzen op verschillende manieren: met *meetkunde* en met *algebra*
- dat je de stelling op allerlei manieren kunt toepassen
- dat je bij het werken met de stelling vaak wortels tegenkomt in uitkomsten en hoe je met wortels kunt rekenen.

II: Gelijkvormigheid en hoeken
Je leerde een nauwkeurige omschrijving van gelijkvormigheid van twee driehoeken kennen.
Samengevat :

Wanneer zijn twee driehoeken gelijkvormig?

a. ***Als de lengteverhoudingen van de zijden in de ene driehoek gelijk zijn aan de lengteverhoudingen in de andere driehoek.***

Of

b. ***Als twee hoeken van de ene driehoek gelijk zijn aan twee hoeken van de andere***

De gelijkvormigheid van driehoeken *ABC* en *PQR* noteer je zó, dat je rekening houdt met de volgorde van de punten.

∆ ABC ~ ∆ PQR

Geheugensteun

Welke verhoudingen van zijden moeten overeenkomen, kun je nu aflezen
Hier is ***AB : AC = PQ : PR,*** *aan twee kanten aangegeven.*

∆ ABC ~ ∆ PQR

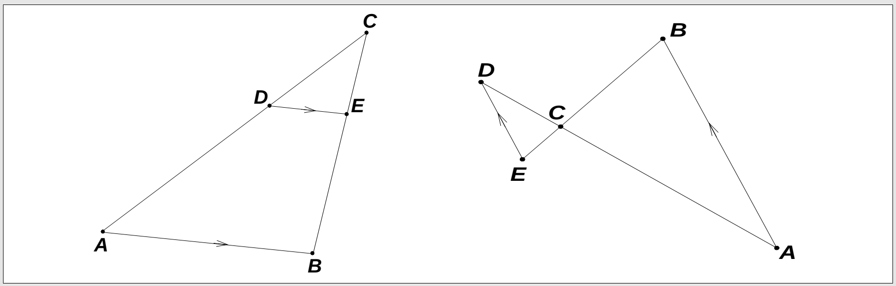
Jemag bijvoor beeld **NIET** *concluderen:* ***AC : BC = PQ : PR***

Om gelijkvormigheid te herkennen, moet je daarom goed gelijke hoeken kunnen vaststellen.
Over hoeken heb jedaarom twee dingen teruggezien.

a. ***De hoeken van elke driehoek zijn samen 180°***
b. Als je twee evenwijdige lijnen snijdt met een derde lijn, ontstaan bij de twee snijpunten verschillende gelijke hoeken. Die kun je vinden met behulp van de Z- en F- figuur,

Gelijkvormigheid en evenwijdigheid komen vaak samen voor. De basis hiervoor is deze samenhang:.

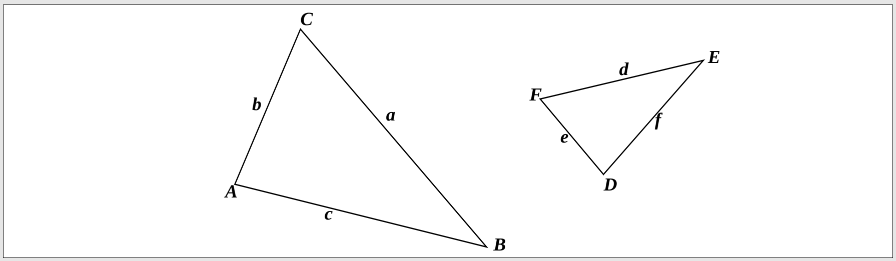
Als in deze twee figuren de lijnen AB en DE evenwijdig zijn



dan is ∆ ABC ~ ∆ DEF

Verhoudingen tussen getallen zijn belangrijk bij gelijkvormigheid.
Je hebt geleerd hoe je met verhoudingen kunt rekenen. Je leerde welke verhoudingen vaststellen welke verhoudingen in een figuur gelden en wat je daar met algebra mee kunt doen. Bijvoorbeeld:

Als ∆ ABC ~ ∆ DEF



dan gelden bijvoorbeeld :

$$b : a = e : d,\ \frac{b}{a} = \frac{e}{d},\ e = \frac{d}{a} \cdot b,\ bd = ae,\ b : e = a : d$$

Je hebt ook geleerd dat je gelijkvormigheid van twee figuren kunt beschrijven met het begrip vergrotings- of verkleiningsfactor:

> ***vergrotings- of verkleiningsfactor***
> *De zijden van de tweede driehoek kun je vinden door de zijden van de eerste driehoek met een zelfde getal te vermenigvuldigen. Dat getal ken je als je de eersate driehoek kent en één zijde van de tweede.*

III: De stelling van Thales en zijn omgekeerde
Dits is de stelling zelf

> ***Stelling van Thales***
>
> *Als PQ de middellijn is van een cirkel, en R ligt op die cirkel, dan is hoek $\angle QRP$ recht.*

De omkering van de stelling van Thales kwamen we eerder tegen, als stelling van de cirkel en de rechthoekige direhoek. Nu zo:

> ***Omkering van de stelling van Thales***
>
> *De schuine zijde van een rechthoekige driehoek is de middellijn van een cirkel die door het punt met de rechte hoek gaat.*

Bij de stelling van Thales leerde je verschillende bewijzen kennen. Weer met meetkunde en met Algebra. Je zag ook dat je in de bweijzen eerdere stellingen (zoals die van Pythagoras en over gelijkvormigheid) kunt gebruiken.
Je ziet dat de theorie van de meetkunde nieuwe waarheden opbouwt op al bekende waarheden.

B: Er was een belangrijke vier stappenmethode

In dit blok gebruikte je een belangrijke methode, namelijk hoe algebra te gebruiken bij meetkundige problemen. In paragraaf 4. het was een vier stappenplan, dat goed werkt bij veel meetkunde problemen.

> ***De vier stappen in een notedop***
>
> ***Vaak wordt in probleem gegeven in de vorm : vind de lengte van een bepaald lijnstuk.***
> a. ***Schets maken bij het probleem, alsof de oplossing er al is.***
> b. ***Gegevens en onbekenden invullen; als getallen of letters. Gebruik x voor de onbekende.***
> c. ***Vergelijking opstellen bij het verband dat er in de figuur is.***
> d. ***Oplossen van de vergelijking geeft de waarde van de onbekend, dus de lengte van het lijnstuk.***

C: Het belangrijkste van dit hoofdstuk

Het belangrijkste van dit hoofdstuk staat als het ware tussen de regels door.
Je hebt een begin gemaakt met het gebruiken van algebra bij meetkunde. De belangrijkste meetkundige basisgereedschappen heb je leren kennen.
Je hebt gemerkt dat veel onderwerpen in dit hoofdstuk met elkaar te maken hebben en niet los van elkaar staan. In de volgende blokken zul je dat steeds terugzien.

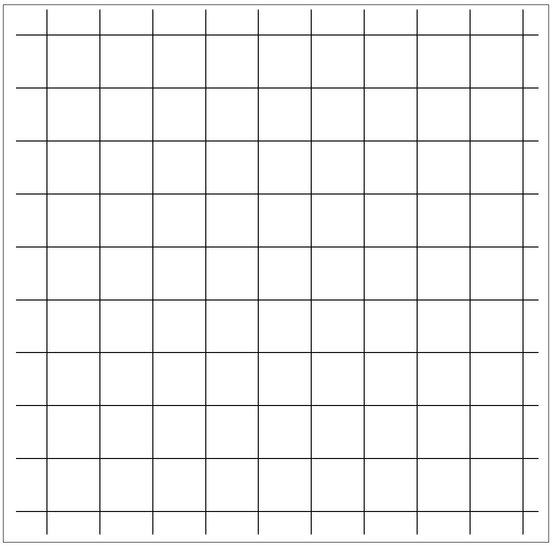
12: Extra oefeningen

Pythagoras gebruiken

12.1 Oefening

a. Iemand meet de zijden en de diagonalen van een kamer op, om daarmee te controleren of de kamer rechthoekig is (dat is vaak niet precies zo!).
Gebruikt hij de stelling van Pythagoras, of de omkering ervan?

b. In de figuur hiernaast zie je een rechthoekig rooster; de afstand tussen de lijnen is steeds 1. De snijpunten van de lijnen heten *roosterpunten*.
Teken (zonder buiten de figuur te gaan!) lijnstukken die roosterpunten verbinden. De lijnstukken moeten de lengtes hebben die hieronder staan.
Als je zeker weet dat er een onmogelijke bij zit, moet je uitleggen hoe je dat weet.



$\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{13}$ **10**

Uitleg (eventueel):

c. Geef drie roosterpunten *A*, *B* en *C* in de figuur aan, zodat $\angle ABC$ stomp is, maar doe het zo dat het op het oog heel moeilijk te zien is de hoek niet recht is.

d. In dit blok heb je verschillende bewijzen voor de stelling zelf leren kennen. Welke zou je gebruiken om iemand de stelling uit te leggen, die niet zo goed in wiskunde is als jij?
Licht je antwoord kort toe.

12.2 Terugkijken naar de figuur bij opgave 10.2

a. Toon aan dat daar geldt: $\mathbf{q^2 - p^2 = a^2 - b^2}$

b. Is het voor het gelden van deze formule nodig dat hoek *C* recht is? Licht je antwoord toe.

II: Gelijkvormigheid

12.3 Geef aan wat waar is.

Bij ‘nee’ laat je ook een voorbeeld zien van een situatie waar het niet klopt.

a. Als de twee hoeken van de ene driehoek gelijk zijn aan twee van de andere, dan zijn de driehoeken gelijkvormig.

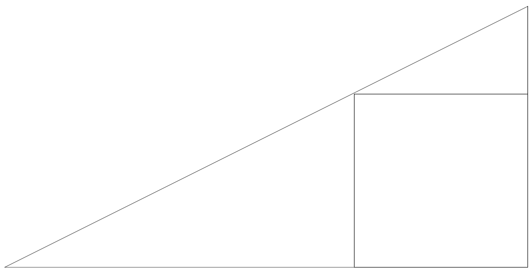
b. Als twee driehoeken elkaars spiegelbeeld zijn, zijn ze gelijkvormig.

c. Als drie hoeken van een vierhoek gelijk zijn aan drie hoeken van een andere vierhoek, dan zijn de vierhoeken gelijkvormig.

12.4 Vierkant in driehoek.

Hiernaast is een rechthoekige driehoek getekend met rechthoekszijden 4 en 8.

Precies passend in de rechthoek en tegen de schuine zijde aan, zit een vierkant.



a. Zet zelf letters en maten bij de figuur.

b. Noteer de gelijkvormigheden die er zijn.

c. Bepaal de zijde van het vierkant exact.

12.5 Factoren gebruiken.

Je hebt gezien dat als twee driehoeken gelijkvormig zijn, dat er dan een factor is waarmee je de zijden van de ene kunt vermenigvuldigen om de zijden van de andere te krijgen.

a. Lees dat nog even na op bladzijde 23.

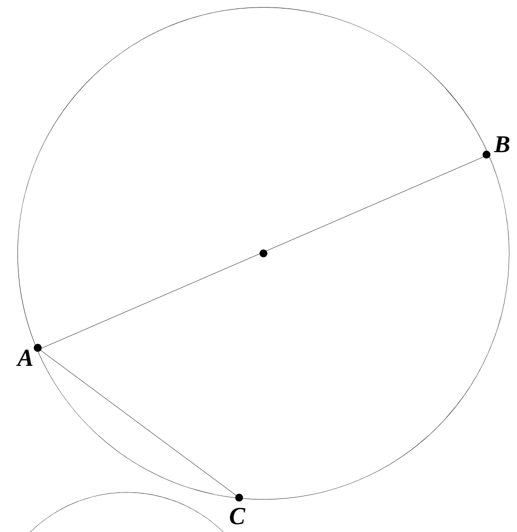
b. Probeer het omgekeerde te bewijzen!
Ga dus uit van een driehoek met zijden *a, b, c* en een met zijden *p, q, r* en dat er zo’n factor is.
Er geldt dus: $a * f = p$.
Noteer twee soortgelijke verbanden en leidt af dat ***a/c = p/r***..

III: De stelling van Thales en zijn omgekeerde

12.6 Eén cirkel, één middellijn, één koorde

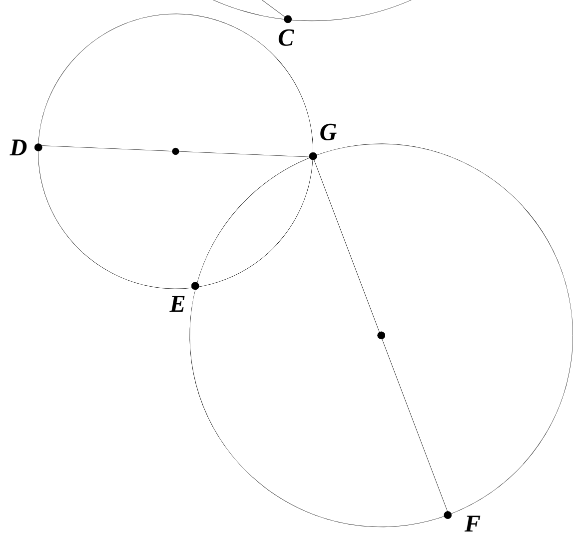
In de figuur hier rechts is AB een middellijn van de cirkel.
$AB = 6{,}5$.
Gegeven is punt C met $AC = 3{,}3$.
(Een lijnstuk met de uiteinden op een cirkel heet een *koorde*)

a. Bereken exact de lengte van BC.



12.7 Twee cirkels, twee middellijnen, twee koorden

a. Laat zien dat in de onderste figuur de (nog niet getekende koorden DE en EF op één rechte lijn liggen.



Een zijstraatje

Bij het werken met Pythagoras kwamen vaak wortels te voorschijn, dat ligt in de aard van het beestje. De wortel uit twee had een speciale rol. Bij de diagonaal van een vierkant had je die nodig.

12.8 Hier nog twee vragen over het rekenen met wortels.

Bij deze twee voorbeelden moet je op de lege plekken getallen zetten zodat het klopt. Dat kan, en de methode van opgave 3.11 kun je hier goed gebruiken.

a. $$\frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{5}} + \sqrt{\mathbf{2}}} = \mathbf{.....}\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{.....}\sqrt{\mathbf{2}}$$

b. $$\frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{27}} - \sqrt{\mathbf{23}}} = \mathbf{.....}\sqrt{\mathbf{.....}} + \mathbf{.....}\sqrt{\mathbf{.....}}$$

een belangrijke methode en twee wat lastigher voorbeelden!

In dit blok gebruikte je een belangrijke methode, namelijk hoe algebra te gebruiken bij meetkundige problemen.
Die methode ga je nog vaak gebruiken bij de Analytische meetkunde. Hier volgen nog twee uitdagende voorbeelden. Daarbij heb je allerlei onderdelen van dit blok nodig; bij het tweede voorbeeld ook het rekenen met hoeken in de driehoek.
In de laatste stap van het vierstappenplan heb je bij allebei de problemen het oplossen van een vergelijking van de tweede graad nodig. Maar je gaat merken dat je maar een van de twee echt hoeft op te lossen.

Hoe dat zit? Proberen maar!

12.9 De methode gebruiken om een bijzondere rechthoek te vinden

De gezochte rechthoek heeft korte zijde ter lengte 1. (We nemen in de tekening daar 5 cm voor)
Met een lijn dwars op de lengterichting kan *elke* rechthoek worden verdeeld in een vierkant en een kleinere rechthoek.

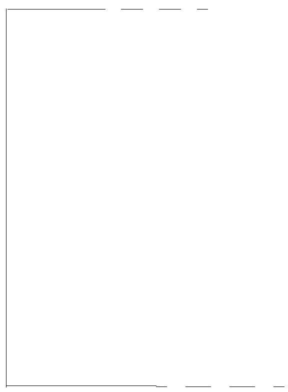
Bij deze bijzondere rechthoek is het zo,
dat de rechthoek zelf en de resterende rechthoek gelijkvormig zijn.

De vraag is:

Wat is de lengte van die bijzondere rechthoek?

Voer het vier-stappenplan uit!

a.



b.

c.

d.

12.10 De methode gebruiken om een bijzondere driehoek te vinden

De gezochte driehoek *ABC* is gelijkbenig en heeft basis *AB* van lengte 1. (Neem in je tekening daar weer 5 cm voor). De gelijkbenigheid zegt: *AC* = *BC*.

In een schetsje lukt het altijd makkelijk een punt *D* op zijde *BC* te bepalen, zodat ook *ABD* gelijkbenig is, dus dat *AB* = *AD*.

a. Probeer dat even op een kladje uit.

b. Laat zien dat dan $\Delta\ ABC \sim \Delta\ BDA$

Bij de bijzonder driehoek is het zo,
dat de resterende driehoek ook weer gelijkbenig is. Dus AD = DC.

Van je kladje heb je wel gezien dat dat niet altijd zo is. Dan is Δ *ABC* echt bijzonder.

De vraag is:

Wat is de lengte van AC?

c. Voer het vier-stappenplan uit om *AC* te bepalen.

1.

2.

3.

4.

d. In deze driehoek kun je ook de hoeken berekenen. Dat is een leuke puzzel, en je gaat merken dat de driehoek al een keer in dit blok is voorgekomen ....

13: Extra blad bij opgave 2.1