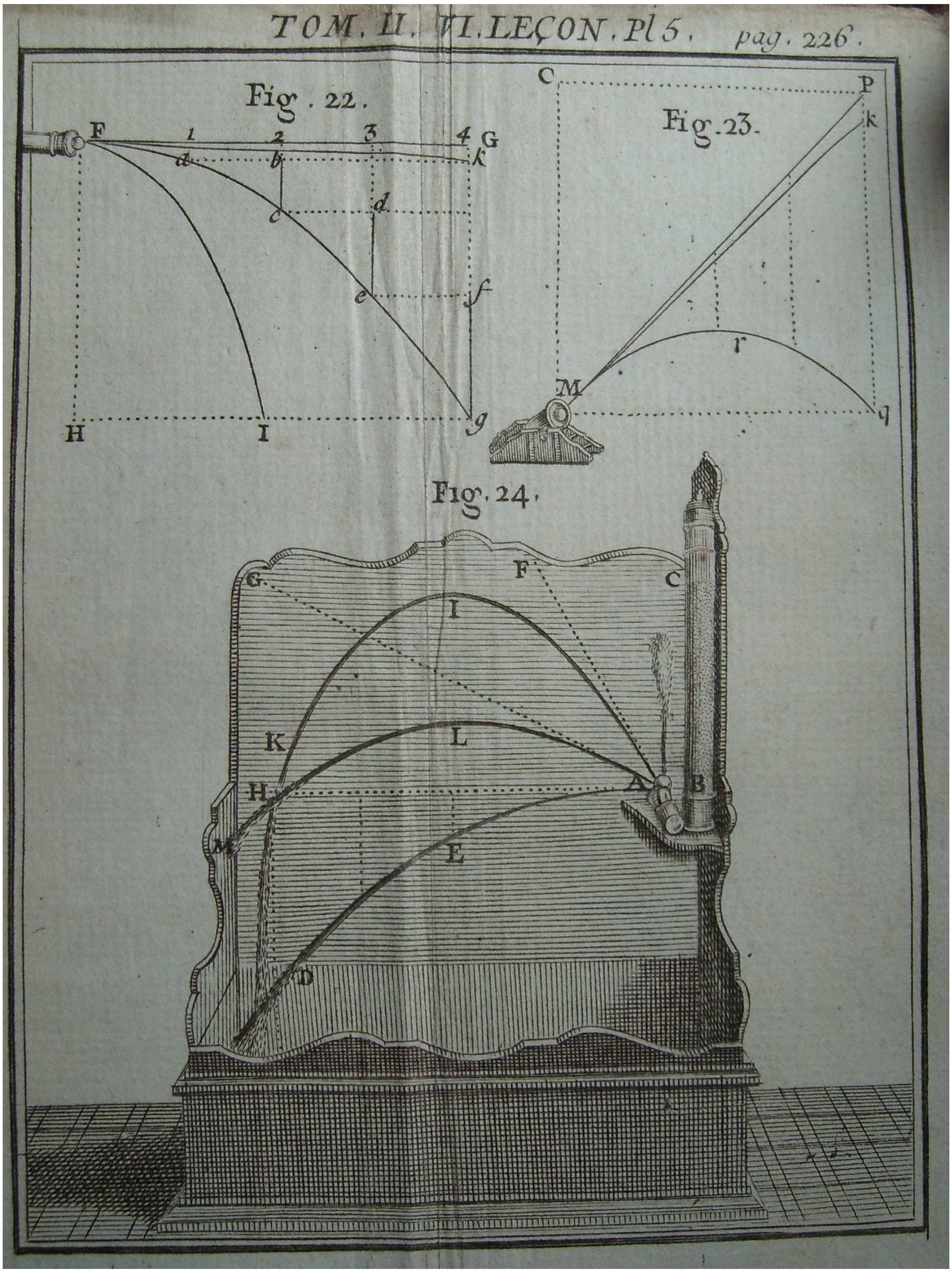
4 Formules en figuren



Dit is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten
Blok *Formules en figuren*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2014) wiskunde B vwo.

⌘ Opgaven met dit merkteken kun je zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

Versie november 2010

Colofon

Auteurs Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

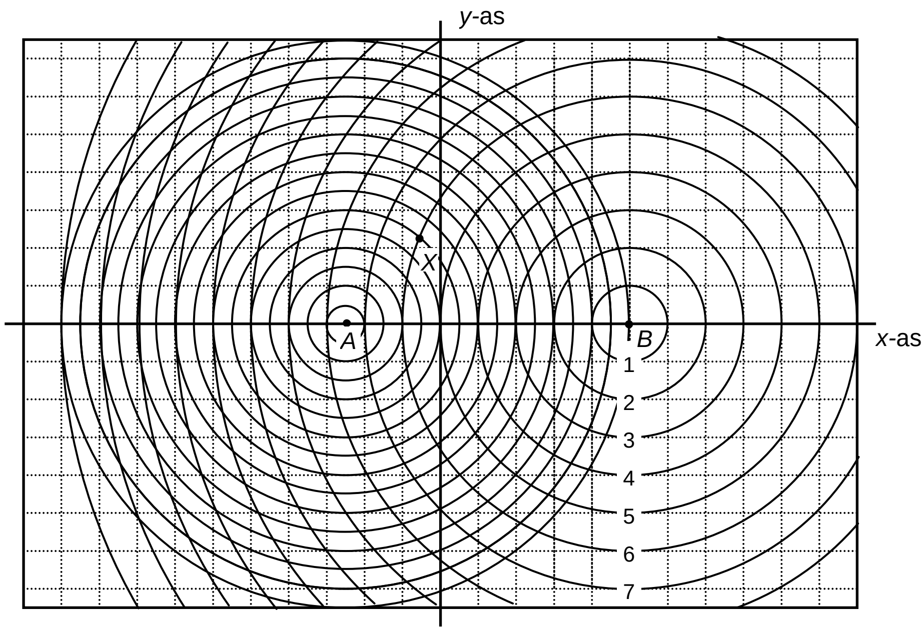
Met medewerking van Theo van de Bogaart, Josephine Buskes, Gert Donkers, Aad Goddijn, Dick Klingens

1 Cirkels

*** 1** Twee ziekenhuizen A en B beschikken beide over een trauma-helicopter voor spoedeisend vervoer. De helicopter van ziekenhuis B vliegt twee keer zo snel als die van A.
Als iemand snel naar een ziekenhuis moet, kan er voor voor A of voor B gekozen worden; dat hangt af van de plek waar de patiënt zich bevindt. Er zijn ook plekken waar het niets uitmaakt of de helicopter van A of van B komt.
Zoek op het werkblad de plekken waar het niets uitmaakt ongeveer liggen.

We gaan het probleem van opgave 1 systematisch aanpakken in een assenstelsel. Omdat de afstanden tot twee punten een rol spelen, roepen we cirkels rond die punten te hulp.

*** 2** Gegeven de punten $A(-2\frac{1}{2},0)$ en $B(5,0)$. We bekijken alle punten X met de eigenschap: $XB = 2 \cdot XA$. Onderstaande figuur staat ook op het werkblad. Daarop zijn cirkels getekend met middelpunt B, met straal 1, 2, enzovoort en cirkels met middelpunt A en straal 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ enzovoort.

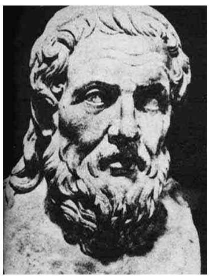


In bovenstaande figuur kun je gemakkelijk punten vinden met de genoemde eigenschap. Het punt X bijvoorbeeld heeft die eigenschap, want het ligt op de cirkel met middelpunt A en straal 3 en op de cirkel met middelpunt B en straal 6.

a. Kleur op het werkblad alle punten X met $XB = 2 \cdot XA$ die je met behulp van de cirkels kunt vinden.

b. De punten die je gekleurd hebt, lijken op een cirkel te liggen. Wat denk je, is het middelpunt en wat is de straal van die cirkel?

c. Ga met een exacte berekening na dat het punt X met coördinaten $(-5+2\sqrt{3}, \sqrt{13})$ bovengenoemde eigenschap heeft en ook op de cirkel met middelpunt (-5,0) en straal 5 ligt.



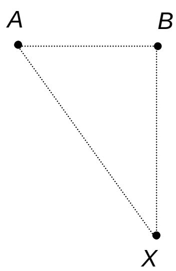
Apollonios van Perga
Grieks: Ἀπολλώνιος
ca. 262–190 v.Chr
Grieks meetkundige en astronoom, beroemd door zijn werken over kegelsneden.
Uit: Wikipedia

In opgave 19 zullen we bewijzen dat de punten X een cirkel vormen. Een dergelijke cirkel wordt een cirkel van Apollonius genoemd.

Vergelijkingen van cirkels

Een rechte lijn heeft in een assenstelsel een vergelijking van een bepaald type, namelijk $ax + by + c = 0$. Evenzo hebben cirkels een bepaald type vergelijking. Daarbij spelen “afstand” en “de stelling van Pythagoras” een grote rol.

3 **a.** Bereken de exacte afstand van (-3,5) tot (7,-2).



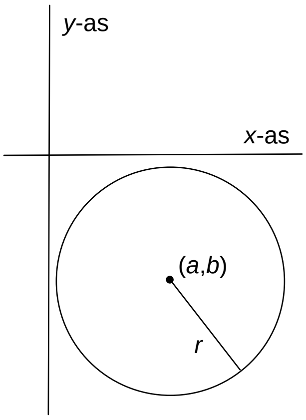
Gegeven zijn het punt $A(3,5)$ en het punt $X(x,y)$; zie de figuur hiernaast. X ligt 'rechtsonder' A, dus $x > 3$ en $y < 5$. Het punt B heeft dezelfde y-coördinaat als A en dezelfde x-coördinaat als X.

b. Druk de rechthoekszijden van driehoek AXB uit in x en y.

Neem aan: $A = (a,b)$ en A ligt 'linksboven' X.
Als je de stelling van Pythagoras toepast in driehoek ABX, vind je: $(x-a)^2 + (b-y)^2 = AX^2$ of, als je wilt $(x-a)^2 + (y-b)^2 = AX^2$

c. Waarom geldt: $(x-a)^2 + (b-y)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$?

Afhankelijk van de positie van A ten opzichte van X is de rechthoekszijde AB gelijk aan $x-a$ of $a-x$ en de rechthoekszijde BX gelijk aan $y-b$ of $b-y$. Maar vanwege de kwadraten in de stelling van Pythagoras maakt dat geen verschil voor de uiteindelijke formule.



De cirkel met middelpunt (a,b) en straal r heeft vergelijking:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

4 Geef een vergelijking van:

a. de cirkel met middelpunt (2,-4) en straal $\sqrt{13}$;

b. de cirkel met middelpunt (-1,3) die door $O(0,0)$ gaat;

c. elk van de cirkels die de x-as en de y-as raken met straal 5.

5 Bepaal de roosterpunten op de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=65$.

Met en zonder haakjes

6 Als je de haakjes wegwerkt in de vergelijking van onderdeel **b** van opgave 3, vind je:
$x^2+y^2+2x-6y=0$.

a. Ga dat na.

Aan de vergelijking $x^2+y^2+2x-6y=0$ zie je niet onmiddellijk dat je te maken hebt met een cirkel en ook niet wat het middelpunt en de straal van die cirkel is.
Het middelpunt en de straal van de cirkel vind je terug, als je de weg in onderdeel **a** in omgekeerde volgorde aflegt. Daarvoor moet je *kwadraatafsplitsen*.
Dit is in de derde klas aan de orde geweest.

Bepaal met kwadraatafsplitsen het middelpunt en de straal van de cirkel met vergelijking:

b. $x^2+y^2+6x-4y=14$;

c. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+6x-4y=14$;

d. $x^2+y^2-13x-5y=0$;

e. $(x+y)^2+(x-y)^2=16$.

Een vergelijking in de vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ van een cirkel noemen we de **middelpuntsvorm**.

7 Gegeven is de cirkel met vergelijking:
$x^2+y^2-2ax-4ay=0$. Hierbij is a een of ander getal ongelijk aan 0.
a. Druk de coördinaten van het middelpunt en de straal uit in a.
b. De middelpunten van de cirkels die je krijgt door a te variëren, liggen op een lijn.
Leg dat uit en geef een vergelijking van die lijn.

8 Gegeven zijn de punten $A(4,0)$ en $B(6,3)$.
Bepaal het middelpunt van de cirkel door de punten O, A en B en geef een vergelijking van die cirkel.

9 Gegeven de cirkel met vergelijking:
$x^2+y^2-2ax-10y=0$. Hierbij is a een of ander getal ongelijk aan 0.
a. Voor welke waarde van a gaat de cirkel door het punt (5,5)? En voor welke waarde van a door (2,10)?
b. Voor welke waarde van a heeft de cirkel straal $3\sqrt{5}$?

De cirkel gaat voor elke waarde van a door $O(0,0)$.
Er is nog een punt waar de cirkel voor elke waarde van a doorheen gaat.
c. Bepaal dat punt en laat zien dat de cirkel voor elke waarde van a door dat punt gaat.

10 De volgende vergelijkingen lijken veel op die van een cirkel. Ga na of de bijbehorende figuur wel of geen cirkel is.

$x^2+2xy+y^2=10$	$x+y^2=10$
$x^4+y^4=10$	$x^2+y^2+10=0$
$(x^2+y^2)^2=10$	$2x^2+3y^2=10$
$x^2-y^2=10$	$x^2+y^2=0$

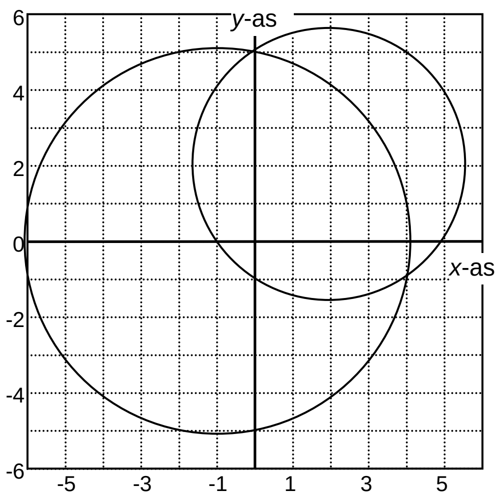
Snijpunten uitrekenen

11 Gegeven de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=5$.
a. Teken de cirkel in een assenstelsel. Geef ook alle roosterpunten aan die op de cirkel liggen.
b. Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn met pv $(x,y)=(1,-1)+t(1,2)$.
Tip. Vul $(1+t,-1+2t)$ in de vergelijking van de cirkel in.
c. Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $x+y=3$ met de cirkel.
Tip. Vul voor y in de vergelijking van de cirkel $3-x$ in.

12 Gegeven de cirkel met middelpunt (3,1) en straal 3 en de lijn met vergelijking $2x+3y=3$.
a. Geef een vergelijking van de cirkel.
b. Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de cirkel met de lijn.

13 Gegeven de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+(y-2)^2=10$ en de lijn met vergelijking $3x-y=11$.
a. Teken de cirkel en de lijn in een assenstelsel.
b. Het lijkt erop dat de cirkel en de lijn maar één punt gemeen hebben. Controleer dat met een berekening.

14 Hieronder zijn twee cirkels getekend. Vergelijkingen van die cirkels zijn:
$(x-2)^2+(y-2)^2-13=0$ en $(x+1)^2+y^2-26=0$.



a. Schrijf de vergelijking
$(x-2)^2+(y-2)^2-13=(x+1)^2+y^2-26$
zonder haakjes zo eenvoudig mogelijk.

In **a** vind je de vergelijking van een lijn.
b. Leg uit dat de snijpunten van de cirkels op die lijn liggen.
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de twee cirkels exact.

Voor elk punt (x,y) van de ene cirkel is de uitkomst van $(x-2)^2+(y-2)^2-13$ gelijk aan 0 en voor elk punt (x,y) van de andere cirkel is $(x+1)^2+y^2-26$ gelijk aan 0. Voor de snijpunten van de cirkels geldt dus *beide* uitdrukkingen gelijk aan 0 zijn.
Dus geldt voor de snijpunten ook bijvoorbeeld
$3 \cdot ((x-2)^2+(y-2)^2-13) - 2 \cdot ((x+1)^2+y^2-26) =$
$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$.

15 a. Vereenvoudig deze vergelijking.
b. Wat is de bijbehorende figuur?
c. Ga na deze nieuwe figuur inderdaad door de snijpunten van de cirkels uit de vorige opgave gaat.

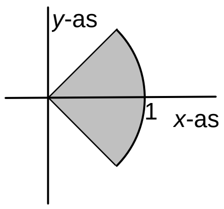
Je kunt op allerlei manieren de formules van de twee gegeven cirkels combineren. Bijvoorbeeld:
$7 \cdot ((x-2)^2+(y-2)^2-13) + 5 \cdot ((x+1)^2+y^2-26) = 0$,
$((x-2)^2+(y-2)^2-12) \cdot ((x+1)^2+y^2-25) = 1$,
$2^{(x-2)^2+(y-2)^2-13} + 3^{(x+1)^2+y^2-26} = 2$.
In elke van deze gevallen zal gaat de figuur door de snijpunten van de cirkels uit de vorige opgave. (De figuren kunnen bizar zijn, en verder zinloos om te bekijken, maar die twee snijpunten hebben ze gemeenschappelijk.)

c. Ga na dat de rechterleden in deze drie formule (dus 0, 1 en 2) goed zijn gekozen.

In opgave 14a is gekozen voor de volgende combinatie:
$((x-2)^2+(y-2)^2-13) - ((x+1)^2+y^2-26) = 0$. Dat is met opzet gebeurd, want nu vallen de termen x^2 en de termen y^2 weg, zodat de figuur een rechte lijn is!

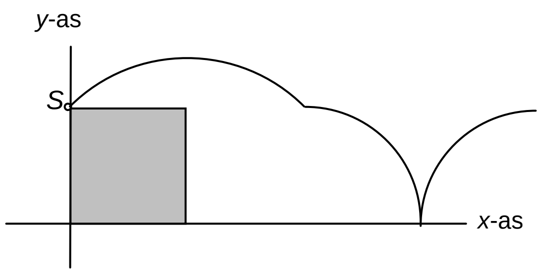
Varia

16 **a.** Kleur de verzameling punten (x,y) waarvoor geldt: $1 < x^2 + y^2 \leq 5$.
b. Beschrijf de kwartcirkel met straal 1 hiernaast met ongelijkheden.



17 De GR spuugt twee willekeurige getallen tussen 0 en 1 uit. Die noemen we x en y.
Wat is de kans dat $x^2 + y^2 \leq 1$?

18 We kantelen een kubus met ribbe 1 over de x-as.
Hieronder is de beginsituatie getekend.
In S is een schrijfstift. Die tekent de baan bij het kantelen.



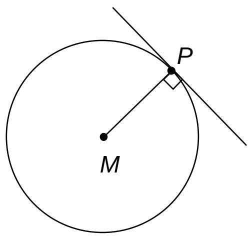
Beschrijf de baan met formules.

19 We komen terug op opgave **1**.
Gegeven de punten $A(-2\frac{1}{2},0)$ en $B(5,0)$. We bekijken alle punten X met de eigenschap: $XB = 2 \cdot XA$.
Bewijs met een berekening dat deze punten een cirkel vormen.
Wat is het middelpunt en de straal van deze cirkel?

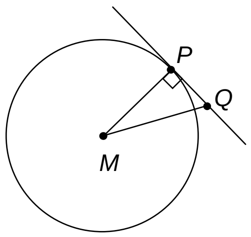
2 Raaklijnen aan cirkels

Met het begrip *raaklijn aan een cirkel* hebben we intuïtief al kennis gemaakt. De ingeschreven cirkel van een driehoek bijvoorbeeld raakt aan de zijden.
In het volgende hebben we een precieze beschrijving van het begrip *raaklijn* nodig, die ook werkt bij parabolen en ellipsen.

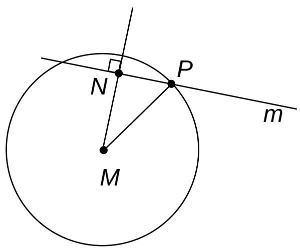
Een **raaklijn** aan een cirkel heeft één punt met de cirkel gemeen. De andere punten van de raaklijn liggen buiten de cirkel.



stelling 1
Gegeven is een cirkel met middelpunt M en een punt P op de cirkel.
De lijn door P loodrecht op MP is raaklijn aan de cirkel.
Er is geen andere raaklijn door P aan de cirkel.



1 **Bewijs van de stelling**
De lijn door P loodrecht op MP noemen we k.
Neem een ander punt dan P op k; noem dat Q.
a. Waarom geldt: $MP < MQ$?
Dus ligt Q buiten de cirkel.



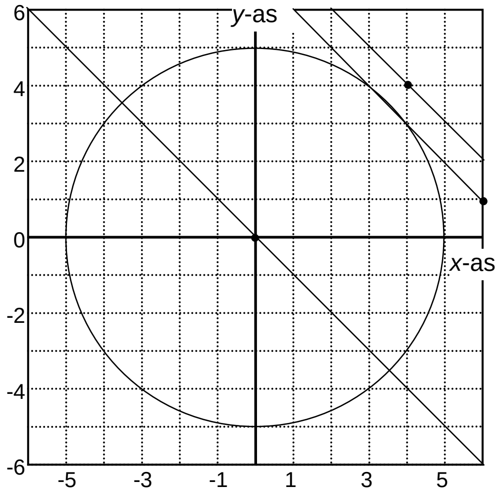
Neem een andere lijn door P, zeg m. De projectie van M op m noemen we N.
b. Waarom geldt: $MP > MN$?
Dus ligt N binnen de cirkel.
Dus m is geen raaklijn.

2 Gegeven is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Op de cirkel ligt het punt $P(3,4)$.
Geef een vergelijking van de raaklijn in P aan de cirkel.
Tip. $\overrightarrow{OP}$ is normaalvector van de raaklijn.

3 Gegeven de cirkel met middelpunt (2,-1). Het punt (1,1) ligt op de cirkel.
a. Geef een vergelijking van de raaklijn in P aan de cirkel.
b. Geef een vergelijking van de cirkel.

Raaklijnen met een gegeven richting

4 Gegeven de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$.



In het rooster hierboven is de cirkel getekend en voor drie waarden van a de lijn met vergelijking $x + y = a$.
Op elk van de drie lijnen is een roosterpunt aangegeven.
a. Bepaal de drie waarden van a.
b. Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $x + y = 0$ met de cirkel.
c. Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de lijn met vergelijking $x + y = 7$ met de cirkel.

De lijn $x + y = 8$ heeft geen gemeenschappelijke punten met de cirkel.

Er is één positieve waarde van a waarvoor de lijn $x + y = a$ één punt met de cirkel gemeen heeft. Volgens de stelling op de vorige bladzijde, ligt het raakpunt op de lijn door O loodrecht op de lijn met vergelijking $x + y = a$.
d. Bepaal de coördinaten van het raakpunt en bereken a.
e. Voor welke negatieve waarde van a raakt de lijn met vergelijking $x + y = a$ aan de cirkel?

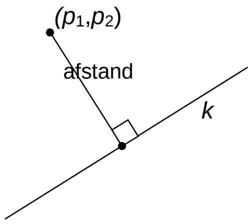
5 Gegeven de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$ en de lijn k met vergelijking $x + 3y = 4$.
a. Bepaal een roosterpunt van de cirkel en teken de cirkel en de lijn in een assenstelsel.

De lijnen $x + 3y = a$ (met $a \neq 4$), zijn evenwijdig aan k. Er zijn twee waarden van a waarvoor de lijn $x + 3y = a$ de cirkel raakt. De raakpunten liggen op de lijn door het middelpunt van de cirkel met richtingsvector (1,3).

b. Verklaar dat en bereken de coördinaten van de raakpunten.

c. Bepaal de twee waarden van *a* waarvoor de lijn $x+3y=a$ de cirkel raakt.

Voor het bepalen van raaklijnen aan cirkels is de afstandsformule uit hoofdstuk 3 goed te gebruiken.



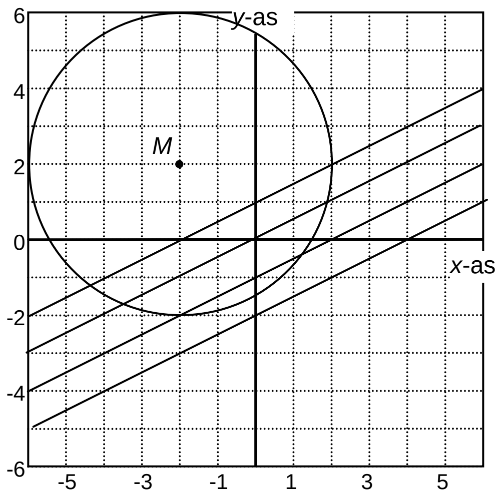
herhaling

k is de lijn met vergelijking $ax+by+c=0$.

De afstand van (p_1,p_2) tot *k* is:

$$\frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

6 Gegeven de cirkel met middelpunt *M*(-2,2) en straal 4 en lijnen evenwijdig met de lijn *k*: $x-2y=0$. Lijnen dicht bij *M* snijden de cirkel in twee punten, lijnen ver van *M* snijden de cirkel niet.



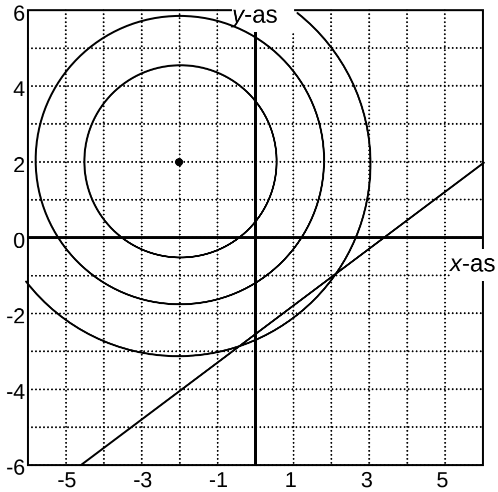
a. Wat kun je zeggen van de afstand van een raakilijn tot *M*?

Zeg dat een raaklijn die evenwijdig aan *k* is vergelijking $x-2y=a$ heeft.

Dan: $\dfrac{|1\cdot -2-2\cdot 2-a|}{\sqrt{5}}=4.$

b. Verklaar dit en bereken de twee waarden van a waarvoor dit klopt.
c. Geef vergelijkingen van de raaklijnen aan de cirkel evenwijdig met k.

7 Gegeven de lijn k met vergelijking $3x - 4y = 10$ en alle mogelijke cirkels met middelpunt (-2,2).



Bereken exact de straal van de cirkel die k raakt.

8 Geef vergelijkingen van de lijnen met richtingsvector (1,2) die raken aan de cirkel met vergelijking
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$

Raaklijnen in een gegeven punt

9 Geef een vergelijking van de raaklijn in (3,1) aan de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$.

10 Gegeven de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r. $P(x_0,y_0)$ ligt op de cirkel.
a. Leg uit dat de raaklijn in P aan de cirkel een vergelijking in de vorm $x_0x + y_0y = a$ heeft, voor zekere waarde van a.
b. a vind je door de coördinaten van P in de vergelijking in te vullen. Ga na dat $a = r^2$.

stelling 2
Een vergelijking van de raaklijn in een punt (x_0,y_0) aan de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r is:
$$x_0x + y_0y = r^2.$$

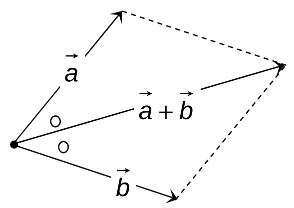
11 **a.** Controleer of de formule werkt bij opgave **2**.
b. Geef een vergelijking van de raaklijn aan de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ in het punt (6,-1) van de cirkel.

12 Een tweede bewijs van stelling 2
In deze opgave laten we met algebra zien dat de lijn k met vergelijking $x_0x + y_0y = r^2$ raaklijn in $P(x_0,y_0)$ aan de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r is.
a. Laat zien dat uit
(1) $x_0x + y_0y = r^2$
(2) $x_0^2 + y_0^2 = r^2$
volgt:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 + y^2 - r^2$.
Tip. Werk de haakjes in het linkerlid uit.
b. Hoe volgt nu uit **a** dat een punt (x,y) van k alleen op de cirkel ligt als $(x,y) = (x_0,y_0)$ en anders er buiten?

13 Gegeven de cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r met vergelijking: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en een punt $P(x_0,y_0)$ op de cirkel. Een vergelijking van de lijn door P loodrecht op MP is: $\overrightarrow{MP} \cdot (\vec{p} - \vec{x}) = 0$, met $\vec{x} = (x,y)$.
a. Druk $\overrightarrow{MP}$ uit in x_0, y_0, a en b.
b. Laat zien dat geldt: $(x_0 - a)(x_0 - x) + (y_0 - b)(y_0 - y) = 0$.
c. Laat zien dat je de vergelijking in **b** kunt schrijven als: $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.

Varia

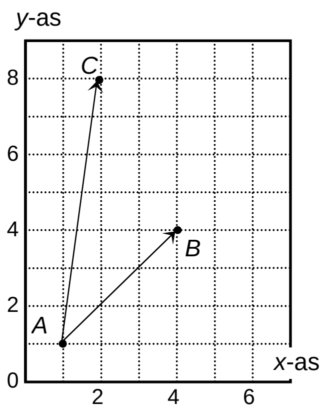
14 Gegeven de punten $P(2,0)$ en $Q(6,0)$. Er zijn twee cirkels die raken aan de y-as en die door de punten P en Q gaan.
a. Teken de situatie in een assenstelsel.
b. Bepaal het middelpunt van die cirkels en geef van elk een vergelijking.



Het volgende hebben we al eerder gezien.

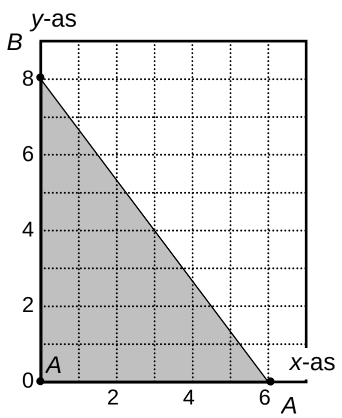
> De somvector van twee vectoren van gelijke lengte deelt de hoek tussen die vectoren doormidden.

Dat is zo omdat een diagonaal in een ruit symmetrieas van de ruit is.



Voorbeeld
Gegeven de punten *A*(1,1), *B*(4,4) en *C*(2,8). De lengte van $\overrightarrow{AB}$ is $3\sqrt{2}$ en de lengte van $\overrightarrow{AC}$ is $5\sqrt{2}$. Dus de vector (5,5) is veelvoud van $\overrightarrow{AB}$ en even lang als $\overrightarrow{AC}$. Dus de vector $(5,5)+(1,7)=(6,12)$ is richtingsvector van de bissectrice van hoek *CAB*.

15 Gegeven het punt *A*(5,12). Een cirkel met straal 5 raakt de *x*-as en lijn *OA*.
Geef een vergelijking van die cirkel, (vier mogelijkheden).

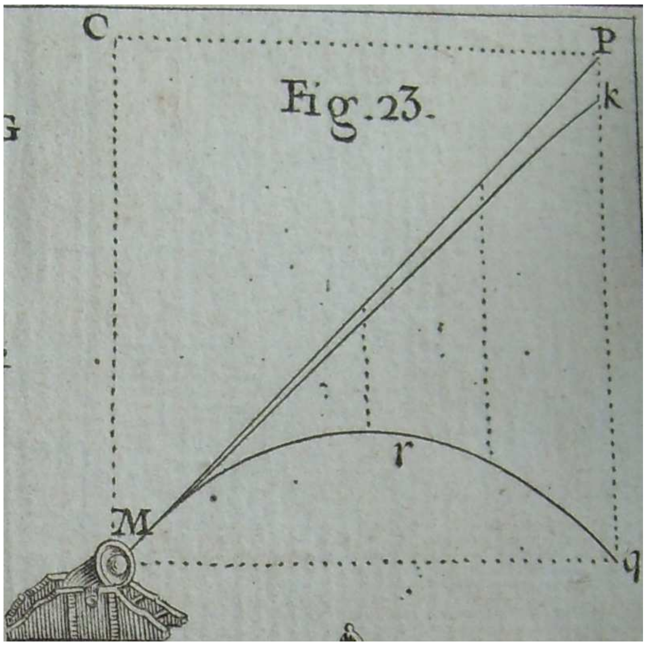


16 We zoeken het middelpunt van een zo groot mogelijke cirkel die nog in driehoek *OAB* past, de zogenaamde ingeschreven cirkel van driehoek *OAB*. Hierbij is *O*(0,0), *A*(6,0) en *B*(0,8).
a. Geef pv's of vergelijkingen van de bissectrices van twee van de hoeken van driehoek *OAB*.
b. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de twee bissectrices.
c. Geef een vergelijking van de ingeschreven cirkel van driehoek *OAB*.

17 Gegeven de lijn *k* met vergelijking $y=\frac{1}{2}x$ met daarop het punt *P*(4,2).
De middelpunten van de cirkels die *k* in *P* raken, liggen op een lijn.
a. Geef een pv van die lijn.
b. Geef een vergelijking van de cirkel die de *y*-as raakt en de lijn *k* in *P* raakt.

3 Parabolen

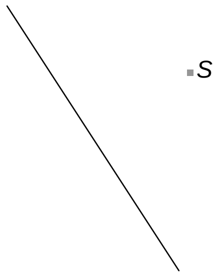
Hieronder zie je een detail van de voorplaat van dit hoofdstuk. Het komt uit: Nollet, Leçons de physique experimentale, tome second, Paris, MDCCLIII. Hierin worden onder andere kogelbanen bestudeerd.



1 Een projectiel wordt in (0,0) afgevuurd met horizontale snelheid 20 m/s en verticale snelheid 30 m/s.
De zwaartekracht vermindert de verticale snelheid. Die is na t seconden: $30 - 10t$ m/s. De afgelegde weg na t seconden in verticale richting is: $y = 30t - 5t^2$ meter.
Voor het gemak is de valversnelling g afgerond op 10 m/s^2.
Al we de luchtweerstand verwaarlozen, is de horizontale snelheid constant 20 m/s en de afgelegde weg in horizontale richting $x = 20t$.
a. Maak een tabel voor t, x en y, met t tussen 0 en 6.
b. Schets de baan van het projectiel in een assenstelsel.

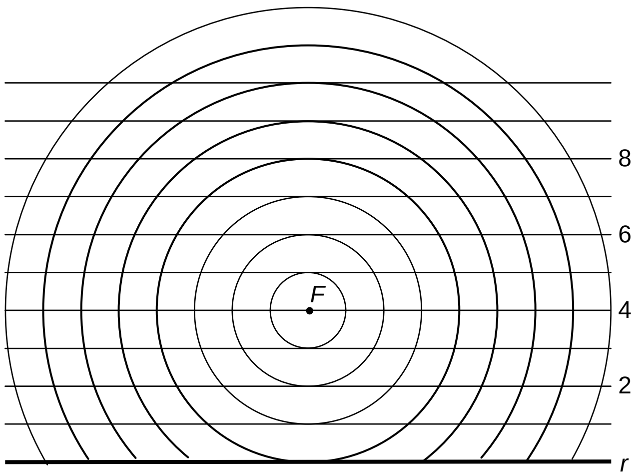
De baan is een parabool.
c. Stel een vergelijking (met de variabelen x en y) op van die parabool.
d. Kun je die vergelijking ook vinden door t te elimineren?

* **2** Jan woont even ver van zee als van de supermarkt *S* aan de rand van het nabijgelegen dorp. We veronderstellen dat de kustlijn perfect recht is.
Zoek op het werkblad waar de plekken ongeveer liggen waar Jan kan wonen.



We gaan het probleem van opgave 2 systematisch aanpakken in een assenstelsel. Omdat de afstanden tot een punt en tot een lijn een rol spelen, roepen we cirkels rond dat punt en evenwijdige lijnen te hulp.

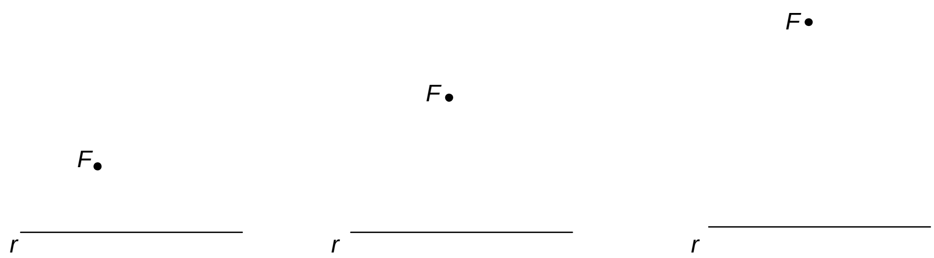
* **3** *F* is een punt en *r* is een lijn. Hieronder zijn getekend de cirkels om *F* met straal 1, 2, 3, … en de lijnen 'boven' *r* op afstand 1, 2, 3, … van *r*. De tekening staat ook op het werkblad.



a. Kleur op het werkblad met behulp van de cirkels en lijnen punten die even ver van *r* als van *F* liggen.

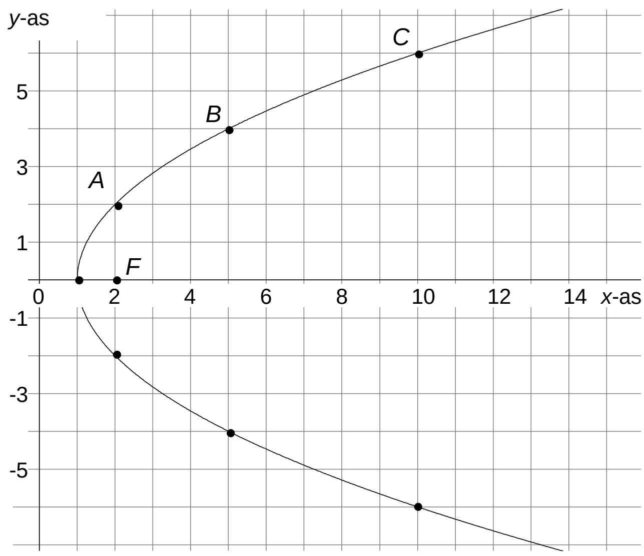
De gekleurde figuur heeft een symmetrieas.
b. Geef die aan in de tekening.

* **4** Het plaatje hieronder staat ook op het werkblad. In elk van de drie gevallen zijn er oneindig veel punten die even ver van *F* als van *r* liggen.



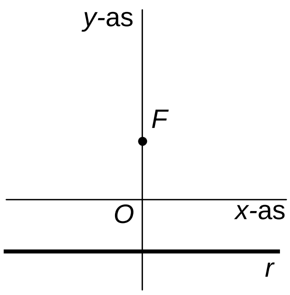
a. Bepaal op het werkblad in elk van de drie gevallen de volgende speciale punten die even ver van *F* als van *r* liggen: pal rechts van *F*, pal links van *F* en recht onder *F*.
b. Schets in elk van de drie gevallen de hele figuur van punten die even ver van *F* als van *r* liggen.

5



Hierboven staat de figuur van alle punten die even ver van de *y*-as als van het punt *F*(2,0) liggen.
a. Laat met een berekening zien dat de roosterpunten *A*, *B* en *C* precies op de figuur liggen.
b. Bereken exact de eerste coördinaat van het punt van de figuur met tweede coördinaat 5.

Een vergelijking van zo'n figuur



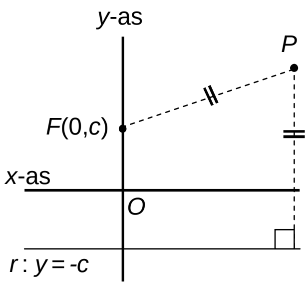
6 De figuur uit opgave **3** van alle punten die even ver van *r* als van *F* liggen noemen we gemakshalve *f*. We brengen een assenstelsel aan in het plaatje en zoeken een vergelijking van *f.* Als *y*-as kiezen we de lijn door *F* loodrecht op *r* en als *x*-as de lijn evenwijdig aan *r* die even ver van *F* als van *r* ligt. Als eenheid kiezen we een kwart van de afstand van *F* tot *r*.
Zodoende is de oorsprong *O*(0,0) een punt van *f*, is *F* = (0,2) en heeft *r* vergelijking *y* = -2.

De punten *P*(*x*,*y*) van *f* hebben een positieve tweede coordinaat.
a. Druk de afstand van *P* tot *r* uit in *y*.

Er geldt: P ligt op $f \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=y+2$.

b. Leg dat uit.

c. Schrijf bovenstaande vergelijking zonder haakjes, zonder wortel en zo eenvoudig mogelijk.



7 We nemen een algemener geval: $F=(0,c)$ en r: $y=-c$, voor een of ander positief getal c. (In de vorige opgave is $c=2$.)
We zoeken weer een vergelijking van de figuur gevormd door de punten $P(x,y)$ die even ver van r als van F liggen.

a. Druk de afstand van P uit in y en c.

b. Druk de afstand van P tot F uit in x, y en c.

c. Uit de gelijkheid van de uitdrukkingen in **a** en **b** volgt dat $x^2=4cy$. Reken dat na.

definitie van een parabool
Gegeven een punt F en een lijn r waar F niet op ligt.
De punten die even ver van r als van F liggen vormen een figuur die we **parabool** noemen.

r heet **richtlijn** van de parabool en F **brandpunt**.
De lijn door F loodrecht op r is symmetrieas van de parabool. We noemen die lijn **as** van de parabool.

In de derde klas hebben we gezien dat de grafiek van elke kwadratische functie te krijgen is door die van $y=ax^2$ voor zekere waarde van a te verschuiven.
Grafieken van kwadratische functies zijn dus voorbeelden van parabolen (volgens opgave **7c**); het bijzondere is dat de grafieken een verticale symmetrieas hebben.

Op een parabolische spiegel worden stralen evenwijdig aan de as zó teruggekaatst dat ze allemaal door het brandpunt gaan en wel met dezelfde fase; vandaar de naam brandpunt.
Deze eigenschap maakt een parabolische spiegel geschikt om signalen uit de ruimte op te vangen.
Het Latijnse woord voor brandpunt is focus, vandaar de letter F voor het brandpunt.

Volgens een legende zou Archimedes (287-212 voor Chr.) in de strijd tegen Rome voor zijn vaderstad Syracuse parabolische spiegels hebben ontworpen. Door de spiegels zo te richten dat de zonnestralen werden gebundeld op de vijandelijke Romeinse houten schepen, zouden deze in brand zijn gestoken.

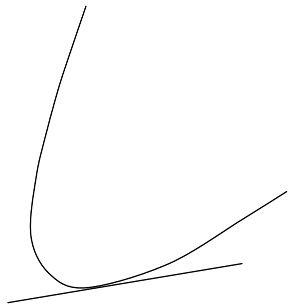
De radiotelescoop te Effelsberg (Duitsland) is met zijn diameter van 100 meter een van 's werelds grootste volledig stuurbare telescopen.

8 Geef een vergelijking van de richtlijn en de coördinaten van het brandpunt van de parabool met

a. top *O*(0,0) die gaat door het punt (2,6);

b. top *O*(0,0) die gaat door het punt (2,-6).

4 Raaklijnen aan parabolen

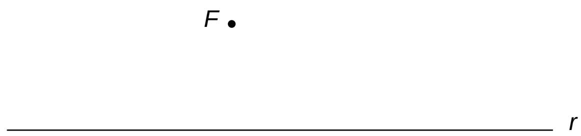


Een **raaklijn** aan een parabool heeft één punt met de parabool gemeen. De andere punten van de raaklijn liggen buiten de parabool.

NB. Een punt ligt *binnen* een parabool als het aan dezelfde kant ligt als het brandpunt, dus als het dichter bij *F* dan bij *r* ligt.

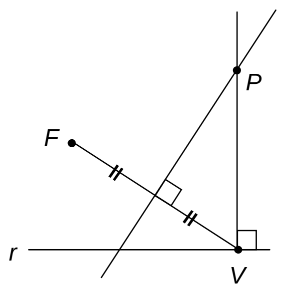
Punten van een parabool construeren

Gegeven is een punt *F* en een lijn *r.*



We vinden punten van de parabool met brandpunt *F* en richtlijn *r* als volgt.

- Kies een punt op *r*. We noemen dat *V*.
- Teken de lijn door *V* loodrecht op *r*.
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk *FV*.

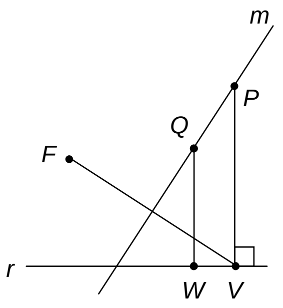


Het snijpunt *P* van de twee getekende lijnen ligt even ver van *r* als van *F*, dus op de parabool.

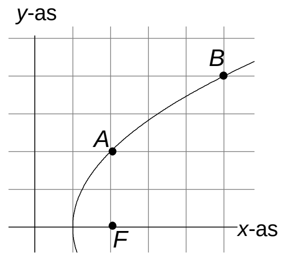
Met programma's als *Cabri*, *Geogebra*, *Cinderella* en *Passer en Liniaal* kun je op bovenstaande manier de constructie van een parabool uitvoeren. *Geogebra* en *Passer en Liniaal* zijn vrij te downloaden van internet.

Voor een punt *P* van een parabool, noemen we zijn (loodrechte) projectie op de richtlijn het **voetpunt** van *P*.

stelling 3
Gegeven een parabool met brandpunt *F* en richtlijn *r.*
Voor een punt *P* van de parabool en zijn voetpunt *V* geldt: de middelloodlijn van *FV* is raaklijn in *P* aan de parabool.



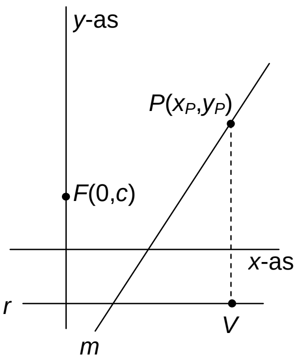
1 Bewijs stelling 3
m is de middelloodlijn van *FV*. *Q* ligt op *m* en *W* is de loodrechte projectie van *Q* op *r*.
a. Ga na dat $FQ = QV$ en $QW < QV$.
b. Hoe volgt uit **a** dat *Q* buiten de parabool ligt?
c. In de tekening is *Q* 'links' van *P* genomen. Toon aan dat ook een punt *Q* op *m* 'rechts' van *P* buiten de parabool ligt.



2 We nemen de parabool uit opgave **4** van de vorige paragraaf. De richtlijn is de *y*-as en het brandpunt *F*(2,0).
De punten *A*(2,2) en *B*(5,4) liggen op de parabool.
Geef een vergelijking van de raaklijn in *A* en van de raaklijn in *B* aan de parabool.

3 Gegeven is de parabool met vergelijking $y^2 = 2x$.
a. Bepaal het brandpunt en de richtlijn van de parabool.
Tip: Zie opgave 6 van de vorige paragraaf.
b. Het punt (2,2) ligt op de parabool. Geef een vergelijking van de raaklijn in dit punt aan de parabool.

Een formule van de raaklijn aan een parabool



4 De parabool $x^2 = 4cy$ heeft de richtlijn: $y = -c$ en brandpunt $(0,c)$; zie opgave **7** van de vorige paragraaf. We nemen $c > 0$.
$P(x_P,y_P)$ is een punt van de parabool en *V* zijn voetpunt.
m is de middelloodlijn van *FV*, dus de raaklijn in *P* aan de parabool.
a. Er geldt $x_P{}^2 = 4cy_P$. Waarom?
b. Druk de coördinaten van *V* en vervolgens $\overrightarrow{FV}$ uit in x_P en *c*.

$\overrightarrow{FV}$ is normaalvector van *m*, dus een vergelijking van *m* is: $x_P \cdot x - 2c \cdot y = a$ voor een of ander getal *a*, dat je vindt door (x_P,y_P) in de vergelijking van *m* in te vullen.
c. Ga na dat je dan krijgt: $a = 2cy_P$.

Opmerking
Als $c < 0$, moet de tekening bij opg. 4 in de *x*-as gespiegeld worden. Uiteindelijk kom je tot hetzelfde resultaat.

stelling 4
Een vergelijking van de raaklijn in (x_P,y_P) aan de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ is:

$$x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P.$$

5 **a.** Controleer of de formule werkt voor opgave **3b**.
b. Het punt (-2,12) ligt op de parabool met vergelijking $y = 3x^2$. Geef een vergelijking van de raaklijn in dit punt aan de parabool.

6 Gegeven de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ met $c > 0$.
Voor elk punt (x,y) in het vlak zijn er drie mogelijkheden.
(1) $x^2 - 4cy = 0$ (2) $x^2 - 4cy > 0$ of (3) $x^2 - 4cy < 0$
De punten met eigenschap (1) liggen op de parabool.
Wat kun je zeggen over de ligging van de punten met eigenschap (2)? (Preciezer dan dat ze niet op de parabool liggen.)
En van de punten met eigenschap (3)?

7 **Een tweede bewijs van stelling 4**
Vergelijk de werkwijze in deze opgave met die in opgave **12** van paragraaf 2.
Gegeven is de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$, met $c > 0$. $P(x_P, y_P)$ ligt op de parabool.
a. Laat zien dat uit
(1) $x_P^2 = 4cy_P$
(2) $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$.
volgt dat: $x^2 - 4cy = (x - x_P)^2$.
Tip. Begin rechts en werk de haakjes weg.
b. Ga na dat uit **a** volgt: elk punt (x,y) dat op de lijn met vergelijking $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$ ligt, behalve P zelf, ligt buiten de parabool (zie ook opgave **6**).

8 $P(4,4)$ ligt op de parabool met vergelijking $x^2 = 4y$.
a. Geef een vergelijking van de raaklijn in P aan de parabool.
b. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de raaklijn met de x-as en de y-as.

$Q(6,9)$ ligt op de parabool.
c. Geef een vergelijking van de raaklijn in Q aan de parabool.
d. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de raaklijn met de x-as en de y-as.

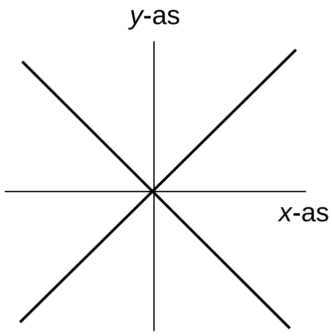
9 Wat je in **8** gezien hebt, is een speciaal geval van het volgende.
De raaklijn in $P(x_P, y_P)$, met $x_P \neq 0$, aan de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ snijdt de x-as in $(\frac{1}{2}x_P, 0)$ en de y-as in $(0, -y_P)$.
Toon dat aan.
Tip. Gebruik de eigenschap $x_P^2 = 4cy_P$.

5 Schuiven en rekken

Zorg dat je de weg kent in het programma 'Winplot'.

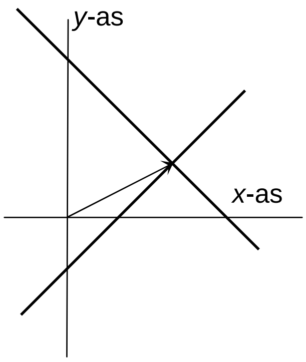
De formule na verschuiving

In de eerste opgave gebruiken we de absolute waarde van x, notatie: $|x|$ of (zoals in *Winplot*) abs(x).



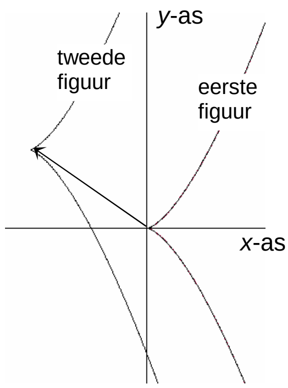
1 Hiernaast staat de figuur van het verband $|x| = |y|$. (*)
a. Schrijf het verband zonder absolute-waardestrepen.
Tip: gebruik "*of*".
b. Schrijf zo ook het verband $|x - 3| = |y + 2|$ zonder absolute-waardestrepen.
c. Teken in een assenstelsel de figuur van het verband $|x - 3| = |y + 2|$.

De figuur die je getekend hebt, krijg je door de figuur van $|x| = |y|$ te verschuiven.
d. Hoe?



Door de figuur van $|x| = |y|$ te verschuiven over de vector (2,1) krijg je de figuur hiernaast.
e. Geef een formule voor de verschoven figuur.

In deze paragraaf bekijken we hoe je de formule van een figuur moet veranderen bij een verschuiving of een vermenigvuldiging.
Met het programma *Winplot* kun je je formules controleren.



2 Gegeven is de formule $y^2 = x^3$. Hiernaast staat de bijbehorende figuur. Er staat ook een tweede figuur; die krijg je door de figuur van $y^2 = x^3$ te verschuiven over (-3,2).
a. Punten van de tweede figuur zijn (1,10) en (1,-6).
Welk punten van de eerste figuur horen bij deze twee punten? Ga na of de oorspronkelijke punten aan de formule voldoen.
b. Een ander roosterpunt van de tweede figuur is (97,1002). Welk punt van de eerste figuur hoort hierbij?

(*) De figuur van een verband is een plaatje waarin alle punten zijn aangegeven die aan het verband voldoen.

Als (p,q) een punt op de tweede figuur is, is $(p+3, q-2)$ een punt van de eerste figuur.
c. Welke formule geldt als $(p+3, q-2)$ op de eerste figuur ligt?

Dus (p,q) ligt op de tweede figuur als $(q-2)^2 = (p+3)^3$.
d. Geef een formule voor de tweede figuur uitgedrukt in x en y en controleer die met Winplot.
e. Geef een formule voor de figuur die je krijgt door die bij $y^2 = x^3$ te verschuiven over (3,-1) en controleer je formule met Winplot.

stelling 5
Gegeven een formule in x en y van een of andere figuur. Je verschuift de figuur over de vector (a,b). De formule van de beeldfiguur krijg je door in de oorspronkelijke formule x te vervangen door $x-a$ en y door $y-b$.

De gedachtengang bij de figuren in opgave 1 en 2 is als volgt:
- We verschuiven de figuur over de vector (a,b).
- Een punt (x,y) ligt op de beeldfiguur als het teruggeschoven punt $(x-a, y-b)$ op de originele figuur ligt.
- We kennen een formule bij de originele figuur.
- Daaraan moet $(x-a, y-b)$ voldoen.

3 **a.** De cirkel met middelpunt O en straal r wordt verschoven over (a,b). Ga na dat bovenstaande in overeenstemming is met wat je eerder over vergelijkingen van cirkels gezien hebt.
b. Doe hetzelfde voor de parabool met vergelijking $y = x^2$.

4 De lijn k: $2x+3y=9$ gaat door het punt (3,1). m is de lijn door (-1,5) evenwijdig met k.
a. Geef een vergelijking van m.

Je krijgt m door k te verschuiven over de vector (-4,4).
b. Waarom?
c. Geef een vergelijking van m door stelling 5 toe te passen. Klopt het met je antwoord van **a**?

5 Gegeven is de parabool met vergelijking $y^2 = 4x - 4$.
a. Maak een tabel en teken de grafiek van de parabool.
b. De parabool krijg je door de parabool met vergelijking $y^2 = 4x$ te verschuiven. Hoe?
c. Geef het brandpunt van de parabool $y^2 = 4x - 4$ en de richtlijn.

Een formule voor de raaklijn aan de parabool $y^2 = 4x$ in het punt (9,6) is $6y = 2x + 18$.
d. Geef met behulp hiervan een vergelijking van de raaklijn in (10,6) aan de parabool met vergelijking $y^2 = 4x - 4$.
e. Geef een vergelijking van de raaklijn in **d** door stelling 3 van de vorige paragraaf te gebruiken.
f. Geef een vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y^2 = 4x - 4$ in het punt (5,-4).

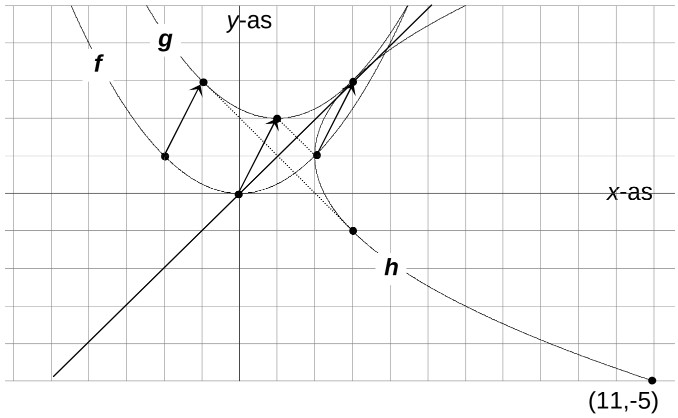
6 Gegeven is parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$. Deze wordt verschoven over de vector (a,b). De beeldparabool heeft vergelijking $(x-a)^2 = 4c(y-b)$.
We gaan een vergelijking geven van de raaklijn in (x_P,y_P) van de beeldparabool.
a. Geef een vergelijking van de raaklijn aan de parabool $x^2 = 4cy$ in het punt $(x_P - a, y_P - b)$.
b. Hoe volgt uit **a** dat $(x-a)(x_P-a) = 2c(y-b) + 2c(y_P-b)$ een vergelijking van de raaklijn in (x_P,y_P) van de beeldparabool is?

De formule na spiegeling

7 **a.** Bepaal het spiegelbeeld van de punten (2,3), (2,-3) en (-2,-3) en (a,b) in de x-as.
b. Wat is het spiegelbeeld van (a,b) in de y-as? En in de lijn $y = x$? En in de lijn $y = -x$? En in de oorsprong $O(0,0)$?

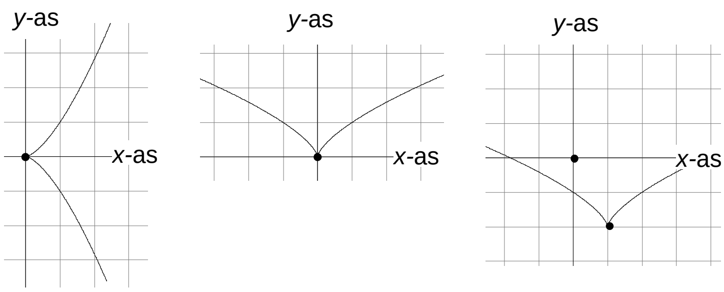
Spiegelen in de x-as:	$(x,y) \to (x,-y)$
Spiegelen in de y-as:	$(x,y) \to (-x,y)$
Spiegelen in de lijn $y = x$:	$(x,y) \to (y,x)$
Spiegelen in de lijn $y = -x$:	$(x,y) \to (-y,-x)$
Spiegelen in $O(0,0)$:	$(x,y) \to (-x,-y)$

8 In een assenstelsel zijn de parabolen *f*, *g* en *h* getekend. Daarop zijn roosterpunten aangegeven. De parabool *g* ontstaat uit *f* door een verschuiving en *h* uit *g* door spiegeling in de lijn $y = x$.



a. Geef een vergelijking voor *f* (de top van *f* is (0,0)).
b. Geef een vergelijking voor *g*.
Controleer de vergelijking (met Winplot).
c. (11,-5) ligt op de parabool *h*. Hoe kun je dat controleren met de vergelijking van *g*?
d. Geef een vergelijking van *h*.
Controleer de vergelijking (met Winplot).
e. Het lijkt erop dat de lijn $y = x$ precies één punt met *g* en *h* gemeenschappelijk heeft. Controleer dat met een exacte berekening.

9 In opgave **2** staat de grafiek van de formule $y^2 = x^3$. Die is hieronder in plaatje 1 nog eens getekend.



plaatje 1 plaatje 2 plaatje 3

a. Hoe zie je aan de formule dat de grafiek symmetrisch is ten opzichte van de *x*-as?
b. Geef de formule bij de grafiek die je krijgt door die bij $y^2 = x^3$ te spiegelen in de lijn $y = x$, plaatje 2.
Controleer je antwoord.

c. Geef een formule voor de figuur in plaatje 3, een verschuiving van de figuur in plaatje 2.
Controleer je antwoord.

stelling 6
Gegeven een formule in x en y van een of andere figuur. Je spiegelt de figuur in de lijn $x = y$. De formule van de beeldfiguur krijg je door in de oorspronkelijke formule x te vervangen door y en y door x.

De gedachtengang bij stelling 6 is als volgt:

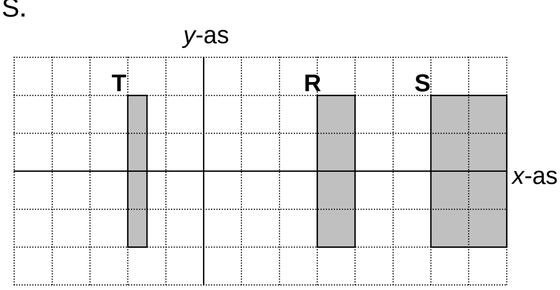
- We spiegelen een figuur in de lijn $x = y$.
- Een punt (x,y) ligt op de beeldfiguur als het teruggespiegelde punt (y,x) op de originele figuur ligt.
- We kennen een formule bij de originele figuur.
- Daaraan moet (y,x) voldoen.

10 Van een figuur is een formule bekend. De figuur wordt gespiegeld in de *x*-as.
a. Hoe moet je de formule van de originele figuur veranderen om de formule voor de beeldfiguur te krijgen?

Van een figuur is een formule bekend. De figuur wordt gespiegeld in de *y*-as.
b. Hoe moet je de formule van de originele figuur veranderen om de formule voor de beeldfiguur te krijgen?

De formule na lijnvermenigvuldiging

11 Rechthoek R wordt met factor 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de *y*-as. Dat wil zeggen: de afstand van elk punt van de rechthoek tot de *y*-as wordt verdubbeld (en de afstand tot de *x*-as blijft gelijk). Het beeld is rechthoek S.



Als je rechthoek R met factor $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt ten opzichte van de *y*-as, krijg je rechthoek T.

a. Wat zijn de coördinaten van het punt dat je krijgt door het punt (a,b) met factor -3 te vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as? En als je met factor p vermenigvuldigt?
b. Wat is het beeld van (a,b) bij vermenigvuldiging met factor p ten opzichte van de x-as?
c. Wat is het beeld van (a,b) bij vermenigvuldiging met factor p ten opzichte van de oorsprong O(0,0)?

Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met p:

$$(x,y) \rightarrow (x,py).$$

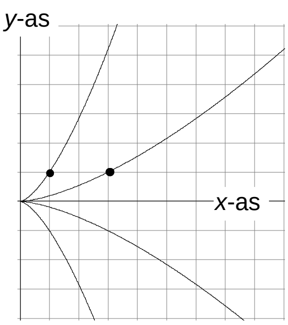
Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met p:

$$(x,y) \rightarrow (px,y).$$

Vermenigvuldigen ten opzichte van O(0,0) met p:

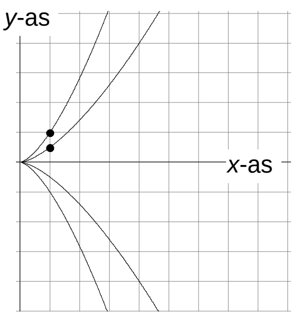
$$(x,y) \rightarrow (px,py).$$

Uit de formules volgt:
vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met p, en daarna vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met p (of omgekeerd), komt op hetzelfde neer als: vermenigvuldigen ten opzichte van O(0,0) met p.



12 Hiernaast staat de grafiek van het verband $y^2 = x^3$ en zijn beeld bij vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 3.
a. Hoe kun je controleren dat (12,-8) op de beeldgrafiek ligt? En (300,1000)?
b. Welk punt op de originele grafiek correspondeert met het punt (a,b) op de beeldgrafiek?

Dus (a,b) ligt op de beeldgrafiek als ($\frac{1}{3}a$,b) op de originele grafiek ligt, dus als $b^2 = (\frac{1}{3}a)^3$.
Een formule bij de beeldgrafiek is dus: $y^2 = (\frac{1}{3}x)^3$.



13 Hiernaast staat weer de grafiek van het verband $y^2 = x^3$ en het beeld bij vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor $\frac{1}{2}$.
a. Hoe kun je controleren dat (4,-4) op de beeldgrafiek ligt? En (100,500)?
b. Welk punt op de originele grafiek correspondeert met het punt (a,b) op de beeldgrafiek?

Dus (a,b) ligt op de beeldgrafiek als (a,2b) op de originele grafiek ligt, dus als $(2b)^2 = a^3$.
Een formule bij de beeldgrafiek is dus: $(2y)^2 = x^3$.

stelling 7
Gegeven een formule in x en y voor een of andere figuur.
• Je vermenigvuldigt de figuur ten opzichte van de x-as met factor $p \neq 0$. De formule van de beeldfiguur krijg je door in de oorspronkelijke formule y te vervangen door $y.\frac{1}{p}$
• Je vermenigvuldigt de figuur ten opzichte van de y-as met factor $p \neq 0$. De formule van de beeldfiguur krijg je door in de oorspronkelijke formule x te vervangen door $x.\frac{1}{p}$

De gedachtengang bij stelling 7, eerste punt, is als volgt:

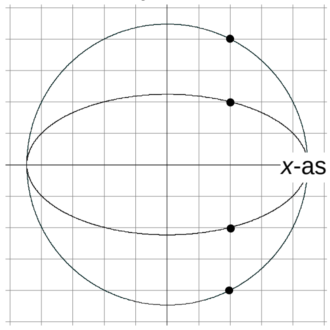
- We vermenigvuldigen een figuur met factor $p \neq 0$ ten opzichte van de x-as.
- Een punt (x,y) ligt op de beeldfiguur als het terug-vermenigvuldigde punt $(x, \frac{1}{p}y)$ op de originele figuur ligt.
- We kennen een formule bij de originele figuur.
- Daaraan moet $(x, \frac{1}{p}y)$ voldoen.

14 k is de lijn met vergelijking $2x + y = 2$; m is de lijn die je krijgt door k met factor $-\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as te vermenigvuldigen, n de lijn door k ten opzichte van de y-as met 2 te vermenigvuldigen.
a. Teken k, m en n in een rooster.
b. Geef de formules van m en n die je krijgt door bovenstaande stelling toe te passen.
Controleer je formule met bijvoorbeeld de snijpunten met de x-as en de y-as.

Eigenlijk komt het allemaal op hetzelfde neer

Gegeven een figuur met bijbehorende vergelijking in x en y. De figuur wordt getransformeerd. De formule van de beeldfiguur vind je als volgt.
Vervang in de oorspronkelijke formule x door het origineel van x en y door het origineel van y.

Cirkels en parabolen vermenigvuldigen



15 De cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal $2\sqrt{5}$ wordt opzichte van de x-as met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd.
a. Geef een formule voor de beeldfiguur.
b. Controleer je formule door de coördinaten van de snijpunten van de beeldfiguur met de x-as en de y-as te berekenen.
c. Geef een vergelijking van de raaklijn aan de cirkel in (2,4).
d. Hoe kun je met behulp van **c** een vergelijking voor de raaklijn in (2,2) aan de beeldfiguur vinden?

Een **ellips** krijg je door een cirkel in de x- of y-richting te vermenigvuldigen.
Een ellips heeft twee symmetrieassen. De stukken hiervan die binnen de ellips liggen heten **korte** en **lange as**.

16 Gegeven de cirkel met vergelijking $(x-4)^2+(y+3)^2=9$.
a. Teken de cirkel in een assenstelsel.

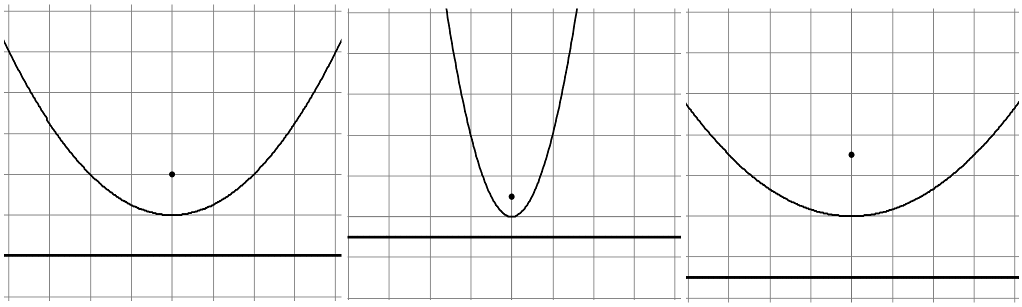
We veranderen de formule in: $(x-4)^2+(3y+3)^2=9$. Je krijgt een ellips.
b. Hoe vind je deze ellips uit de cirkel?
c. Hoe kun je met de formule de symmetrieassen van de ellips vinden?
d. Bereken de lengte van de lange en de korte as van de ellips met behulp van de formule.

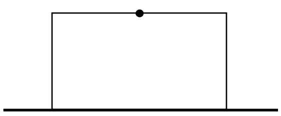
17 Geef een formule voor de ellips met symmetrieassen $x=3$ en $y=5$, waarvan de lange as lengte 20 heeft en de korte as lengte 5, (twee mogelijkheden).

18 Een 'scheve' parabool
We bekijken de parabool met brandpunt $F(1,1)$ en richtlijn r met vergelijking $x+y+2=0$.
a. Wat zijn de coördinaten van de top van de parabool? Geef een vergelijking van de symmetrieas.
b. De afstand van een punt (x,y) tot r is: $\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$.
Druk de afstand van (x,y) tot F in x en y uit.
c. Laat zien dat (x,y) op de parabool ligt als:
$(x+y+2)^2=2(x-1)^2+2(y-1)^2$.

d. Schrijf de formule uit **c** zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.
e. Teken de grafiek van de parabool met Winplot.
f. Hoe zie je aan de formule uit **d** dat de lijn $y = x$ symmetrieas van de parabool is?
g. Bereken de coördinaten van het punt op de parabool waar de raaklijn horizontaal is.

*** 19** Hieronder staan drie parabolen met hun brandpunten en richtlijnen. De plaatjes zijn zeker niet gelijkvormig.





a. Teken op het werkblad in elk van de drie plaatjes een rechthoek zoals hiernaast: de onderkant ligt op de richtlijn, het brandpunt is het midden van de bovenkant en twee hoekpunten liggen op de parabool.
b. Wat is de verhouding van de zijden van de rechthoeken? Waarom?

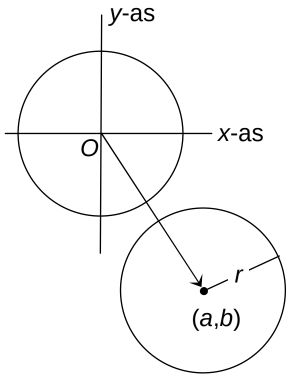
De stukjes parabool binnen de rechthoeken zien er wel gelijkvormig uit!
De parabolen hebben alledrie een vergelijking van de vorm $x^2 = 4cy$, voor verschillende waarden van c. Door puntvermenigvuldiging ten opzichte van $O(0,0)$ kun je ze uit elkaar laten ontstaan. En dus zijn ze gelijkvormig.
Dat laten we hieronder zien.

We vermenigvuldigen de parabool $x^2 = y$ met factor 2 ten opzichte van $O(0,0)$.
c. Laat zien dat de formule voor de beeldparabool te vereenvoudigen is tot $x^2 = 2y$.
d. Door welke vermenigvuldiging ontstaat de parabool $x^2 = 4cy$ uit de parabool $x^2 = y$?

Eigenlijk is het simpel: een punt en een lijn kunnen maar op één manier ten opzichte van elkaar liggen, afgezien van een schaalfactor!

Alle parabolen zijn gelijkvormig.

6 Samenvatting

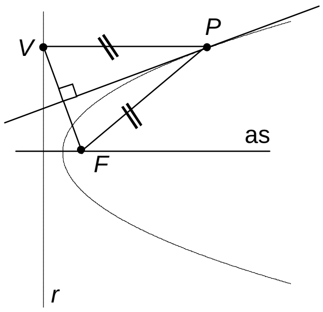


De cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$ (stelling van Pythagoras).
Verschuif je de cirkel over de vector (a,b), dan krijg je de cirkel met middelpunt (a,b) en straal r. Een vergelijking van deze cirkel is: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Het middelpunt van de cirkel met vergelijking
$x^2 + y^2 + 2x - 6y = 20$ vind je door kwadraatafsplitsen.

Een **raaklijn** aan een cirkel (parabool, ellips) heeft één punt met de cirkel (parabool, ellips) gemeen. De andere punten van de raaklijn liggen buiten de cirkel (parabool, ellips).

De raaklijn in een punt P aan een cirkel met middelpunt M staat loodrecht op lijn PM.
Een vergelijking van de raaklijn in een punt (x_P,y_P) aan de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ is: $x_P x + y_P y = r^2$.



Gegeven een punt F en een lijn r waar F niet op ligt.
Punten even ver van r als F vormen een **parabool**.
r heet **richtlijn** van de parabool en F **brandpunt**.
De lijn door F loodrecht op r is **as** van de parabool.
Als P een punt van een parabool is en V zijn voetpunt, dan is de middelloodlijn van FV raaklijn in P aan de parabool.
Een vergelijking van de raaklijn in (x_P,y_P) aan de parabool met vergelijking $x^2 = 4cy$ is: $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$.

Transformaties

Verschuiven over de vector (a,b):	$(x,y) \rightarrow (x+a, y+b)$
Spiegelen in de x-as:	$(x,y) \rightarrow (x,-y)$
Spiegelen in de y-as:	$(x,y) \rightarrow (-x,y)$
Spiegelen in de lijn $y=x$:	$(x,y) \rightarrow (y,x)$
Spiegelen in de lijn $y=-x$:	$(x,y) \rightarrow (-y,-x)$
Puntspiegelen in O:	$(x,y) \rightarrow (-x,-y)$
Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met p:	$(x,y) \rightarrow (x,py)$.
Vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met p:	$(x,y) \rightarrow (px,y)$
Puntvermenigvuldigen ten opzichte van O met factor p:	$(x,y) \rightarrow (px,py)$

Gegeven een figuur met een bekende formule in x en y. De figuur wordt getransformeerd (verschoven, gespiegeld of vermenigvuldigd).
Een punt (x,y) ligt op de beeldfiguur als het teruggetransformeerde punt op de originele figuur ligt, dus aan de bekende formule voldoet.
De formule van de beeldfiguur vind je dus als volgt:
vervang in de oorspronkelijke formule x door het origineel van x en y door het origineel van y.

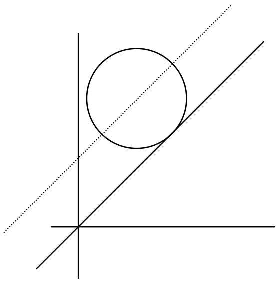
Een **ellips** krijg je door een cirkel in de x of y-richting te vermenigvuldigen.
Een ellips heeft twee symmetrieassen. De stukken hiervan die binnen de ellips liggen heten **korte** en **lange as**.

Door de parabool $x^2 = y$ met een geschikte factor ten opzichte van $O(0,0)$ te vermenigvuldigen, kun je elke parabool $x^2 = 4cy$ krijgen. Door die vervolgens te verschuiven of te draaien kun je elke parabool krijgen.
Dus zijn alle parabolen gelijkvormig.

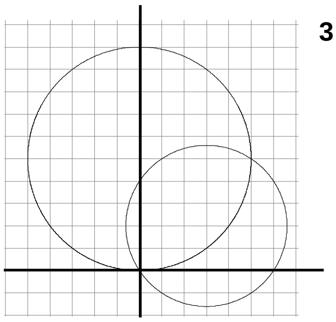
7 Extra opgaven

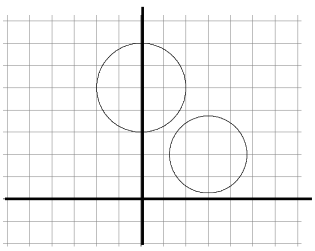
1 Gegeven de cirkel met middelpunt (a,a) die de x-as en de y-as raakt. Hierbij kan a alle mogelijke waarden aannemen.
a. Geef een vergelijking van die cirkel.

Met Winplot kun je een animatie maken:
anim→parameters A-W…→A en met de schuif kun je de parameter a variëren.
b. Teken de cirkel voor verschillende waarden van a in Winplot.
c. Teken het punt (9,2) en bepaal met de schuif voor welke a de cirkel door (9,2) gaat.
d. Bereken exact de twee waarden van a waarvoor de cirkel door (9,2) gaat.



2 In deze opgave laten we met Winplot een cirkel met straal 1 over de lijn $y=x$ lopen.
a. Geef een pv van de lijn waarover het middelpunt van de cirkel dan loopt.
b. Geef vergelijkingen van de cirkels met straal 1 die de lijn $y=x$ aan de 'bovenkant' raken; gebruik voor het variabele middelpunt de pv van onderdeel **a**.
c. Welk middelpunt hebben de cirkels die de y-as raken? (Geef de exacte coördinaten, twee mogelijk-heden)





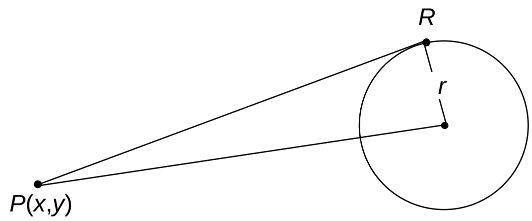
3 In het plaatje hiernaast zijn getekend de cirkels met vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2=13$ en $x^2+(y-5)^2=25$. We bekijken de vergelijking
$(x-3)^2+(y-2)^2-13=x^2+(y-5)^2-25$

a. Schrijf die vergelijking zo eenvoudig mogelijk.

Je krijgt de vergelijking van een lijn.
b. Hoe ligt die lijn ten opzichte van de cirkels?
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de twee cirkels.

Als je de stralen van de cirkels kleiner maakt, je neemt bijvoorbeeld cirkels met vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2=3$ en $x^2+(y-5)^2=4$, dan stelt de vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2-3=x^2+(y-5)^2-4$ nog steeds een lijn voor.
d. Teken die lijn in een assenstelsel.

Gegeven een cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r. $P(x,y)$ is een punt buiten de cirkel en R het raakpunt van een raaklijn door P aan de cirkel.
e. Laat zien dat $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=PR^2$.



Als je vanuit een punt op de lijn met vergelijking $(x-3)^2+(y-2)^2-3=x^2+(y-5)^2-4$ raaklijnen aan de cirkels tekent, dan liggen de raakpunten even ver van dat punt.

4 Gegeven de cirkel $x^2+y^2=50$ en het punt $P(50,0)$ buiten de cirkel. Vanuit P worden de raaklijnen aan de cirkel getekend. Eén van de raakpunten noemen we R.
a. Bereken PR exact.

Met behulp van **a** kun je de coördinaten van R berekenen door twee cirkels met elkaar te snijden.
b. Doe dat.

R ligt ook op de cirkel met middellijn OP.
c. Leg dat uit en bereken de coördinaten van R door de cirkel met middellijn OP te snijden met de cirkel $x^2+y^2=50$.

5 Een ellips heeft heeft zijn lange as op de lijn $x=3$ en de korte as op de lijn $y=2$. De lange as is 10 lang en de korte 5.
a. Geef een vergelijking van de ellips en laat zien dat de ellips door de oorsprong $O(0,0)$ gaat.

De ellips kun je krijgen door een zekere cirkel ten opzichte van de y-as te vermenigvuldigen.
b. Geef een vergelijking van die cirkel.
c. Geef een vergelijking van de raaklijn in O aan de cirkel uit **b**.
d. Geef een vergelijking van de raaklijn in O aan de ellips met behulp van **c**.

6 Voor elke waarde van $a > 0$ en $b > 0$, stelt E: $x^2 + by^2 = a$ een ellips voor met zijn assen op de coördinaatassen.

Neem bijvoorbeeld $a = 15$ en $b = 3$.

a. Bereken de coördinaten van de snijpunten van E met de coördinaatassen.

b. Geef de lengte van de assen.

c. Geef een vergelijking van de cirkel die je moet vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as om de ellips te krijgen. Met welke factor moet je de cirkel vermenigvuldigen?

d. Druk de lengte van de assen van de ellips uit in a en b.

7 Gegeven de cirkel $x^2 + y^2 = 13$ en het punt $A(a, \sqrt{13 - a^2})$.

a. Voor welke waarden van a is A gedefinieerd?

b. Ga na dat A op de cirkel ligt.

c. Geef een vergelijking van de raaklijn in A aan de cirkel.

d. Maak een animatie met Winplot. Teken daarvoor de cirkel en de raaklijn in A en varieer a.

e. Je krijgt alleen raaklijnen aan de bovenkant van de cirkel. Waarom?

8 Teken in Winplot met 'anim' cirkels die de lijnen $y = x$ en $y = -x$ raken.
Je kunt cirkels tekenen die van boven naar beneden gaan, of van links naar rechts. Het kan ook tegelijkertijd.
Je kunt ook nog de cirkels in de ene richting van klein naar groot laten gaan en in de andere van groot naar klein.
Of nog iets anders verzinnen.
Schrijf op wat je gedaan hebt.

9 Gegeven de parabool $y = p(x - a)^2 + b$, voor alle mogelijke waarden p, a en b, ($p \neq 0$).

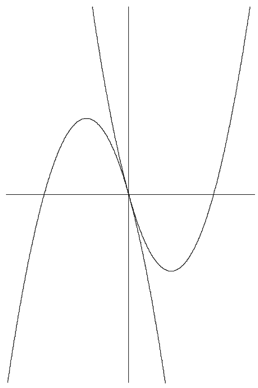
a. Druk de coördinaten van de top uit in a en b.

b. Druk de coördinaten van het brandpunt uit in a, b en p. Ga na of je formule ook klopt als $p < 0$.

c. Geef een vergelijking van de richtlijn uitgedrukt in a, b en p.

10 Gegeven de parabolen met vergelijking $y=(x-a)^2-a^2$, waarbij a alle mogelijke waarden aan kan nemen.
a. Laat zien dat elke parabool door $O(0,0)$ gaat.

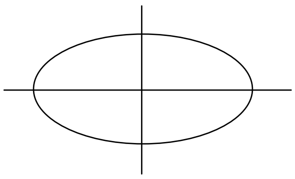
We gaan een vergelijking van de raaklijn in $O(0,0)$ aan de parabool opstellen.
Het brandpunt van de parabool is $(a,-a^2+\frac{1}{4})$ en het voetpunt van O is $(0,-a^2-\frac{1}{4})$.
b. Toon dat aan.
c. Laat zien dat daaruit volgt dat $y=-2ax$ een vergelijking van de raaklijn in O aan de parabool is.



d. Door welke punten van het vlak gaat geen enkele van deze parabolen? Bewijs je antwoord.
(Met Winplot kun je een idee krijgen van het antwoord op deze moeilijke vraag.)
e. Geef een vergelijking van het spiegelbeeld van de parabool $y=(x-a)^2-a^2$ in O.

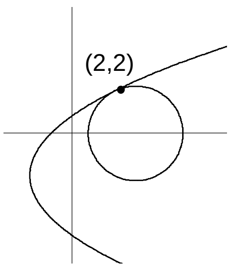
Met Winplot kun je de parabool met zijn spiegelbeeld langs elkaar laten glijden via 'anim'.

11 Punten met rationale coördinaten op een ellips
Je kent vast wel enkele rijtjes positieve gehele getallen a,b,c met $a^2+b^2=c^2$, de zogenaamde pythagoreïsche drietallen, bijvoorbeeld 3,4,5 en 5,12,13. Hiermee kun je punten met rationale coördinaten op een ellips vinden.



We nemen bijvoorbeeld de ellips $x^2+4y^2=36$.
Deze vind je door een cirkel C ten opzichte van de x-as te vermenigvuldigen.
a. Omschrijf C.

Het punt (3,4) ligt op de cirkel met middelpunt O en straal 5.
b. Welk punt van C levert dit op als je ten opzichte van O met de juiste factor vermenigvuldigt? Ga na dat dit uiteindelijk het punt $(\frac{18}{5},\frac{12}{5})$ van de ellips oplevert.
c. Gebruik het drietal 5,12,13 om een punt met rationale coördinaten van de ellips te bepalen.



12 Gegeven de parabool met vergelijking $y^2+4y=4x+4$.
a. Bepaal de coördinaten van de top en het brandpunt van de parabool.
b. Geef een vergelijking van de raaklijn in (2,2) aan de parabool.
c. Geef een vergelijking van de cirkel met middelpunt op de x-as die de parabool raakt in (2,2), dat wil zeggen: in (2,2) dezelfde raaklijn heeft als de parabool.

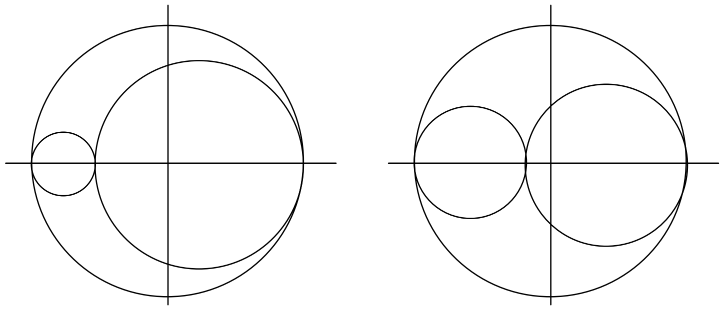
13 Gegeven $A(3,4)$ en $B(1,0)$.

a. Toon aan dat een cirkel die de halve lijn OA en de halve lijn OB raakt, middelpunt $(2a,a)$ voor een zeker getal a heeft.

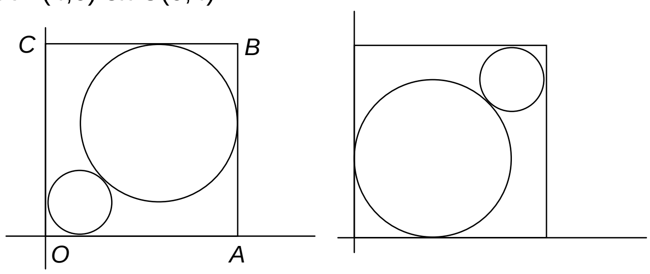
b. Geef een vergelijking van zo'n cirkel met de parameter a en controleer **a** met Winplot.

c. Bereken a als de cirkel ook de lijn $3x+4y=60$ raakt.

14 Maak een animatie met Winplot: twee cirkels met middelpunt op de x-as binnen de cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 8. De twee kleine cirkels variëren en raken elkaar uitwendig. Beide kleine cirkels raken de grote cirkel inwendig.



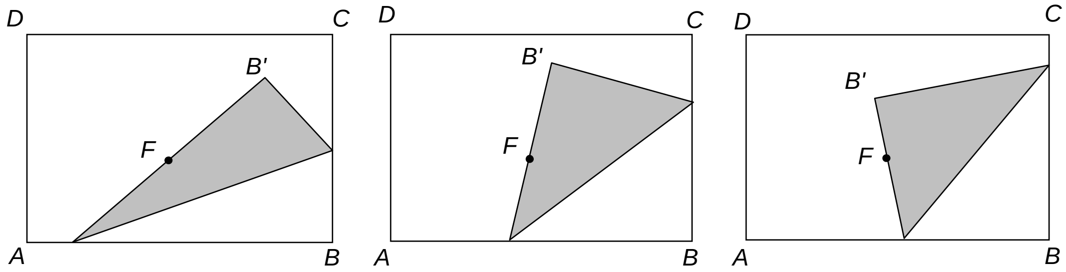
15 Maak een animatie met Winplot.
$A=(4,0)$ en $C(0,4)$.

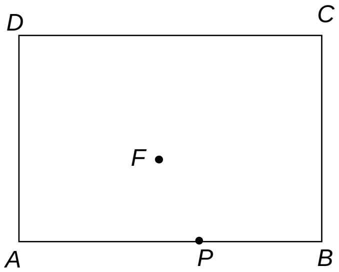


Twee variabele cirkels met middelpunt op de diagonaal OB binnen vierkant $ABCO$. De cirkels raken elkaar. De cirkels raken elk twee zijden van het vierkant en ze raken elkaar.

* **16 Een parabool vouwen**

ABCD is een rechthoekig vel papier met daarop een punt *F*. We vouwen de hoek bij *B* zo om dat de rand *AB* door *F* gaat. Dat kan op allerlei manieren. Hieronder staan drie voorbeelden.





De vouwlijn noemen we *PQ*, met *P* op *AB* en *Q* op *BC*. De plaats van *B* na het vouwen noemen we *B*'.
Hiernaast is op de rand *AB* een punt *P* gekozen.
a. Bepaal op het werkblad zonder te vouwen het bijbehorende punt *Q*. Licht je werkwijze toe.

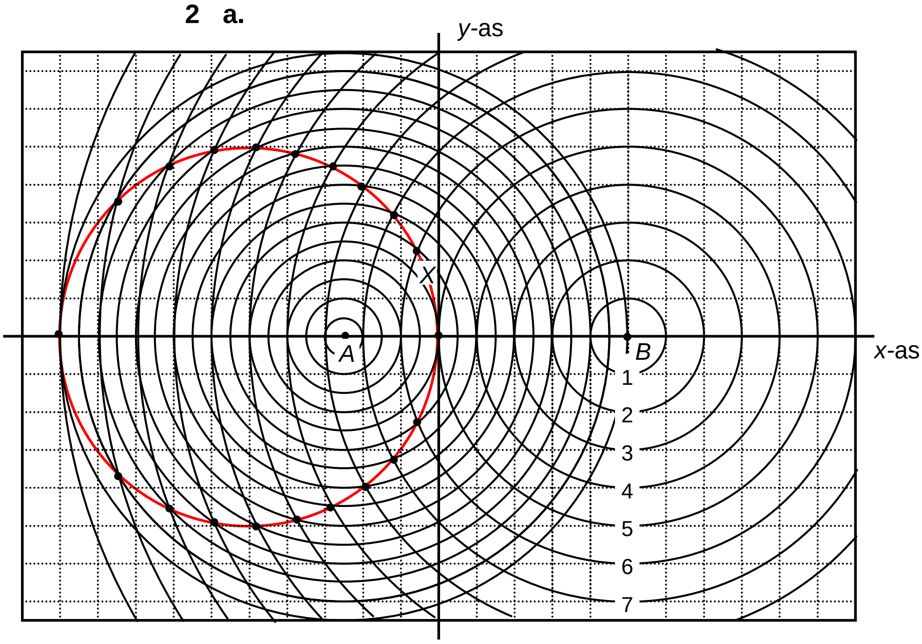
b. Neem een vel papier en zet er een stip *F* op. Vouw een aantal lijnen.
De vouwlijnen die je krijgt door *P* te variëren vormen het buitengebied van de parabool *p* met als richtlijn de onderkant *r* van het vel papier en brandpunt *F*. Zo'n vouwlijn raakt de parabool.
Dat kun je als volgt inzien. In **a** heb je (waarschijnlijk) gebruikt dat de vouwlijn *PQ* bissectrice is van een hoek tussen de lijnen *FP* en *r*.
c. Zoek een punt *R* op lijn *PQ* dat even ver van *r* als van *F* ligt. Noem het bijbehorende voetpunt *V*.
Dus is lijn *PQ* middelloodlijn van *FV*, dus raaklijn aan de parabool.

Elke raaklijn aan de parabool kun je krijgen door als boven te vouwen (als het papier maar breed genoeg is).
Naar: Examen wiskunde B12, 2008, tijdvak I

We kiezen een assenstelsel zó, dat de parabool vergelijking $4y = x^2$ krijgt.
d. Maak een animatie met Winplot waarbij raaklijnen langs de parabool 'glijden'. Teken er ook de richtlijn en het brandpunt bij.
Schrijf op wat je gedaan hebt.
e. Welk is het bij $P(-1\frac{1}{2},-1)$ horend raakpunt op de parabool?
Geef een vergelijking van de raaklijn die je krijgt door voor *P* het punt $(-1\frac{1}{2},-1)$ te nemen.

Antwoorden

2 **a.**



b. Middelpunt (-5,0) en straal 5.
c. Kwadraat van de afstand tot (5,0) =
$(10-2\sqrt{3})^2+\sqrt{13}^2=125-40\sqrt{3}$ en
kwadraat van de afstand tot $(-2\frac{1}{2},0)$ =
$(-2\frac{1}{2}+2\sqrt{3})^2+\sqrt{13}^2=31\frac{1}{4}-10\sqrt{3}$, dus $XB=2\cdot XA$.
Kwadraat van de afstand tot (-5,0) = 25.
Klopt.

3 **a.** $\sqrt{(7--3)^2+(5--2)^2}=\sqrt{149}$
b. $x-3$, $5-y$
c. $-3-x$, $y-5$
d. $a-x$, $b-y$
e. Een getal en zijn tegengestelde hebben hetzelfde kwadraat.

4 **a.** $(x-2)^2+(y+4)^2=13$
b. $(x+1)^2+(y-3)^2=10$
c. $(x+5)^2+(y-5)^2=25$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$,
$(x+5)^2+(y+5)^2=25$, $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

5 (1,8), (4,7), (7,4), (8,1), (-1,8), (-4,7), (-7,4), (-1,-8), (-4,-7), (-7,-4), (-8,-1), (1,-8), (4,-7), (7,-4), (8,-1)

6 **b.** middelpunt (-3,2), straal 1
c. middelpunt (-6,4), straal $4\sqrt{5}$

d. middelpunt $(6\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$, straal $\frac{1}{2}\sqrt{194}$
e. middelpunt (0,0), straal $2\sqrt{2}$

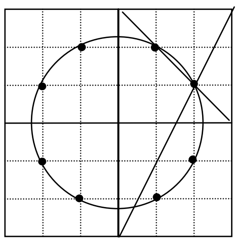
7 **a.** middelpunt $(a,2a)$, straal $|a|\sqrt{5}$
b. Het middelpunt ligt op de lijn met pv $(t,2t)$. Een vergelijking is: $y=2x$.

8 middelloodlijn OA: $x=2$; middelloodlijn OB: $2x+y=7\frac{1}{2}$, snijpunt $(2,3\frac{1}{2})$ is het middelpunt.
Vergelijking $(x-2)^2+(y-3\frac{1}{2})^2=16\frac{1}{4}$

9 **a.** (5,5) in de vergelijking invullen geeft:
$25+25-10a-50=0$, dus $a=0$;
(2,10) invullen geeft: $a=1$; (0,5) invullen geeft geen oplossing voor a.
b. Kwadraatafsplitsen geeft: $(x-a)^2+(y-5)^2=a^2+25$, dus $a^2=50$, dus $a=\pm 5\sqrt{2}$.
c. Teken maar enkele cirkels, dan zie je dat dit punt (0,10) is.
Het kan ook zo: aan de vorm van de vergelijking zie je dat $a=0$, dus $y^2-10y=0$, dus $y=0$ of $y=10$.

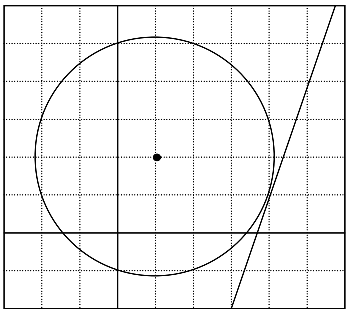
10 ligt aan xy ; het kwadraat bij x ontbreekt
geen kwadraat, maar vierde macht ; geen enkel punt
cirkel met middelpunt O, straal $\sqrt[4]{10}$; $2\neq 3$
- in plaats van + ; alleen O voldoet (cirkel met straal 0)

11 **a.**



b. $(1+t)^2+(-1+2t)^2=5 \Leftrightarrow 5t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ of $t=-\frac{3}{5}$
Geeft (2,1) en $(\frac{2}{5},-2\frac{1}{5})$ als snijpunten.
c. $y=3-x$ invullen geeft: $x^2+(3-x)^2=5 \Leftrightarrow x=1$ of $x=2$.
De snijpunten zijn (1,2) en (2,1).

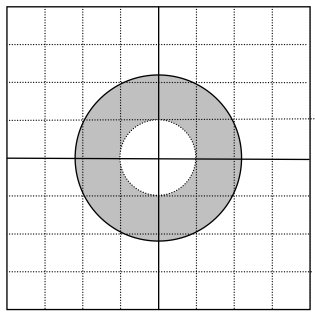
12 **a.** $(x-3)^2+(y-1)^2=9$
b. Voor $x=1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}y$ invullen geeft:
$(-1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}y)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow y=1$ of $y=-\frac{23}{13}$.
De snijpunten zijn (0,1) en $(\frac{54}{13},-\frac{23}{13})$

13 a. 

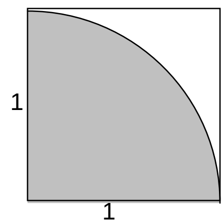
b. $y = 3x - 11$ invullen geeft: $(x-1)^2 + (3x-13)^2 = 10 \Leftrightarrow$
$10x^2 - 80x + 160 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$
Deze vergelijking heeft maar één oplossing.

14 a. $3x + 2y = 10$
b. Het is de lijn door de snijpunten van de twee cirkels.
c. $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ invullen in een van beide cirkel-vergelijkingen geeft: $(x-2)^2 + (-1\frac{1}{2}x + 3)^2 - 13 = 0$.
De oplossingen van deze vergelijking zijn: $x = 0$ en $x = 4$.
De snijpunten zijn (0,5) en (4,-1).

15 a. De binnenrand van het grijze hoort er niet bij, de buitenrand wel.
b. $x^2 + y^2 \le 1$ en $-y \le x \le y$.



16 Dat is $\frac{\text{oppervlakte kwartcirkel}}{\text{oppervlakte vierkant}} = \frac{1}{4}\pi$



17 eerste deel: $(x-1)^2 + y^2 = 2$ en $0 \le x \le 2$
tweede deel: $(x-2)^2 + y^2 = 1$ en $2 \le x \le 3$
derde deel: $(x-4)^2 + y^2 = 1$ en $3 \le x \le 4$

18 $4((x-2\frac{1}{2})^2 + y^2) = (x-5)^2 + y^2 \Leftrightarrow$
$4x^2 + 20x + 25 + 4y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 \Leftrightarrow$
$x^2 + 10x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 + y^2 = 25$
Het middelpunt is (-5,0) en de straal is 5.

Paragraaf 2 Raaklijnen aan de cirkel

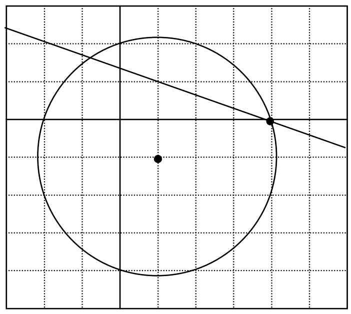
1 **a.** Het kortste verbindingslijnstuk van een punt met een lijn staat loodrecht op die lijn; elk ander verbindingslijnstuk is langer.
b. Zie **a**.

2 $3x+4y=25$

3 **a.** $\overrightarrow{PM}=(1,\text{-}2)$ is normaalvector, dus een vergelijking is: $x-2y=a$. P ligt op de lijn, dus een vergelijking: $x-2y=\text{-}1$.
b. $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

4 **a.** $a=0$, $a=7$ en $a=8$
b. $x^2+x^2=25 \Leftrightarrow x=2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x=\text{-}2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Snijpunten zijn $(2\frac{1}{2}\sqrt{2},\text{-}2\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(\text{-}2\frac{1}{2}\sqrt{2},2\frac{1}{2}\sqrt{2})$
c. $x^2+(7-x)^2=25 \Leftrightarrow 2x^2-14x+24=0 \Leftrightarrow$
$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x=3$ of $x=4$. De snijpunten zijn (3,4) en (4,3).
d. Zie **b**, $x=y=2\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $a=5\sqrt{2}$.
e. $a=\text{-}5\sqrt{2}$

5 **a.**



b. Als R raakpunt is, dan is $\overrightarrow{MR}\perp k$, dus is $\overrightarrow{MR}$ een veelvoud van een normaalvector van k dus van (1,3).
Omdat de lengte van de vector (1,3) gelijk is aan de straal van de cirkel, zijn de raakpunten:
$(1+1,\text{-}1+3)=(2,2)$ en $(1-1,\text{-}1-3)=(0,\text{-}4)$.

6 **a.** Die is gelijk aan de straal.
b. De afstandsformule is gebruikt om de afstand van het middelpunt tot de lijn gelijk aan de straal ($=4$) te maken.
c. Dan $|\text{-}2-a|=4\sqrt{5}$, dus $a=\text{-}2+4\sqrt{5}$ en $a=\text{-}2-4\sqrt{5}$.

7 Straal $=\dfrac{|3\cdot -2-4\cdot 2-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\text{-}5\frac{1}{5}$

8 Een vergelijking van zo'n lijn is $2x - y = a$. De afstand van (1,3) tot die lijn moet $\sqrt{10}$ zijn, dus:

$\dfrac{|2 \cdot 1 - 3 - a|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow$ $|\text{-}1 - a| = 5\sqrt{2}$, dus $a = \text{-}1 + 5\sqrt{2}$ of $a = \text{-}1 - 5\sqrt{2}$.

Dus de lijnen $2x - y = \text{-}1 + 5\sqrt{2}$ en $x - y = \text{-}1 - 5\sqrt{2}$.

9 Het middelpunt van de cirkel is (1,-3), dus een normaalvector van de lijn is $(3 - 1, 1 - \text{-}3) = (2,4)$.
Een vergelijking is dus $x + 2y = a$, voor zekere a. (3,1) ligt op de lijn dus een vergelijking is: $x + 2y = 5$.

10 a. $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0)$ is normaalvector van de lijn.
b. Omdat P op de cirkel ligt geldt: $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = r^2$,
dus $r^2 = a$.

11 b. $6x - y = 37$

12 a. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 =$
$x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = x^2 + y^2 + r^2 - 2r^2 = x^2 + y^2 - r^2$
b. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq 0$ en $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x,y) = (x_0, y_0)$.
Dus $x^2 + y^2 > r^2$, tenzij $(x,y) = (x_0, y_0)$. Dus ligt (x,y) buiten de cirkel, tenzij (x,y) het raakpunt op de cirkel is.

13 Gegeven de cirkel met middelpunt $M(a,b)$ en straal r met vergelijking: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en een punt $P(x_0, y_0)$ op de cirkel. Een vergelijking van de lijn door P loodrecht op MP is: $\overrightarrow{MP} \cdot (\vec{p} - \vec{x}) = 0$, met $\vec{x} = (x,y)$.

a. $\overrightarrow{MP} = (x_0 - a, y_0 - b)$
b. $\overrightarrow{MP} \cdot (\vec{p} - \vec{x}) = (x_0 - a)(x_0 - x) + (y_0 - b)(y_0 - y) = 0$.
c. $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$.
$(x_0 - a)(x_0 - x) + (y_0 - b)(y_0 - y) =$
$x_0^2 - ax_0 - xx_0 + ax + y_0^2 - by_0 - yy_0 + by$ en
$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) =$
$xx_0 - ax_0 - ax + a^2 + yy_0 - by_0 - by + b^2$
De som van de twee uitdrukkingen is:
$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$.

14 Het middelpunt van de cirkel ligt op de middelloodlijn van PQ, dus op de lijn $x = 4$. Omdat de cirkel de y-as raakt is de straal 4. Het middelpunt is dus $M(4,a)$, waarbij de afstand van M tot $P(2,0)$ gelijk aan 4 is, dus $2^2 + a^2 = 4^2$, dus $a = 2\sqrt{3}$ of $a = \text{-}2\sqrt{3}$.

15 De lengte van vector (5,12) is 13, dus (13,0) + (5,12) = (18,12) is een vector die de hoek tussen lijn *OA* en de *x*-as middendoor deelt. Het middelpunt van de cirkel ligt op de lijn met pv $(3t,2t)$ of op de lijn door *O* daar loodrecht op, dus met pv $(-2t,3t)$. De straal is de afstand tot de *x*-as. Als het middelpunt $(3t,2t)$ is, dan $t=2\frac{1}{2}$ of $t=-2\frac{1}{2}$. Je krijgt de cirkels $(x-7\frac{1}{2})^2+(y-5)^2=25$ en $(x+7\frac{1}{2})^2+(y+5)^2=25$. Als het middelpunt $(-2t,3t)$ is, dan $t=1\frac{2}{3}$ of $t=-1\frac{2}{3}$. Je krijgt de cirkels $(x+3\frac{1}{3})^2+(y-5)^2=25$ en $(x-3\frac{1}{3})^2+(y+5)^2=25$.

16 a. De bissectrice van hoek *AOB* heeft pv (t,t).
De vector $\overrightarrow{AB}=(-6,8)$ heeft lengte 10, dus een vector die hoek *OAB* doormidden deelt is $(-5,0)+(-3,4)=(-8,4)$.
Een pv van de bissectrice van hoek *OAB* is:
$(x,y)=(6,0)+s(-2,1)=(6-2s,s)$
b. Het snijpunt van de twee bissectrices uit **a** heeft gelijke *x*- en *y*-coördinaat , dus $6-2s=s$, dus $s=2$.
c. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

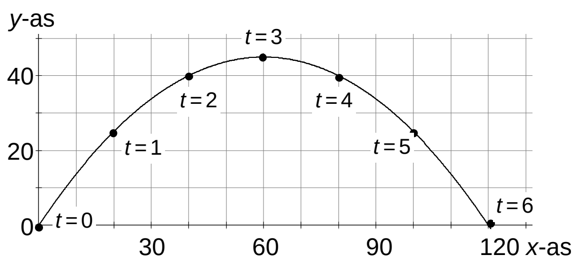
17 a. Dat is de lijn door *P* loodrecht op *k*, dus pv:
$(x,y)=(4,2)+t(-1,2)=(4-t,2+2t)$.
b. Noem het middelpunt van de cirkel $M(4-t,2+2t)$. De cirkel raakt de *y*-as, dus de straal $=4-t$ of $t-4$. De straal is ook *PM*, dus $(t-4)^2=(4-t-4)^2+(2+2t-2)^2=5t^2$.
Dus $t=\sqrt{5}+1$ of $t=\sqrt{5}-1$.
Vergelijking: $(x-3+\sqrt{5})^2+(y-4-2\sqrt{5})^2=(3-\sqrt{5})^2$ of
$(x-5+\sqrt{5})^2+(y-2\sqrt{5})^2=(5-\sqrt{5})^2$

Paragraaf 3 Parabolen

1 a.

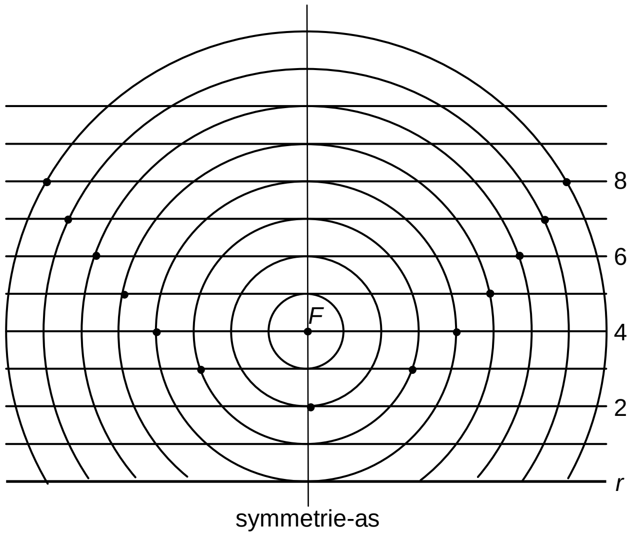
t	0	1	2	3	4	5	6
x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	25	40	45	40	25	0

b.

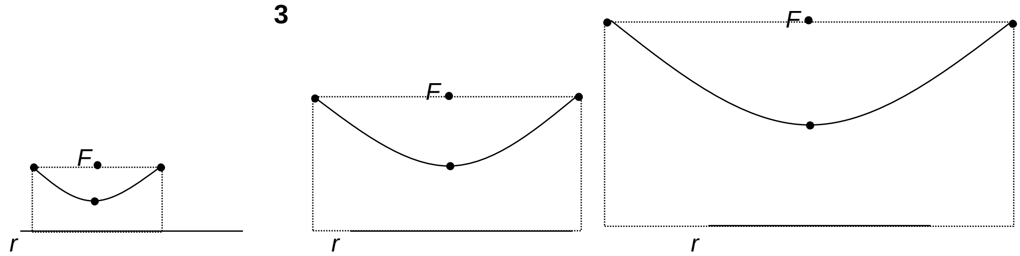


c. $y=p(x-60)^2+45$, gaat door (0,0), dus $3600p=45$, dus $p=\frac{1}{80}$, vergelijking $y=\frac{1}{80}(x-60)^2+45$
d. $t=\frac{1}{20}x$ invullen in $y=30t-5t^2$ geeft: $y=1\frac{1}{2}x-\frac{1}{80}x^2$.

2



3



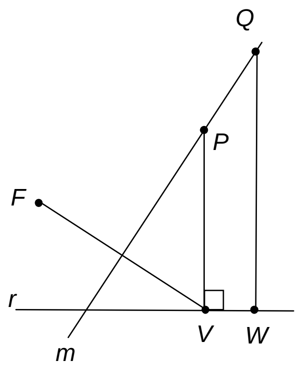
4 **a.** $AF = 2$ en afstand tot $r = 2$; $BF = 5$ en afstand tot $r = 5$; $CF = 10$ en afstand tot $r = 10$.
b. Noem dat punt (a,5), met $a > 0$, dan is de afstand tot de y-as a en de afstand tot F is $\sqrt{(a-2)^2 + 25}$.
$(a-2)^2 + 25 = a^2 \Leftrightarrow -4a + 29 = 0 \Leftrightarrow a = 7\frac{1}{4}$.
Dus het punt is $(7\frac{1}{4},5)$.

5 **a.** $y + 2$
b. De afstand van P tot F is: $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$.
c. Kwadrateren geeft: $x^2 + (y-2)^2 = (y+2)^2$; haakjes wegwerken geeft: $x^2 = 4y$.

6 **a.** $y + c$
b. $\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$
c. Kwadrateren: $x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4cy$.

7 **a.** Vergelijking $x^2 = 4cy$. Het punt (2,6) voldoet aan de vergelijking, dus $c = \frac{1}{6}$. Dus $F = (0,\frac{1}{6})$ en r is de lijn $y = -\frac{1}{6}$.
b. Deze parabool is het spiegelbeeld van die uit **a** in de x-as, dus: $F = (0,-\frac{1}{6})$ en r heeft vergelijking $y = \frac{1}{6}$.

Paragraaf 4 Raaklijnen aan parabolen



1 m is de middelloodlijn van FV. Q ligt op m en W is de loodrechte projectie van Q op m.
a. $FQ = QW$, want m is de middelloodlijn van FV.
$QW < QV$, want het kortste verbindingslijnstuk van Q met r staat loodrecht op r.
b. Uit **a** volgt dat Q dichter bij r dan bij F ligt.
c. Zie de tekening hiernaast. Het verhaal blijft precies hetzelfde.

2 Het voetpunt van A noemen we V, dan $V = (0{,}2)$, dus $\overrightarrow{VF} = (2,-2)$ is normaalvector van de middelloodlijn van VF. Het midden van VF is: (1,1), dus middelloodlijn VF - dat is de raaklijn in A - heeft vergelijking $x - y = 0$.
Het voetpunt van B noemen we W, dan $W = (0{,}4)$, dus $\overrightarrow{WF} = (2,-4)$ is normaalvector van de middelloodlijn van WF. Het midden van WF is: (1,2), dus middelloodlijn WF - dat is de raaklijn in B - heeft vergelijking $x - 2y = -3$.

3 **a.** De bijbehorende waarde van $c = \frac{1}{2}$. Het brandpunt is $F = (\frac{1}{2},0)$ en de richtlijn r heeft vergelijking $x = -\frac{1}{2}$.
b. Het voetpunt V van $P(2,2)$ is $(-\frac{1}{2},2)$. $\overrightarrow{VF} = (1,-2)$. Het midden van VF is (0,1). Dus middelloodlijn VF - dat is de raaklijn in P - heeft vergelijking $x - 2y = -2$.

4 **a.** P ligt op de parabool.
b. $V = (x_P,-c)$ en $\overrightarrow{FV} = (x_P,-2c)$.
c. Het midden M van FV is $(\frac{1}{2}x_P,0)$. De coördinaten van M in $x_P x - 2c\,y = a$ invullen geeft: $\frac{1}{2}x_P{}^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 4cy_P = 2cy_P$.

5 **b.** In $x_P x = 2cy + 2cy_P$ moet je voor $c = \frac{1}{12}$, $x_P = -2$ en $y_P = 12$ invullen; dit geeft: $-2x = \frac{1}{6}y + 2$.

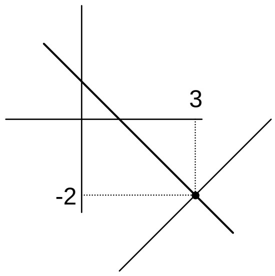
6 De punten met eigenschap (2) liggen buiten de parabool en met eigenschap (3) erbinnen.

7 **a.** $x^2 - 4cy = (x - x_P)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4cy = x^2 - 2x_P \cdot x + x_P{}^2 \Leftrightarrow$
$x^2 - 4cy = x^2 - 2(2cy + 2cy_P) + x_P{}^2 \Leftrightarrow$
$4cy - 4cy - 4cy_P + x_P{}^2 = 0$. En dat laatste klopt.
b. Voor een punt (x,y) op de lijn $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$ geldt dus: $x^2 - 4cy = (x - x_P)^2$, dus voor elk punt (behalve P zelf) op die lijn geldt: $x^2 - 4cy > 0$, dus elk punt van die lijn buiten P ligt buiten de parabool (zie ook opgave **6**).

8 **a.** $4x = 2y + 8$ is een vergelijking van de raaklijn.
b. Snijpunt met de x-as is (2,0) en met de y-as: (0,-4).
c. $6x = 2y + 18$
d. Met de x-as: (3,0) en met de y-as: (0,-9)

9 Vergelijking raaklijn in $P(x_P,y_P)$ is $x_P \cdot x = 2cy + 2cy_P$.
Snijpunt met de y-as: $0 = 2cy + 2cy_P \Leftrightarrow y = -y_P$, dus het snijpunt met de y-as is $(0,-y_P)$.
Snijpunt met de x-as: $x_P \cdot x = 2cy_P \Leftrightarrow x_P \cdot x = \frac{1}{2}{x_P}^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}x_P$, dus snijpunt met de x-as is $(\frac{1}{2}x_P,0)$.

Paragraaf 5 Schuiven en rekken



1 **a.** $x = y$ of $x = -y$.
b. $x - 3 = y + 2$ of $-x + 3 = y + 2$
c. Zie hiernaast
d. Over (3,-2)
e. $|x - 2| = |y - 1|$

2 **a.** Bij (1,10) hoort (4,8) en dat voldoet aan $y^2 = x^3$.
Bij (1,-6) hoort (4,-8) en dat voldoet ook aan $y^2 = x^3$.
b. (100,1000)
c. $(q - 2)^2 = (p + 3)^3$
d. $(y - 2)^2 = (x + 3)^3$
e. $(y + 1)^2 = (x - 3)^3$

3 **a.** De cirkel met middelpunt O en straal r heeft vergelijking $x^2 + y^2 = r^2$. Verschuif je die over (a,b), dan krijg je de cirkel met middelpunt (a,b) en straal r. Als je in de oorspronkelijke vergelijking x vervangt door $x - a$ en y door $y - b$ dan krijg je $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en dat is inderdaad een vergelijking voor de cirkel met middelpunt (a,b) en straal r.
b. $(x - a)^2 = y - b$ kun je schrijven als $y = (x - a)^2 + b$ en dit is een parabool met top (a,b).

4 **a.** $2x + 3y = 13$
b. Bij verschuiven over (-4,4) komt (3,1) in (-1,5), dus schuift k naar m.
c. $2(x + 4) + 3(y - 4) = 9 \Leftrightarrow 2x + 8 + 3y - 12 = 9 \Leftrightarrow$
$2x + 3y = 13$ klopt.

5 **a.** Dit is de parabool van opgave **5** van paragraaf **3**.
b. Over (1,0)
c. $y^2 = 4x$ heeft brandpunt (1,0) en richtlijn $y = -1$. Als je die verschuift over (1,0) krijg je brandpunt en richtlijn van de parabool $y^2 = 4x - 4$, dus (2,0) en $y = 0$.
d. $6y = 2(x - 1) + 18 \Leftrightarrow 6y = 2x + 16$ is de gevraagde vergelijking.
e. Het voetpunt V van (10,6) is (0,6). $\overrightarrow{FV} = (-2,6)$, met $F = (2,0)$ en het midden van FV is (1,3), dus een vergelijking van de raaklijn is: $-x + 3y = -1 + 3 \cdot 3 = 8$.

f. Het voetpunt W bij (5,-4) is (0,-4) en $\overrightarrow{FW} = (3,-4)$. Het midden van FW is (1,-2), dus een vergelijking van de raaklijn is: $3x - 4y = 3 \cdot 1 - 4 \cdot -2 = 11$.

6 **a.** $(x_P - a)x = 2c(y_P - b) + 2cy$
b. De raaklijn in **a** moet teruggeschoven worden over de vector (a,b).

7 **a.** (2,-3), (2,3), (-2,3), (a,-b)
b. (-a,b), (b,a), (-b,-a)

8 **a.** $4y = x^2$
b. $4(y-2) = (x-1)^2$
c. Dan moet (-5,11) aan de vergelijking uit **b** voldoen.
d. $4(x-2) = (y-1)^2$
e. y vervangen door x in $4(y-2) = (x-1)^2$ geeft:
$4x - 8 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
Klopt.

9 **a.** Als (x,y) voldoet, dan ook (x,-y) (vanwege het kwadraat).
b. $x^2 = y^3$
c. $(x-1)^2 = (y+2)^3$

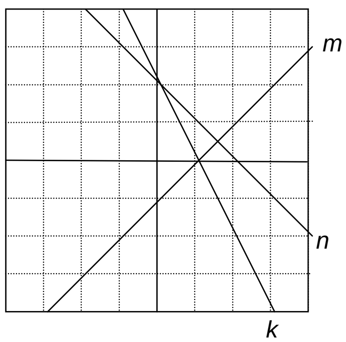
10 **a.** y vervangen door -y.
b. x vervangen door -x.

11 **a.** (-3a,b), (pa,b)
b. (a,pb)
c. (pa,pb)

12 **a.** Dan moet (12/3,-8) op de originele grafiek liggen, respectievelijk (300/3,1000).
b. ($\frac{1}{3}a$,b)

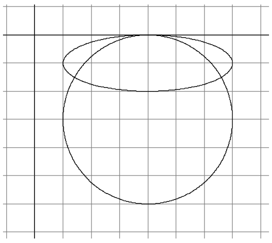
13 **a.** Dan moet $(4, 2 \cdot -4)$ op het origineel liggen, respectievelijk $(100, 2 \cdot 500)$.
b. (a,2b)

14 **a.**



b. m: $2x + \text{-}2 \cdot y = 2 \Leftrightarrow x - y = 1$ en
n: $2 \cdot \frac{1}{2}x + y = 2 \Leftrightarrow x + y = 2$

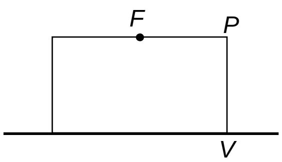
15 a. $x^2 + (2y)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 20$
b. Snijpunten met de x-as: $y = 0$ invullen, geeft $x^2 = 20 \Leftrightarrow$ $x = 2\sqrt{5}$ of $x = \text{-}2\sqrt{5}$, snijpunten: $(2\sqrt{5},0)$ en $(\text{-}2\sqrt{5},0)$.
Snijpunten met de y-as: $y = 0$ invullen, geeft $4y^2 = 20 \Leftrightarrow$ $y = \sqrt{5}$ of $y = \text{-}\sqrt{5}$, snijpunten $(0,\sqrt{5})$ en $(0,\text{-}\sqrt{5})$.
c. $2x + 4y = 20 \Leftrightarrow x + 2y = 10$
d. De lijn uit **b** met factor $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as vermenigvuldigen, je krijgt: $2x + 8y = 20 \Leftrightarrow x + 4y = 10$



16 b. Vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met $\frac{1}{3}$.
c. $x - 4 = 0$ en $3y + 3 = 0$, dus de lijnen $x = 4$ en $y = \text{-}1$.
d. De punten van de ellips op de verticale as vind je door $x = 4$ in de vergelijking in te vullen, dit geeft: $(3y + 3)^2 = 9$ $\Leftrightarrow y = 0$ of $y = \text{-}2$. De punten van de ellips op de verticale as zijn (3,0) en (3,-2), de lengte van die as is dus 2. Voor de punten op de horizontale as vul je $y = \text{-}1$ in, dan krijg je $(x - 4)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 7$ of $x = 1$, dus de punten op de horizontale as zijn (1,-1) en (7,-1). De lengte van de horizontale as is dus 6.

17 $(x - 3)^2 + (4y - 20)^2 = 100$ (dan is de lange as horizontaal);
$(4x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 100$ (dan is de korte as horizontaal)

18 a. Top: $O(0,0)$, symmetrie-as: $y = x$
b. $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
c. $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \dfrac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}}$, kwadrateren geeft:
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x + y + 2)^2$
d. $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$
f. Als je x en y in de formule verwisselt, verandert hij niet.
g. Noem dat punt P en het bijbehorende voetpunt V. Dan is de middelloodlijn van FV horizontaal dus de eerste coordinaat van $V = 1$, omdat V op r is $V = (1,\text{-}3)$. De middelloodlijn van FV is dan $y = \text{-}1$. P ligt hierop, en op de lijn door V loodrecht op r, dus P is (3,-1).



19 b. 2:1, want $PV = PF$
c. Formule wordt: $(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow x^2 = 2y$
d. Met $4c$.

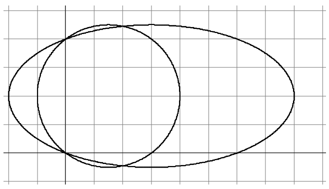
Paragraaf 7 Extra opgaven

1 **a.** $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$
d. $(9-a)^2+(2-a)^2=a^2 \Leftrightarrow 81-18a+a^2+4-4a+a^2=a^2$
$\Leftrightarrow a^2-22a+85=0 \Leftrightarrow a=5$ of $a=17$.

2 **a.** $(x,y)=(0,\sqrt{2})+(t,t)$.
b. $(x-t)^2+(y-t-\sqrt{2})^2=1$
c. Dan $t=1$ of $t=$-1, dus middelpunt $(1,1+\sqrt{2})$ of $(-1,\sqrt{2}-1)$

3 **a.** $y=x$
b. De lijn door de snijpunten van de cirkels.
c. $y=x$ in de vergelijking van een van de cirkels invullen geeft: $x^2+(x-5)^2=25 \Leftrightarrow 2x^2-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ of $x=5$.
De snijpunten zijn (0,0) en (5,5).
d. $3x+3y=7$
e. $(x-a)^2+(y-b)^2=MP^2$, en omdat hoek PRM recht is, geldt: $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=PM^2-r^2=PR^2$.

4 **a.** Stelling van Pythagoras: $PR^2=2500-50=2450$.
b. $(x-50)^2+y^2=2450$ (1) snijden met $x^2+y^2=50$ (2). Voor $y^2=50-x^2$ (uit 2) invullen in (1) geeft:
$(x-50)^2+50-x^2=2450 \Leftrightarrow x=1$. Dus de snijpunten zijn (1,7) en (1,-7).
c. Dat is de stelling van Thales.
$(x-25)^2+y^2=625$ snijden met $x^2+y^2=50$ geeft:
$(x-25)^2+50-x^2=625 \Leftrightarrow x=1$ en je vindt dezelfde snijpunten als in **b**.



5 **a.** $(x-3)^2+(2y-4)^2=25$, en (0,0) voldoet aan deze vergelijking.
b. De cirkel met vergelijking $(2x-3)^2+(2y-4)^2=25 \Leftrightarrow (x-1\frac{1}{2})^2+(y-2)^2=6\frac{1}{4}$ vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de y-as.
c. $1\frac{1}{2}x+2y=0 \Leftrightarrow 3x+4y=0$
d. De lijn uit **c** ten opzichte van de y-as met 2 vermenigvuldigen, geeft: $1\frac{1}{2}x+4y=0$.

6 **a.** Met de x-as: $(\sqrt{15},0)$, $(-\sqrt{15},0)$,
met de y-as: $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$
b. $2\sqrt{15}$ en $2\sqrt{5}$
c. $x^2+y^2=15$, met $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
d. $2\sqrt{a}$ en $2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

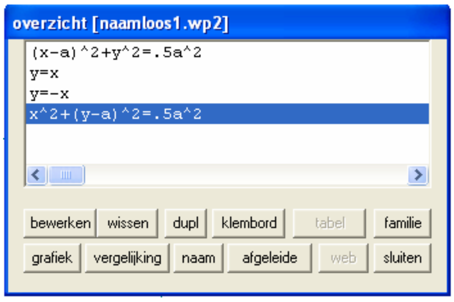
7 **a.** $-\sqrt{13} \leq a \leq \sqrt{13}$

b. $a^2 + (\sqrt{13 - a^2})^2 = 13$

c. $ax + \sqrt{13 - a^2}\, y = 13$

e. Het punt $(a, \sqrt{13 - a^2})$ ligt aan de bovenkant van de cirkel, want $\sqrt{13 - a^2} \geq 0$.

8 Eenvoudig:



Of: de laatste regel vervangen door:
x^2 + (y-1/a)^2 = .5(1/a)^2

9 **a.** Top (a,b)

b. $F = (a, b + \frac{1}{4p})$

c. $r: y = b - \frac{1}{4p}$

10 **a.** (0,0) voldoet.

b. De parabool krijg je door $y = x^2$ te verschuiven over de vector $(a,-a^2)$. De formule $y = x^2$ krijg je uit $4cy = x^2$ door $c = \frac{1}{4}$ te nemen. Het brandpunt $(0, \frac{1}{4})$ en de richtlijn $y = -\frac{1}{4}$ van de parabool $y = x^2$ moet je over $(a,-a^2)$ verschuiven om het brandpunt en de richlijn van $y = (x-a)^2 - a^2$ te krijgen.
Het voetpunt V van O is $(0,-a^2 - \frac{1}{4})$, want V ligt op de richtlijn en heeft dezelfde eerste coördinaat als O.

c. $\overrightarrow{FV} = (-a,-\frac{1}{2})$ en midden FV is $(\frac{1}{2}a,-a^2)$, dus een vergelijking van de raaklijn is $-ax - \frac{1}{2}y = -a \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \cdot -a^2 = 0$.

d. Als er bij gegeven x en y geen a te vinden is zó, dat $y = (x-a)^2 - a^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 2ax \Leftrightarrow y - x^2 = 2ax$. Die waarde van a is niet te vinden als $y - x^2 \neq 0$ en $2x = 0$.
Dus door alle punten van de y-as behalve de oorsprong (0,0) gaat geen enkele parabool.

e. $-y = (-x-a)^2 - a^2 \Leftrightarrow y = -(x+a)^2 + a^2$

11 **a.** De cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal 6.

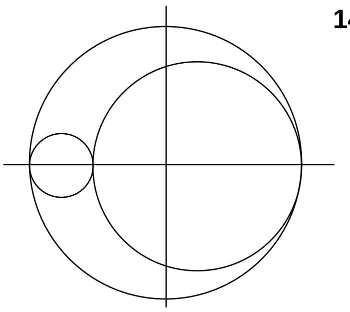
b. $(1\frac{1}{5} \cdot 3, 1\frac{1}{5} \cdot 4)$ van de cirkel, dit punt moet je ten opzichte van de x-as met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen, dit geeft:
$(1\frac{1}{5} \cdot 3, \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 4)$.

c. Het drietal 5,12,13 geeft het punt (5,12) op de cirkel met middelpunt O en straal 13 dus het punt $(\frac{6}{13} \cdot 5, \frac{6}{13} \cdot 12)$ op de cirkel met middelpunt O en straal 6.

Ueindelijk levert dit ($\frac{30}{13}$, $\frac{36}{13}$) op de ellips.

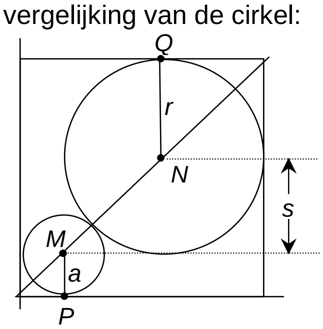
12 **a.** $y^2 + 4y = 4x + 4 \Leftrightarrow (y+2)^2 = 4(x+2)$,
dus de top is (-2,-2), het brandpunt F(-1,-2) en de richtlijn $x = -3$.
b. $x - 2y = -2$
c. Het middelpunt van de cirkel ligt op de lijn door (2,2) loodrecht op de raaklijn, dus op de lijn $2x + y = 6$. Het middelpunt is dus (3,0).
Een vergelijking is: $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

13 **a.** De vector (3,4) heeft lengte 5. Dus de vector $(3,4) + (5,0)$ is een richtingsvector van de bissectrice van hoek AOB.
b. $(x-2a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, (de straal van de cirkel is a, omdat de afstand van het middelpunt tot de x-as a is).
c. De afstand van $(2a,a)$ tot de lijn $3x + 4y = 60$ moet a zijn, dus: $\frac{|3a + 4a - 60|}{5} = a \Leftrightarrow 7a - 60 = 5a$ of $7a - 60 = -5a$
$\Leftrightarrow a = 30$ of $a = 5$



14 Zeg dat het middelpunt van de rechter cirkel $(a,0)$ is, dan is de straal van die cirkel $8 - a$, dus een vergelijking van de rechter cirkel is: $(x-a)^2 + y^2 = (8-a)^2$.
Noem de straal van de linker cirkel r, dan
$2r + 2(8-a) = 16$, dus $r = a$. De eerste coördinaat van het middelpunt van de linker cirkel is $a - (8-a) - a = 8 - a$.
Vergelijking van de linker cirkel is: $(x - 8 + a)^2 + y^2 = a^2$.
Voer de volgende vergelijkingen in:
$x^2 + y^2 = 64$; $(x-a)^2 + y^2 = (8-a)^2$; $(x - 8 + a)^2 + y^2 = a^2$.

15 Neem als middelpunt van de linker cirkel (a,a), dan is de straal van die cirkel a en een vergelijking van de cirkel:
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.
Verder zie plaatje.
Er geldt: $s + r + a = 4$.
$s = \frac{a+r}{\sqrt{2}}$, dus
$r = 8 - 4\sqrt{2} - a$. Het middelpunt van de rechter cirkel is $(s+a, s+a) =$
$(4\sqrt{2} - 4 + a, 4\sqrt{2} - 4 + a)$

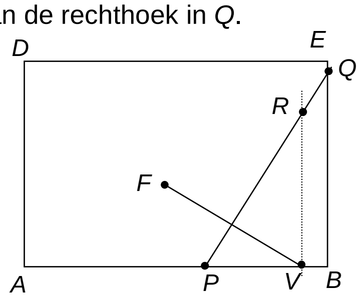


Een vergelijking van de rechter cirkel is:
$(x - 4\sqrt{2} - 4 + a)^2 + (y - 4\sqrt{2} - 4 + a)^2 = (8 - 4\sqrt{2} - a)^2$.
Invoeren:
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$;
$(x - 4\sqrt{2} - 4 + a)^2 + (y - 4\sqrt{2} - 4 + a)^2 = (8 - 4\sqrt{2} - a)^2$

Vergeet niet de vier zijden van het vierkant als vier lijnstukken in te voeren.

16 a. De bissectrice van hoek *FPB* snijdt de verticale zijde van de rechthoek in *Q*.

c.



Teken de bissectrice *PQ* van hoek *FPB*. Spiegel *F* in *PQ*. Het spiegelbeeld noemen we *V*. Dit is het voetpunt van het gezochte punt *R*, dus teken in *V* een loodlijn op zijde *AB*. Die snijdt *PQ* in *R*.

d. Voer in: $4y = x^2$ en $ax = 2y + \frac{1}{2}a^2$, dat is een vergelijking van de raaklijn aan de parabool in $(a, \frac{1}{4}a^2)$. Verder de richtlijn: $y = -1$ en het brandpunt $F(0,1)$.

e. *P* ligt op de raaklijn als $-1\frac{1}{2} \cdot a = -2 + \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow$
$a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4$ of $a = 1$.
Als $a = -4$, dan is het raakpunt $(-4,4)$ en een vergelijking van de raaklijn $-4x = 2y + 8$.
Als $a = 1$, dan is het raakpunt $(1, \frac{1}{4})$ en een vergelijking van de raaklijn $x = 2y + \frac{1}{2}$.