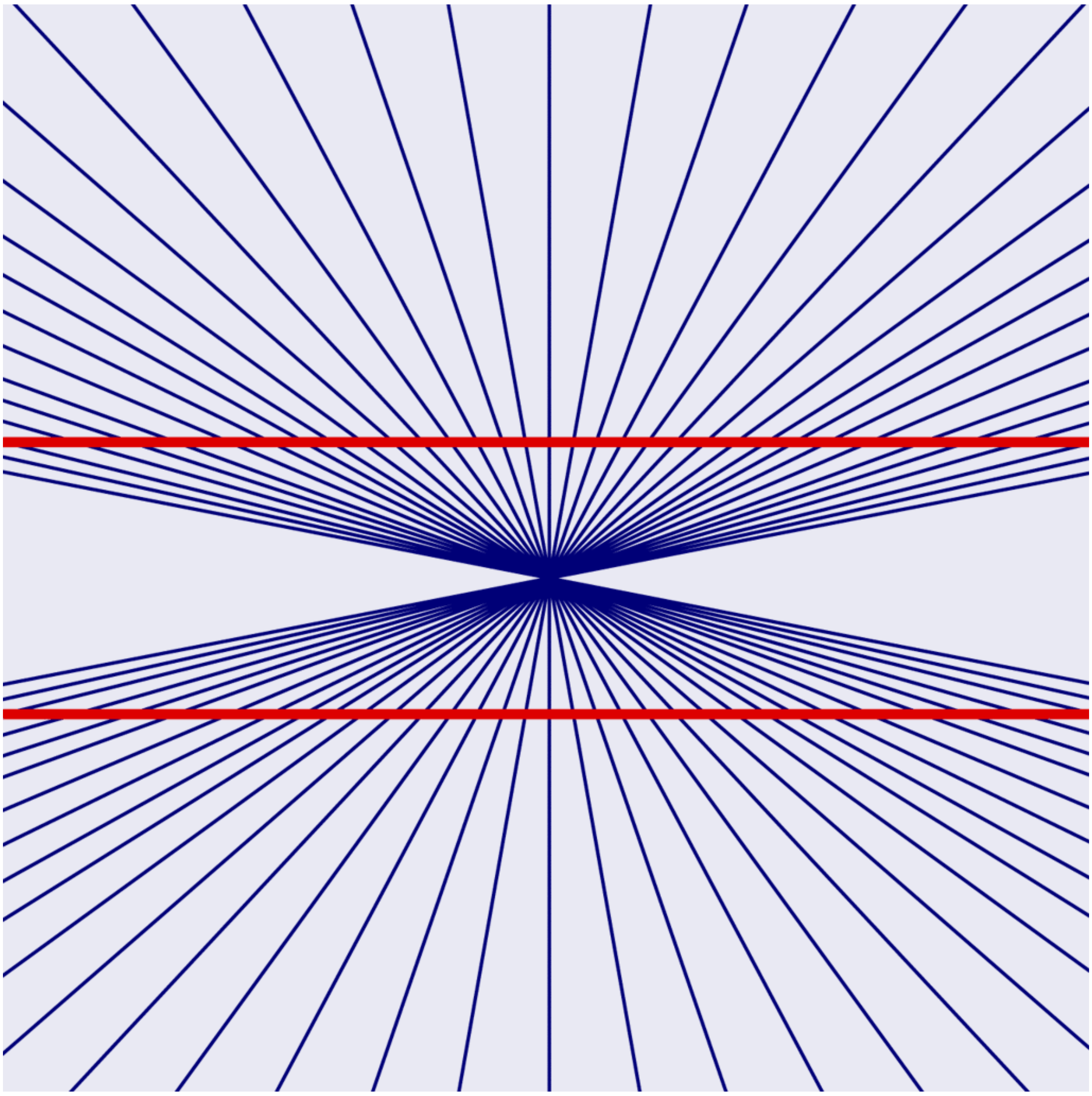
3 Rekenen aan lijnen



Dit is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten
Blok *Lijnen, richtingen en waaiers*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2014) wiskunde B vwo.

Opgaven met dit merkteken kun je zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

1	**Lijnen met inproduct**	**1**
2	**Het inproduct nader bekeken**	**11**
3	**Hoeken**	**14**
4	**Projecties**	**21**
5	**Antwoorden**	**25**

Eerste uitgave, april 2010

Colofon

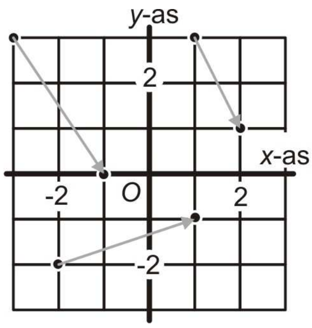
Auteurs: Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh,

Met medewerking van: Josephine Buskes, Richard Berends, Gert Dankers, Aad Goddijn, Sieb Kemme, Dick Klingens

Illustraties: Wilson Design, Uden

1 Lijnen met inproduct

Inproduct en loodrechte stand



1 **a.** Bepaal de lengte van de drie vectoren in het plaatje hiernaast. Laat wortels in je antwoord staan.
b. Hoe bereken je de lengte van de vector (a,b)?

De lengte van (a,b) is $\sqrt{a^2+b^2}$.

2 Gegeven zijn de punten $A(1,1)$, $B(6,6)$ en $C(0,-6)$.
a. Bereken: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ en $|\overrightarrow{CA}|$.
Ter herinnering: met $|\overrightarrow{AB}|$ wordt de lengte van vector $\overrightarrow{AB}$ bedoeld.

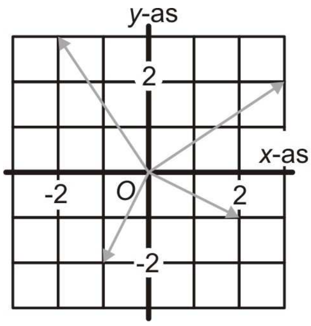
$\angle CAB = 125°$.
b. Hoe kun je met dit gegeven de andere hoeken van driehoek ABC berekenen?

De afstand van $A(a,b)$ en $P(p,q)$ is gelijk aan $|\overrightarrow{AP}|$.
Dus $AP = \sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$.

3 *Wat kun je van de kentallen van twee vectoren zeggen die loodrecht op elkaar staan?* Laten we eens als ene vector nemen: (2,3) en die vraag beantwoorden.
a. Zoek enkele vectoren (p,q) die loodrecht op (2,3) staan.
b. Bereken voor elk van die vectoren (p,q) wat $2p+3q$ is.

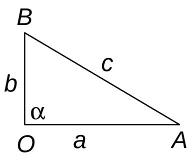
Opgave 3 geeft ons aanleiding om bij twee vectoren, zeg (a,b) en (p,q), te kijken naar de volgende uitdrukking:
$ap + bq$.

Definitie
We noemen $ap+bq$ het **inproduct** van de vectoren (a,b) en (p,q). We noteren het zó: $(a,b)\cdot(p,q)$.
Dus $(a,b)\cdot(p,q) = ap+bq$.

	**4** **a.** Ga na dat voor elke vector $\vec{v}$ geldt: $\vec{v} \cdot \vec{v}_L = 0$. **b.** Ga na: als $(3,2) \cdot (a,b) = 0$, dan is (a,b) een veelvoud van $(3,2)_L$. **c.** Ga na: als $(2,-1) \cdot (a,b) = 0$, dan is (a,b) een veelvoud van $(2,-1)_L$. ✂ **d.** Ga na dat voor elke vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ na: als $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, dan is $\vec{w}$ een veelvoud van $\vec{v}_L$.

Met $\vec{v} \perp \vec{w}$ bedoelen we: $\vec{v}$ staat loodrecht op $\vec{w}$.

Dus: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$ of $\vec{v} = \vec{0}$ of $\vec{w} = \vec{0}$.



✂ **5** **Een ander bewijs**
In klas 2 heb je gezien dat je de stelling van Pythagoras ook om kunt keren (zie plaatje):

als $a^2 + b^2 = c^2$, dan $\alpha = 90°$.

Zeg dat: $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $O = (0,0)$.

a. Toon aan:

α is recht $\Leftrightarrow (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$.

b. Toon aan dat uit **a** volgt:

α is recht $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

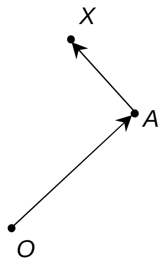
We zullen nog zien dat je met het inproduct niet alleen kunt zeggen dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan. Het blijkt dat we met het inproduct de hoek tussen vectoren kunt berekenen.

6 Gegeven zijn de punten $A(10,2)$, $B(-1,5)$ en $C(1,0)$. Geef een pv van de lijn door C loodrecht op lijn AB.
Tip. Een richtingsvector van die lijn staat loodrecht op $\overrightarrow{AB}$

7 Gegeven zijn de punten $A(-2,4)$ en $B(4,2)$.
a. Ga na dat elk punt van lijn AB van de vorm $(4+3t, 2-t)$ is.

We zoeken het punt $T(4+3t, 2-t)$ op lijn AB dat het dichtst bij $O(0,0)$ ligt.
Voor dat punt moet $\overrightarrow{OT}$ loodrecht op $\overrightarrow{AB}$ staan.
b. Bereken de coördinaten van T.
c. Wat is de afstand van O tot de lijn AB?

Vergelijking en normaalvector



8 Teken twee punten A en O zoals hiernaast. Voor het punt X in de tekening geldt: $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{OA}$.

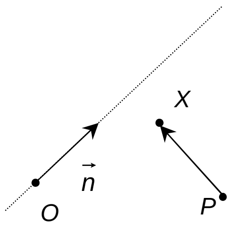
a. Teken nog meer punten X waarvoor geldt: $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{OA}$.
b. Wat krijg je als je alle punten X tekent met $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{OA}$?

We bekijken bovenstaande in een assenstelsel. Neem $A = (2,3)$ en $B = (2,\text{-}1)$.

c. Teken de punten X met $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{OA}$. De lijn die je krijgt noemen we k.

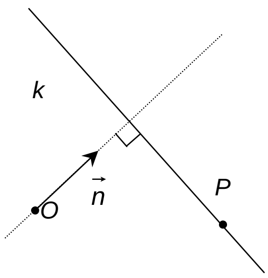
d. Teken de punten X met $\overrightarrow{BX} \perp \overrightarrow{OB}$. De lijn die je krijgt noemen we m.

Voor een punt $X\,(x,y)$ geldt:
$\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow (2-x, 3-y) \cdot (2,3) = 0$.
e. Laat zien dat je de laatste vergelijking kunt schrijven als: $2x + 3y = 13$. Dit is een vergelijking van lijn k.
f. Bepaal zo ook een vergelijking van m.



9 In het plaatje hiernaast geldt: $\vec{n} \perp \overrightarrow{PX}$ oftewel $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$.
a. Neem het plaatje over en teken de punten X met $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$.

Neem $\vec{n} = (\text{-}2,5)$ en $P = (3,4)$.
De punten $X(x,y)$ met $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$ vormen een lijn.
b. Teken die lijn in een assenstelsel en bepaal een vergelijking van de lijn. Ga zo te werk als in de opgave **8**.



> Gegeven een vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ en een punt P. Dan is $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{x}) = 0$ een vergelijking van de lijn door P loodrecht op $\vec{n}$.
> $\vec{n}$ heet een **normaalvector** van de lijn.

Als je de vergelijking $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{x}) = 0$ met $\vec{n} = (a,b)$ en $\vec{x} = (x,y)$ uitschrijft, krijg je iets van de vorm: $ax + by = c$.
Veronderstel omgekeerd dat je iets van de vorm $ax + by = c$ hebt. Dit is te schrijven in de vorm $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{x}) = 0$ voor zekere $\vec{n}$ en $\vec{p}$. Hoe dat gaat zie je in de volgende opgave.

10 Bekijk de vergelijking $2x-5y=8$. Een punt dat aan deze vergelijking voldoet is bijvoorbeeld $P(9,2)$.
a. Laat zien dat $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{x})=0$ met $\vec{n}=(2,-5)$ te schrijven is als $2x-5y=8$.

Bekijk de vergelijking $12x-5y=10$.
b. Zoek vectoren $\vec{n}$ en $\vec{p}$ zó, dat $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{x})=0$ te schrijven is als $12x-5y=10$.

> De punten (x,y) die aan de vergelijking $ax+by=c$ voldoen, liggen op een lijn loodrecht op de vector (a,b).

Voorbeeld

Gegeven de punten $A(2,3)$ en $B(-1,4)$. $\overrightarrow{AB}=(-3,1)$ is dan een richtingsvector van lijn AB, dus $(1,3)$ is een normaalvector. Een vergelijking van lijn AB is dus $x+3y=c$ voor een of ander getal c. Door A of B in de vergelijking in te vullen vind je c. Je krijgt: $x+3y=11$.

11 a. Geef zoals in bovenstaand voorbeeld een vergelijking van de lijn door $(1,-2)$ en $(3,4)$.
Ook van de lijn door $(-10,7)$ en $(15,2)$.

Gegeven zijn de punten $A(2,-1)$ en $B(-3,5)$.
b. Geef een vergelijking van de lijn door A loodrecht op lijn AB.
Tip. $\overrightarrow{AB}$ is normaalvector van de lijn.
c. Geef een vergelijking van de middelloodlijn van AB.

Noot

12 Gegeven de punten $A(a_1,a_2)$ en $B(b_1,b_2)$, dan is $(b_2-a_2,-b_1+a_1)$ een normaalvector van lijn AB.
a. Waarom?

Een vergelijking van lijn AB is dus:
$(x-a_1,y-a_2)\cdot(b_2-a_2,-b_1+a_1)=0 \Leftrightarrow$
$(x-a_1)(b_2-a_2)+(y-a_2)(-b_1+a_1)=0$.
b. Laat zien dat dit te schrijven is als:
$(y-a_2)(b_1-a_1)=(x-a_1)(b_2-a_2)$.

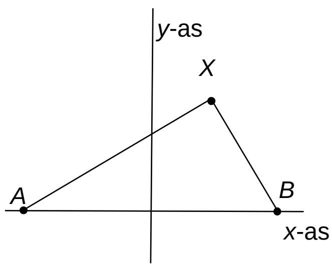
Dit wordt wel de **kruisproductvorm** van de lijn door $A(a_1,a_2)$ en $B(b_1,b_2)$ genoemd.

13 Zoals bekend, liggen alle punten (x,y) die aan een vergelijking van de vorm $ax+by = c$ (met $a \neq 0$ of $b \neq 0$) voldoen, op een rechte lijn.
a. Welke bijzonderheid heeft de lijn als $a = 0$ en $b \neq 0$? En als $b = 0$ en $a \neq 0$?
b. Waarom is geëist dat $a \neq 0$ of $b \neq 0$?
c. Welke bijzonderheid heeft de lijn als $c = 0$ (en $a \neq 0$ of $b \neq 0$)?

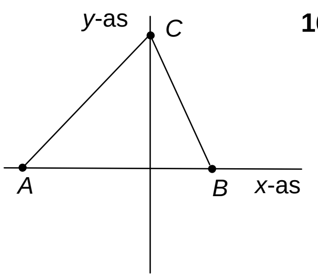
14 Gegeven de lijn k met vergelijking $2x - 3y = 10$ en de lijn m met vergelijking $-4x + ay = 12$, voor zeker getal a.
a. Voor welke waarde van a zijn k en m evenwijdig?

n is de lijn met vergelijking $-4x + ay = b$ voor zekere getallen a en b.
b. Voor welke a en b zijn de lijnen k en n hetzelfde?

Toepassingen



15 De stelling van Thales
Gegeven zijn de punten $A(-r,0)$ en $B(r,0)$, met $r > 0$. We bekijken de punten $X(x,y)$ waarvoor geldt: $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BX}$.
a. Laat met behulp van het inproduct zien dat geldt: $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BX} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$.
b. Wat voor kromme vormen de punten X kennelijk?
c. Verklaar de titel van deze opgave.



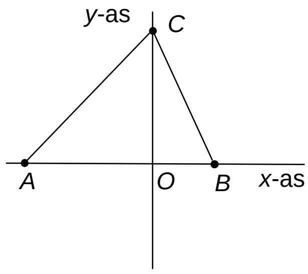
16 De middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt
Dit heb je waarschijnlijk in de onderbouw meetkundig bewezen. In deze opgave doen we het met algebra.

De hoekpunten van de driehoek noemen we A, B en C. Om het rekenwerk te beperken, kiezen we het assenstelsel handig. We nemen de x-as door de punten A en B en de y-as door C. De coördinaten van A, B en C zijn: (a,0), (b,0) en (0,c).
Een vergelijking van de middelloodlijn van AB is:
$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
a. Waarom is ($-b$,c) normaalvector van de middelloodlijn van BC?
b. Laat zien dat $-bx + cy = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$ een vergelijking van de middelloodlijn van BC is.

De eerste coördinaat van het snijpunt van de middelloodlijn van BC en de middelloodlijn van AB is $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

c. Laat met behulp van **b** zien dat de tweede coördinaat van dat snijpunt gelijk is aan: $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\frac{ab}{c}$.

Omdat deze uitdrukking symmetrisch is in *a* en *b*, is het duidelijk dat de middelloodlijn van *AC* hetzelfde snijpunt met de middelloodlijn van *AB* heeft.



17 De lijn van Euler

a. Teken driehoek *ABC* met *A*(-10,0), *B*(6,0) en *C*(0,8). Teken van deze driehoek het zwaartepunt *Z*, het snijpunt van de middelloodlijnen *M* en het hoogtepunt *H*.
Als je netjes getekend hebt, lijken de punten *Z*, *M* en *H* op één lijn te liggen. In het volgende zullen we bewijzen dat dit voor elke driehoek het geval is. We zullen ook nog zien dat $MZ : ZH = 1 : 2$.

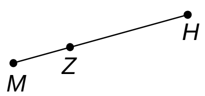
Gegeven een willekeurige driehoek *ABC.* We nemen de assen en de coördinaten van de punten als in opgave **14**.
We hebben daar berekend dat het snijpunt van de middelloodlijnen $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\frac{ab}{c})$ is. Dat is het middelpunt *M* van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*.

a. Leid af dat het zwaartepunt $Z = (\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}c)$.

b. Geef een vergelijking van de hoogtelijn uit *B*.

De hoogtelijn uit *C* heeft vergelijking $x = 0$.

c. Laat zien dat het snijpunt van de hoogtelijnen uit *C* en *B* gelijk is aan $H(0, -\frac{ab}{c})$.
(Omdat *a* en *b* hierin symmetrisch voorkomen, gaat de hoogtelijn uit *A* ook door dit punt.)



d. Laat (bijvoorbeeld met behulp van vectoren) zien dat de punten $M(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\frac{ab}{c})$, $Z(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}c)$ en $H(0, -\frac{ab}{c})$ op één lijn liggen en dat $MZ : ZH = 1 : 2$.

Het snijpunt van twee lijnen

18 De lijnen k met vergelijking $2x-3y=10$ en m met vergelijking $3x-8y=8$ snijden elkaar. Het snijpunt noemen we (a,b).
Dan geldt voor alle getallen p en q dat
$p(2a-3b-10)+q(3a-8b-8)=0$.
a. Waarom?
b. Kies $p=3$ en $q=-2$, dan vind je: $7b-14=0$, dus $b=2$. Ga dat na.

In **b** heb je p en q zó gekozen dat a niet meer in de vergelijking voorkomt. Zodoende vind je b, de tweede coördinaat van het snijpunt.
c. Hoe moet je p en q kiezen, opdat b niet meer in de vergelijking voorkomt?
Wat vind je voor a?

Uitgaande van de vergelijkingen van de lijnen k en m kun je een nieuwe vergelijking maken:
$p(2x-3y-10)+q(3x-8y-8)=0$.
Voor alle getallen p en q is dit de vergelijking van een lijn. Die lijn gaat door het snijpunt van k en m.
d. Leg dat uit.
e. Wat moet je voor p en q kiezen om de lijn $x+y=10$ te krijgen?

19 Ga na of de volgende lijnen elkaar snijden. Bereken het snijpunt in geval ze elkaar snijden.
a. k: $3x+4y=22$ en m: $4x-5y=-12$
b. k: $-3x+4y=22$ en m: $4x+5y=12$
c. k: $x+4y=12$ en m: $4x+5y=15$
d. k: $-3x+4y=12$ en m: $1\frac{1}{2}x-2y=-6$
e. k: $-3x+4y=12$ en m: $-1\frac{1}{2}x+2y=-6$

20 We werken nog even met de twee lijnen van opgave **19a**: k: $3x+4y=22$ en m: $4x-5y=-12$. We combineren die twee vergelijkingen als volgt:
$p(3x+4y-22)+q(4x-5y+12)=0$.
Door voor p en q alle mogelijke getallen te nemen (maar niet beide 0), krijg je alle mogelijke lijnen door het snijpunt (2,4) van k en m. We spreken van een **lijnenbundel**.
a. Wat kun je voor p en q kiezen om de lijn k te krijgen? En om de lijn m te krijgen?
b. Wat kun je voor p en q kiezen om een lijn door de oorsprong te krijgen?

Van pv naar vergelijking en omgekeerd

In paragraaf 3 van blok 2 hebben we parametervoorstellingen van lijnen bekeken, in deze paragraaf vergelijkingen.
Je kunt soepel overstappen van het een op het ander.

Voorbeeld (van vergelijking naar pv)
Gegeven de lijn met vergelijking $-3x+4y=12$. Je kunt twee punten van de lijn berekenen, bijvoorbeeld (0,3) en (-4,0) en dan een pv geven van de lijn door die twee punten; zie voorbeeld 2 van paragraaf 3.
Het kan ook zó: een punt van de lijn is bijvoorbeeld (0,3). Verder is (-3,4) normaalvector van de lijn, dus (4,3) een richtingsvector. Een pv is dus: $(x,y)=(0,3)+t(4,3)$.

Voorbeeld (van pv naar vergelijking)
Gegeven de lijn met pv $(x,y)=(-1,3)+t(-4,1)$. Van die lijn is (1,4) een normaalvector, dus is $x+4y=c$ een vergelijking.
Het getal c vind je door een punt van de lijn in te vullen, bijvoorbeeld (-1,3); dit geeft $c=11$.
Een vergelijking is dus $x+4y=11$.

Voorbeeld: eliminatie van de parameter
Een andere manier om van een pv op een vergelijking over te stappen is het zogenaamde elimineren van de parameter.
Gegeven de lijn met pv $(x,y)=(-1,3)+t(-4,1)$.
Dan $x=-1-4t$ en $y=3+t$.
Uit de laatste vergelijking volgt $t=y-3$. Dat vul je voor t in $x=-1-4t$ in; dan krijg je: $x=-1-4(y-3)$. Dit kun je herschrijven als: $x+4y=11$.

21 **a.** Van vier lijnen is een vergelijking gegeven. Geef van die lijnen een pv.
$3x+4y=22$
$4x-5y=-12$
$3x+4y=0$
$x=3$
b. Van drie lijnen is een pv gegeven. Geef van die lijnen een vergelijking.
$(x,y)=(-3,3)+t(4,1)$
$(x,y)=(0,2)+t(4,-1)$
$(x,y)=(4+3t,2-t)$
c. Elimineer de parameter t in: $(x,y)=(-1,2)+t(-2,3)$.
d. Elimineer de parameter t in: $(x,y)=(4+t,t^2+1)$
Welke figuur hoort bij deze pv?

2 Het inproduct nader bekeken

In de vorige paragraaf hebben we het inproduct van twee vectoren gedefinieerd. We bekijken er enkele eigenschappen van en zien wat je ermee kunt.

De som van twee vectoren is weer een vector. Je zou daarom misschien verwachten dat het product van twee vectoren ook weer een vector is, maar dat is niet zo. Het inproduct van twee vectoren is een getal. Daarom heet het ook niet gewoon "product". Inproduct is een afkorting van "inwendig product".

1 $(1,2)+(1,3)=(2,5)$.
a. Bereken de drie inproducten:
$(1,2)\cdot(1,\text{-}2)$
$(1,3)\cdot(1,\text{-}2)$
$(2,5)\cdot(1,\text{-}2)$
Wat is het verband tussen de drie uitkomsten?

$7\cdot(1,2)=(7,14)$.
b. Bereken de twee inproducten:
$(1,2)\cdot(1,\text{-}2)$
$(7,14)\cdot(1,\text{-}2)$
Wat is het verband tussen de twee uitkomsten?

c. Wat heeft $(1,\text{-}2)\cdot(1,\text{-}2)$ met de lengte van $(1,\text{-}2)$ te maken?

Eigenschappen van het inproduct
Voor alle getallen *k* en vectoren $\vec{a}, \vec{b}$ en $\vec{c}$ geldt:
1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ en $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
3 $(k\,\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\,\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
4 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

Eigenschap 1 heet de **commutatieve** eigenschap van het inproduct en **eigenschap 2** heet de **distributieve** eigenschap.
Commuteren is verwisselen, *distribueren* is verdelen.

2 Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zodat $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ en $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$.

a. Bereken met behulp van de eigenschappen van het inproduct: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

b. Bereken $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

Wat is dus de lengte van $\vec{a} + \vec{b}$?

c. Bereken ook de lengte van $\vec{a} - \vec{b}$.

3 $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn als in de vorige opgave.

a. De vector $\vec{c}$ is 2 keer zo lang als $\vec{a}$ en heeft dezelfde richting als $\vec{a}$. Wat is $\vec{c} \cdot \vec{a}$?

b. De vector $\vec{d}$ is 3 keer zo lang als $\vec{b}$ en zijn richting is tegengesteld aan die van $\vec{b}$. Wat is $\vec{d} \cdot \vec{b}$?

c. Druk $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ uit in $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$.

Eigenschappen van het inproduct (vervolg)

5 Als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting hebben, is $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ tegengestelde richting hebben, is $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
In beide gevallen is $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

6 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

Opmerking

De verticale strepen in de uitdrukking $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ links en rechts van het gelijkteken hebben verschillende betekenis: links ervan geven ze de absolute waarde van een getal aan en rechts de lengte van vectoren.

Toepassingen

4 De middelloodlijn van *AB*

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat een vergelijking van een lijn geschreven kan worden als:
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$, waarbij $\vec{n}$ een normaalvector van die lijn is en *P* een punt van die lijn.

a. Laat zien dat $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = 0$ een vergelijking van de middelloodlijn van *AB* is.

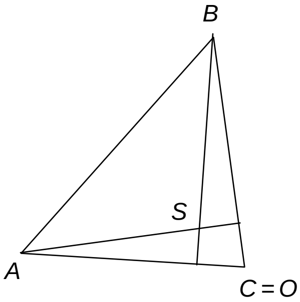
b. Herschrijf de vergelijking uit **a** tot:
$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}|$.

5 De middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt (met vectoren)
Gegeven driehoek *ABC*.
Een vergelijking van de middelloodlijn van *AB* is:
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{x}=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}|\vec{b}|$.

a. Schrijf zo ook vergelijkingen van de andere twee middelloodlijnen van de driehoek op.

Het snijpunt van de middelloodlijnen van *AB* en *BC* noemen we *S*. Dan:
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{s}=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}|\vec{b}|$ en $(\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{s}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}|\vec{c}|$.

b. Leid hieruit af dat *S* ook aan de vergelijking van de middelloodlijn van *AC* voldoet.



6 De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt (met vectoren)
Gegeven driehoek *ABC*. De hoogtelijn uit *A* en de hoogtelijn uit *B* snijden elkaar in *S*. Voor het gemak kiezen we de oorsprong *O* in *C*.

a. Ga na dat $\vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ een vergelijking van de hoogtelijn uit *A* is.

b. Geef een vergelijking van de hoogtelijn uit *B* en de hoogtelijn uit *O*.

c. Laat zien dat uit $\vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ en $\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ volgt dat $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{x}=0$.

d. Leg uit dat met **c** bewezen is dat de hoogtelijnen van een driehoek door één punt gaan.

7 De lijn van Euler met vectoren
Gegeven driehoek *ABC*. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek noemen we *M*, het zwaartepunt *Z* en het hoogtepunt *H*.
Kies de oorsprong in *M*.

a. Wat volgt hieruit voor $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en $|\vec{c}|$?

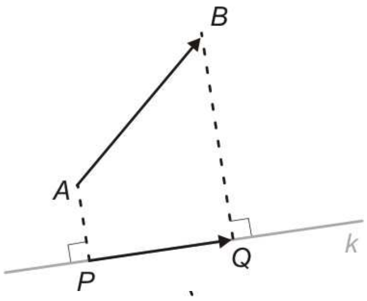
We gaan bewijzen dat $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

We laten de vector $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ in *M* beginnen de noemen zijn eindpunt *X*.

b. Laat zien met behulp van een inproduct dat lijn *AX* loodrecht op lijn *BC* staat; gebruik **a.**

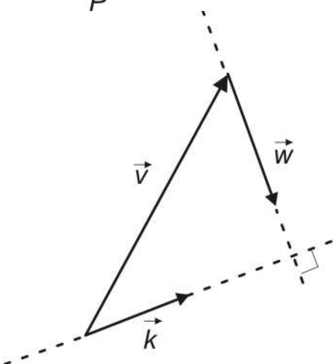
Net zo volgt dat *BX* loodrecht op *AC* en *CX* loodrecht op *AB* staat. Dus is *X* het hoogtepunt van driehoek *ABC*.
Dus $\vec{m}=\vec{0}$, $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ en $\vec{z}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.
Dus: *M*, *Z* en *H* liggen op één lijn en $MZ:ZH=1:2$.

Loodrechte projecties



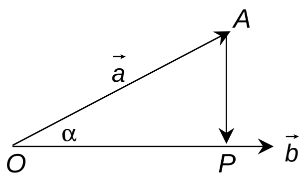
In het plaatje hiernaast is $\overrightarrow{PQ}$ de **loodrechte projectie** van $\overrightarrow{AB}$ op lijn k.

Het inproduct is ook nuttig om de lengte van de projectie van een vector op een lijn te berekenen. Hoe dat gaat zie je in het volgende.



8 Bekijk het plaatje met de vectoren $\vec{v}$,$\vec{w}$ en $\vec{k}$ hiernaast.
De vectoren $\vec{w}$ en $\vec{k}$ staan loodrecht op elkaar.
Toon met eigenschappen van het inproduct aan:
$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{k} = \vec{v} \cdot \vec{k}$.

In het vervolg zie je hoe het inproduct gebruikt kan worden om de hoek tussen vectoren te bepalen.

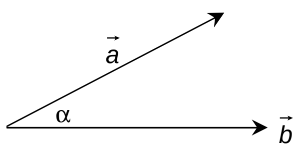


9 Gegeven twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ (waarbij $\vec{b} \neq \vec{0}$ **).** De loodrechte projectie van A op OB noemen we P.

a. Laat zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{p} \cdot \vec{b} = |\vec{p}| \cdot |\vec{b}|$; gebruik eigenschap 5 van het inproduct.

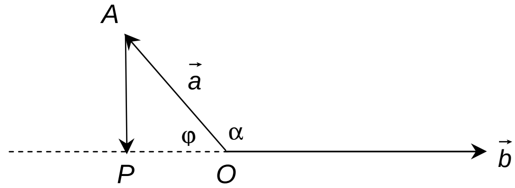
b. Druk $|\vec{p}|$ uit in $|\vec{a}|$ en α.

*Als we opgave **9a** en **9b** combineren, vinden we:*



Als α de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, dan:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

10 In de figuur bij opgave **9** was hoek α scherp.
Als α stomp is, krijg je het volgende plaatje:



Nu geldt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{p} \cdot \vec{b} = -|\vec{p}| \cdot |\vec{b}|$.

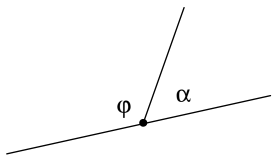
a. Leg dat uit.

b. Druk $|\vec{p}|$ uit in $|\vec{a}|$ en φ.

Als je **a** en **b** combineert vind je: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Als we nu voor een stompe hoek α afspreken dat:
$\cos\alpha = -\cos\varphi$, waarbij $\varphi = 180° - \alpha$ (dus $\varphi < 90°$), dan vinden we ook in dit geval dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$.

c. Ga dat na.



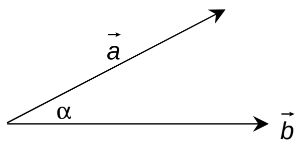
Afspraak
Voor een stompe hoek α definiëren we $\cos\alpha = -\cos\varphi$, waarbij $\varphi = 180° - \alpha$.

11 a. Ga na dat de GR met bovenstaande afspraak werkt. Vergelijk bijvoorbeeld $\cos 100°$ en $\cos 80°$.

b. Geef de exacte waarden van $\cos 120°$, $\cos 135°$ en $\cos 150°$, zonder rekenmachine.

3 Hoeken

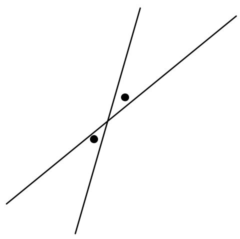
In de vorige paragraaf heb je het volgende gezien.



Als α de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, dan:

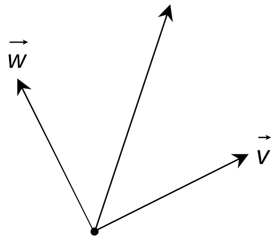
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$

1 **a.** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de volgende vectoren:
(1,1) en (5,2) ,
(-1,2) en (5,1),
(1,7) en (1,-1).



Definitie
De grootte van de hoek tussen twee snijdende lijnen is de grootte van de twee niet-stompe hoeken in het snijpunt.

b. Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen met pv $(x,y) = (-1,3) + t\,(1,1)$ en $(x,y) = (1,3) + t\,(4,1)$.
Ook de hoek tussen de lijnen met pv $(x,y) = (1,3) + t\,(-1,1)$ en $(x,y) = (1,3) + t\,(4,1)$.
c. Bereken de hoek tussen de x-as en de lijn met pv $(x,y) = (1,3) + t\,(4,1)$.



2 **a.** Teken op roosterpapier de vector (1,3) en met hetzelfde beginpunt twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ die een hoek van 45° met (1,3) maken; zie plaatje.
De lengte van die vectoren ligt niet vast; maak het tweede kental van $\vec{v}$ gelijk aan 1 en maak $\vec{w}$ even lang als $\vec{v}$.
Wat denk je dat het eerste kental van $\vec{v}$ is?
b. Ga met een berekening na dat (2,1) een vector is die een hoek van precies 45° met (1,3) maakt.
c. Welke vector is $\vec{w}$?

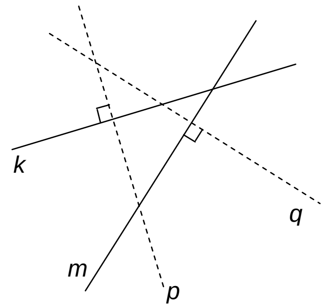
We zoeken een vector die een hoek van 45° met de vector (1,5) maakt. De lengte van die vector ligt niet vast. We nemen (om zo weinig mogelijk variabelen te hebben) het tweede kental gelijk aan 1; het eerste kental noemen we a.

d. Ga na dat $a+5=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{26+26a^2}$.

e. Los de vergelijking in **d** op.

f. Geef alle vectoren die een hoek van 45° met de vector (1,5) maken.

3



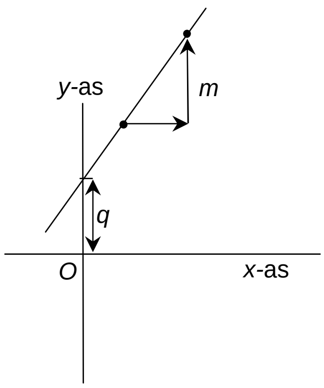
k en m zijn twee snijdende lijnen. Lijn p staat loodrecht op k en lijn q staat loodrecht op m.

a. Toon aan dat hoek tussen k en m gelijk is aan de hoek tussen p en q.

De hoek tussen twee lijnen kun je dus ook bepalen door de hoek tussen hun normalen te berekenen.

b. Bereken de hoek tussen de lijnen $2x+3y=5$ en $3x-4y=10$ in graden nauwkeurig.

c. Bereken de hoek tussen de lijnen $y=2x+3$ en $y=-x+3$ in graden nauwkeurig.



In de derde klas ben je ook al bezig geweest met vergelijkingen van lijnen. Die hadden de vorm: $y=mx+q$.

Het getal m geeft de steilheid van de lijn aan. Als je vanuit een punt op de lijn 1 eenheid naar rechts gaat, moet je m eenheden omhoog gaan om weer op de lijn te komen. (Als m < 0, moet je omlaag gaan.)

In plaats van steilheid spreekt men ook wel van helling of richtingscoëfficiënt.

De lijn met vergelijking $y=mx+q$ snijdt de y-as op hoogte q en heeft helling m.

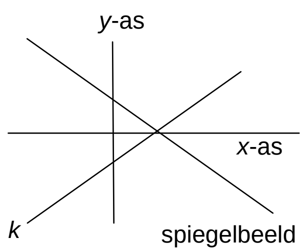
4 Een lijn heeft helling m.
a. Geef een richtingsvector van die lijn.
b. Geef een pv van de lijn met vergelijking $y = mx + q$.
c. Door m te variëren krijg je alle mogelijke richtingen voor de lijn op één richting na. Welke?

Elke lijn die niet evenwijdig met y-as is (of de y-as zelf is), heeft een vergelijking van de vorm $y = mx + q$

5 Gegeven de lijn k met vergelijking $ax + by = c$.
a. Wat weet je van de getallen a, b en c als k evenwijdig met de y-as is?
b. Neem $a = 2$ en $b = 3$. Wat is de richtingscoëfficiënt van k? En wat is de richtingscoëfficiënt als $a = -4$ en $b = 5$?
c. Als $b \neq 0$, is k niet evenwijdig met de y-as en heeft k dus een richtingscoëfficiënt. Druk die uit in de getallen a, b en/of c.

Helling en hellingshoek

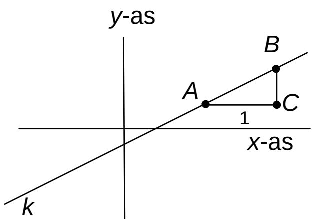
Er is een verband tussen de helling van een lijn en de hoek die die lijn met de x-as maakt.



6 Een lijn maakt dezelfde hoek met de x-as als zijn spiegelbeeld in de x-as.
a. Als k helling $-\frac{3}{4}$ heeft, wat is dan de helling van zijn spiegelbeeld in de x-as? En als k richtingscoëfficiënt m heeft?

Afspraak
Een lijn k maakt een hoek α met de x-as.
De **hellingshoek van *k*** is α als k een positieve helling heeft en $-\alpha$ als k een negatieve helling heeft.

Zo heeft een lijn met helling 1 een hellingshoek van 45° en een lijn met helling -1 een hellingshoek van -45°.



In het plaatje hiernaast liggen de punten A en B op lijn k. Het verschil tussen de x-coördinaten van A en B is 1.
b. Als k helling $\frac{1}{2}$ heeft, hoe groot is dan het verschil tussen de y-coördinaten? Bereken in dit geval $\angle CAB$ in graden nauwkeurig.
Hoek CAB is even groot als de hoek van k met de x-as.

Afpraak
Als $-90° < \alpha < 0°$, dan $\tan \alpha = \tan -\alpha$.

c. Ga na dat de rekenmachine ook volgens bovenstaande afspraak werkt.
d. Geef de exacte waarde van $\tan -30°$, $\tan -45°$ en $\tan -60°$.
e. Geef de richtingscoëfficiënt van een lijn met hellingshoek -70° in twee decimalen.

Als lijn k helling m heeft en α de hellingshoek van k is, dan: $\tan \alpha = m$.

7 Geef in graden nauwkeurig de hellingshoek van:
a. de lijn met pv $(x,y) = (-1,2) + t(-2,3)$
b. de lijn met vergelijking $2x + 5y = 10$

Als twee lijnen met helling m en n (beide $\neq 0$) loodrecht op elkaar staan, dan $m \cdot n = -1$

8 **a.** Laat dat zien met behulp van richtingsvectoren.
b. Geef een vergelijking in de vorm $y = mx + q$ van de lijn door (4,-3) die loodrecht op de lijn $y = -1\frac{1}{4}x + 7$ staat.

9 De hellingshoek verdubbelen
k is de lijn door O en het punt (4,2).
a. Teken k in een rooster.
b. Bereken de hellingshoek van k.

p is de lijn door O met een twee keer zo grote hellingshoek als k.
c. Teken p in hetzelfde rooster als k.

Het lijkt erop dat p door (3,4) gaat.
d. Bereken de hellingshoek van de lijn door O en (3,4).

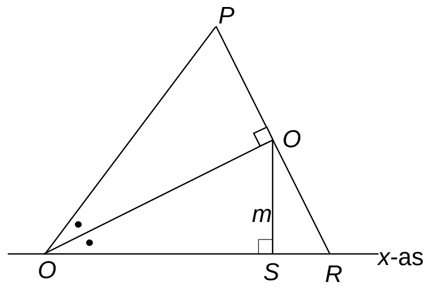
Uit **b** en **d** kun je alleen maar concluderen dat p ongeveer door (3,4) gaat. Je kunt dat zeker weten door de cosinus van de hoek tussen de vectoren (1,0) en (4,2) en die tussen de vectoren (4,2) en (3,4) te berekenen.
e. Doe dat.
f. Je kunt dat ook zeker weten door de vectoren (5,0) en (3,4) op te tellen. Leg uit hoe.

*In opgave **10** zullen we het volgende bewijzen.*

De lijn met helling $\dfrac{2m}{1-m^2}$ heeft een twee keer zo grote hellinshoek als de lijn met helling m.

g. Ga na dat volgens het bovenstaande de lijn met richtingsvector (3,4) een twee keer zo grote hellingshoek heeft als de lijn met richtingsvector (4,2).
h. Een lijn met hellingshoek 30° heeft helling $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ en een lijn met hellingshoek 60° heeft helling $\sqrt{3}$.
Laat zien dat dit in overeenstemming is met bovenstaande formule.

10 Het bewijs



Zie het plaatje voor de gegevens. Bovendien is $OS = 1$. De lijn OQ heeft dus helling m.

a. Laat zien dat de driehoeken OQS en QRS gelijkvormig zijn.

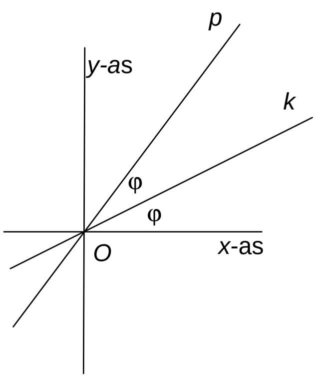
b. Druk de lengte van RS en de coördinaten van R uit in m.

$Q(1,m)$ is het midden van PR.

c. Bepaal daarmee de coördinaten van P en leid hieruit af dat lijn OP helling $\dfrac{2m}{1-m^2}$ heeft.

d. Hoe ziet bovenstaand plaatje eruit als $m = 1$? Hoe zou je de formule dan moeten interpreteren?

11 Een bewijs met het inproduct



In plaats van het bewijs met gelijkvormigheid in opgave 11, kunnen we ook een bewijs met het inproduct geven.
In het plaatje hiernaast heeft k helling m en hellingshoek φ: p heeft hellingshoek 2φ.
De helling van p noemen we x.

a. Laat zien dat dan

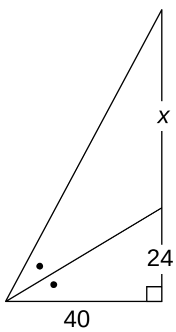
$(1,x)\cdot(1,m) = \cos\varphi \cdot \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+m^2}$ en

$(1,0)\cdot(1,m) = \cos\varphi \cdot \sqrt{1+m^2}$

b. Laat zien dat uit **a** volgt: $1+mx = \sqrt{1+x^2}$.

c. Bereken nu x met behulp van **b**, dat wil zeggen, druk x uit in m.

Tip. Kwadrateer beide kanten.



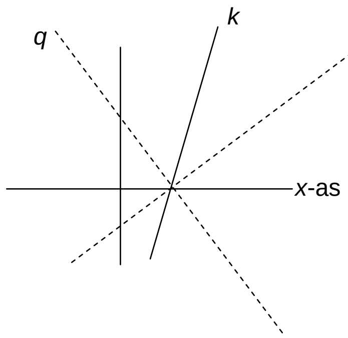
12 Zie het plaatje hiernaast voor de gegevens.
Bereken x exact.

13 Een lijn heeft richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{3}$. De hellingshoek van die lijn noemen we α. De richtingscoëfficiënt van een lijn met hellingshoek $\frac{1}{2}\alpha$ noemen we m.
a. Benader m met je rekenmachine. Schrijf je werkwijze op.

We berekenen m nu exact.
b. Laat zien dat $2m^2 + 3m - 2 = 0$.
c. Bereken de oplossingen van de kwadratische vergelijking uit **b** exact.

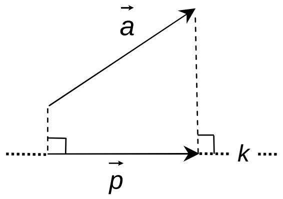
Het product van de oplossingen is -1. En dat had je al bij voorbaat kunnen weten.
d. Leg dat uit.
e. Wat is m?

14 k is de lijn met pv $(x,y) = (3,0) + t\,(7,24)$.
p en q zijn de lijnen die bestaan uit de punten die even ver van de x-as als van k liggen.
Bereken pv's van p en q, exact.



15 Een lijn met richtingscoëfficiënt m wordt over 45° tegen de wijzers van de klok in gedraaid.
a. Toon aan dat zijn richtingscoëfficiënt wordt: $\dfrac{1+m}{1-m}$.
Tip. Kijk naar opgave 2.
b. De lijn met vergelijking $2x + 3y = 18$ wordt om het punt (3,4) over 45° tegen de wijzers van de klok in gedraaid. Geef een vergelijking van de lijn die je dan krijgt.

4 Projecties



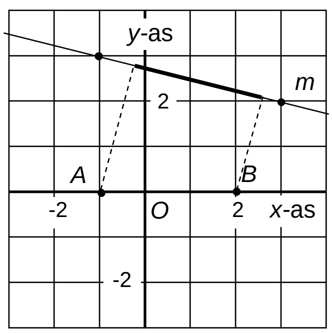
In paragraaf 2 hebben we gesproken over de loodrechte projectie van een vector op een lijn.
In het plaatje hiernaast is $\vec{p}$ de **loodrechte projectie** van $\vec{a}$ op de lijn k.

In opgave 9 en 10 van paragraaf 2 hebben we gezien dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{p}\cdot\vec{b}$ en dat $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{p}|\cdot|\vec{b}|$
Dus:

Voor de projectie $\vec{p}$ van een vector $\vec{a}$ op een lijn k

geldt: $|\vec{p}| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$.

Hierbij is $\vec{b}$ een richtingsvector van lijn k.



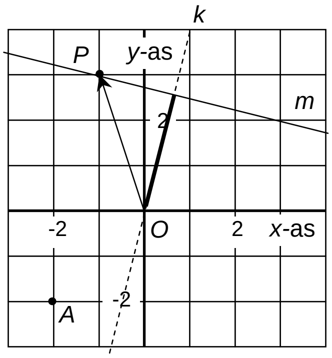
Voorbeeld
Zie het plaatje hiernaast. m is de lijn door de punten (-1,3) en (3,2). Het vet getekende lijnstuk is de projectie van lijnstuk AB op m. (De gestippelde lijnen staan loodrecht op m.)
De lengte van de projectie bereken je als volgt.
$\overrightarrow{AB} = (3,0)$, een richtingsvector van m is (4,-1).
De lengte van de projectie is

$$\frac{|(3,0)\cdot(4,\text{-}1)|}{|(4,\text{-}1)|} = \frac{12}{\sqrt{17}} = \tfrac{12}{17}\sqrt{17}$$

1 $A = (\text{-}2,1)$, $B = (4,2)$ en k is de lijn $4x + 3y = 10$.
a. Teken de situatie in een rooster en kleur de projectie van lijnstuk AB op k.
b. Bereken de lengte van de projectie van AB op k.

2 Gegeven de lijnen k: $2x + y = 14$ en m: $x - 2y = 2$.
a. Bereken de coördinaten van snijpunt R van k en m.
b. Ga na dat k en m elkaar loodrecht snijden.

P is het punt (6,6). De loodrechte projectie van P op k is Q en de loodrechte projectie van P op m is S.
c. Bereken de exacte oppervlakte van rechthoek $PQRS$.



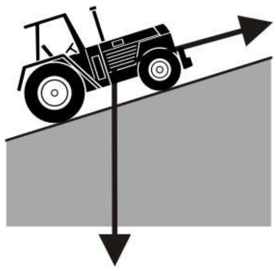
3 Gegeven de lijn m met pv $(x,y) = (-1,3) + t(-4,1)$. Een punt van m is $P(-1,3)$. Een normaalvector van m is (1,4). De afstand van O tot m is de lengte van de projectie van $\overrightarrow{OP}$ op een lijn met richtingsvector (1,4), bijvoorbeeld op de lijn k (zie hiernaast, die projectie is vet getekend).
a. Bereken die afstand.

De afstand van $A(-2,-2)$ tot m is de lengte van de projectie van $\overrightarrow{AP}$ op een lijn met richtingsvector (1,4).
b. Bereken die afstand.

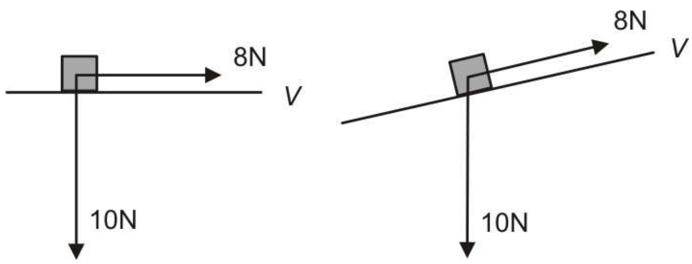
Gegeven is de lijn n met vergelijking $3x + 4y = 22$. Dan is (3,4) een normaalvector van n.

Kies een punt Q op de lijn n. De afstand van A tot n is de lengte van de projectie van $\overrightarrow{AQ}$ op een lijn met richtingsvector (3,4).
c. Bereken die afstand.

4 Bereken de afstand van (3,-1) tot de lijn $4x - 5y = 6$.



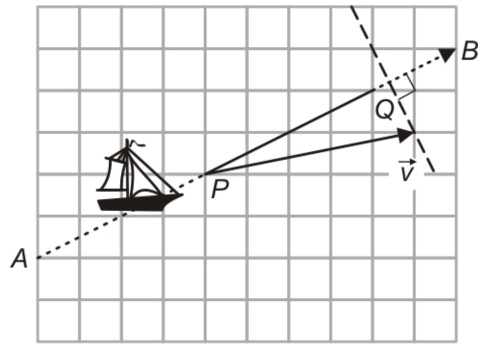
5 Een voorwerp met een gewicht van 10N kan wrijvingsloos bewegen over een vlak V. Er wordt met een kracht van 8N aan getrokken. Als V scheef gehouden wordt, krijgt de trekkracht ‘tegenwerking’ van de zwaartekracht. Als de hellingshoek van V groot genoeg is, zal het voorwerp omlaag glijden.



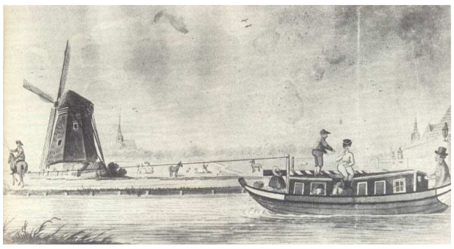
We brengen het gebruikelijke assenstelsel aan: de positieve x-as naar rechts en de positieve y-as naar boven.
a. Neem aan dat V helling 2 heeft.
Bereken de grootte van de projectie van de kracht van 10N in de richting van vlak V. Glijdt het voorwerp naar beneden?
Tip. De richting van V is (1,2) en de kracht van 10N wordt gegeven door (0,10).
b. Neem nu aan dat V helling 1 heeft.
Maak een berekening zoals in **a** om te bepalen of het voorwerp naar beneden glijdt.

We gaan de *kritische waarde* van de helling bepalen, dat is het hellingsgetal van V waarbij het voorwerp op het punt staat naar beneden te glijden. Noem die helling a.
c. Stel een vergelijking voor a op en bereken hieruit a.

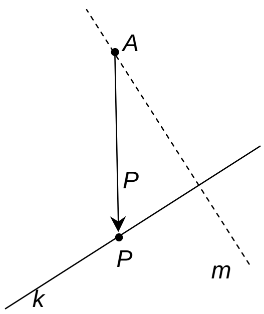
6 Een schuit beweegt in de richting $\vec{r} = (2,1)$ van A naar B. Ze wordt voortgetrokken door een paard. De trekkracht van het paard wordt gegeven door de vector $\vec{v} = (5,1)$: zie het plaatje hieronder. Voor de voortbeweging van de schuit is alleen de grootte van de projectie van $\vec{v}$ op de richting waarin het schip beweegt van belang.



Bereken de grootte van die projectie.



Trekschuit Den Haag - Delft
Aquarel zonder naam
Atlas van Stolk, 19e eeuw.



De afstand van een punt tot een lijn

7 Gegeven de lijn k met vergelijking $ax + by + c = 0$ en het punt $A(a_1, a_2)$. De afstand van A tot k is de lengte van de loodrechte projectie van $\overrightarrow{AP}$ op m, waarbij $P(p_1, p_2)$ een (willekeurig) punt van k is en m de lijn door A loodrecht op k is.
a. Wat kun je zeggen van $ap_1 + bp_2 + c$?
b. Geef een richtingsvector van m.

De afstand van A tot k is $\dfrac{|(a_1 - p_1, a_2 - p_2) \cdot (a,b)|}{|(a,b)|}$.

c. Leg dat uit.

d. Laat zien dat je deze uitdrukking kunt schrijven als $\dfrac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 - a \cdot p_1 - b \cdot p_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Volgens **a** geldt: $ap_1 + bp_2 = -c$, dus:

De afstand van A tot k is dus $\dfrac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

De afstand van punt (a_1,a_2) tot lijn $ax + by + c = 0$ is:

$$\frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

8 Gebruik bovenstaande formule bij de volgende vragen.

a. Bereken exact de afstand van (1,2) tot de lijn met vergelijking $5x + y = 20$.

b. Bereken de afstand van (3,-2) tot de lijn met pv $(x,y) = (-1,3) + t\,(3,1)$.

c. Bereken de oppervlakte van driehoek met hoekpunten (1,2), (3,-2) en (10,10).

5 Antwoorden

Paragraaf 1 Lijnen met inproduct

1 **a.** $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$

2 **a.** $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$
b. Driehoek ABC is gelijkbenig, want $AC = AB$.
$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180 - 125) = 27\frac{1}{2}°$.

3 **a.** (3,-2), (-3,2), (-6,4)
b. 0

4 **a.** $(a,b) \cdot (-b,a) = 0$
b. $3a + 2b = 0$. Als $a = 0$, dan $b = 0$, dan klopt het. Anders $3a + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -1\frac{1}{2}a$, dus $(a,b) = a\,(1,-1\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a\,(-2,3)$.
c. $2a - b = 0$. Als $a = 0$, dan $b = 0$, dan klopt het. Anders $2a - b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$, dus $(a,b) = a\,(1,2)$
d. Neem aan: $\vec{v} = (a,b)$, $\vec{w} = (p,q)$ en $ap + bq = 0$. Er geldt $a \neq 0$ of $b \neq 0$.
Als $a \neq 0$, dan $p = -\frac{bq}{a}$, dus $(p,q) = \frac{q}{a}\,(-b,a)$.
Als $b \neq 0$, dan $q = -\frac{ap}{b}$, dus $(p,q) = -\frac{p}{b}\,(-b,a)$.

5 **a.** Dit volgt uit: $c^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$; $a^2 = a_1^2 + a_2^2$ en $b^2 = b_1^2 + b_2^2$.
b. $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 =$
$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2$.

6 Een richtingsvector van k is $\overrightarrow{AB} = (-11,-3)$;
een pv van k is: $(x,y) = (1,0) + t\,(11,3)$.

7 **a.** $(4 + 3t, 2 - t) = (4,2) + t\,(3,-1)$.
$\overrightarrow{AB} = (6,-2)$, een veelvoud van (3,-1), dus (3,-1) is een richtingsvector van lijn AB en (4,2) is een punt van lijn AB.
b. $\overrightarrow{OT}$ loodrecht op $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OT} \cdot (3,-1) = 0 \Leftrightarrow$
$3(4 + 3t) - 1(2 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$, dus $T = (7,1)$.

8 **b.** De lijn door A loodrecht op $\overrightarrow{OA}$.
f. $(2 - x, -1 - y) \cdot (2,-1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x + 1 + y = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 5$.

9 **a.** Dat is de lijn door P loodrecht op $\vec{n}$.
b. Dat is de lijn door P loodrecht op $\vec{n}$.
Vergelijking : $-2x + 5y = 14$

10 b. Voor P kun je elk punt van de lijn nemen, bijvoorbeeld (5,10), dus $\vec{n} = (12,-5)$ en $\vec{p} = (5,10)$.

11 a. $3x - y = 5$; $x + 5y = 25$
b. $5x + 6y = 4$
c. $5x + 6y = 9\frac{1}{2}$

12 a. $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$ is richtingsvector , dus
$(a_1 - a_2, b_1 - b_2)_L = (b_2 - a_2, -b_1 + a_1)$ is normaalvector.

13 a. Evenwijdig aan de x-as; evenwijdig aan de y-as
b. Als $a = 0$ en $b = 0$, krijg je geen lijn.
Als $c = 0$, voldoet elk punt aan de vergelijking;
als $c \neq 0$, voldoet geen enkel punt aan de vergelijking.
c. De lijn gaat door de oorsprong (0,0).

14 a. Dan zijn (2,-3) en (-4,a) afhankelijk, dus $a = 6$.
b. $a = 6$ en $b = -20$

15 a. $\overrightarrow{AX} = (x + r, y)$ en $\overrightarrow{BX} = (x - r, y)$ en $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BX} \Leftrightarrow$
$(x + r, y) \cdot (x - r, y) = x^2 - r^2 + y^2 = 0$
b. Een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r.
c. In **a** en **b** is bewezen: de punten X met hoek AXB recht liggen op een cirkel met middellijn AB. Dit is de stelling van Thales.

16 a. Dat is $\overrightarrow{BC}$.
b. Een vergelijking is van de vorm: $-bx + cy = p$. Het getal p vind je door het midden van BC, dat is $(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c)$ in de vergelijking in te vullen.
c. Vul voor $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ in in $-bx + cy = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$; dat geeft:
$-b(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) + cy = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow cy = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2$,
dus $cy = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab$; delen door c geeft het resultaat.

17 a. Er geldt: $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}((a,0) + (b,0) + (0,c))$.
b. Een normaalvector van de hoogtelijn is $\overrightarrow{AC} = (-a, c)$.
Een vergelijking van de hoogtelijn is van de vorm:
$-ax + cy = p$. Het getal p vind je door bijvoorbeeld $B = (b,0)$ in te vullen, dit geeft: $-ax + cy = -ab$.
c. De hoogtelijn uit C is $x = 0$. Dus vul $x = 0$ in in
$-ax + cy = -ab$. Dit geeft $y = -\frac{ab}{c}$.
d. $\overrightarrow{MZ} = (-\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b,\ -\frac{1}{6}c - \frac{ab}{2c})$ en $\overrightarrow{ZH} = (-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b,\ -\frac{1}{3}c - \frac{ab}{c})$,
dus $2\overrightarrow{MZ} = \overrightarrow{ZH}$. Dus de punten M, Z en H liggen op één lijn en: $MZ : ZH = 1 : 2$.

18 a. $2a-3b-10=0$ en $3a-8b-8=0$, dus
$p(2a-3b-10)+q(3a-8b-8)=p\cdot 0+q\cdot 0=0$
b. $3(2a-3b-10)+\text{-}2(3a-8b-8)=$
$6a-9b-30-6a+16b+16=7b-14=0$, dus $b=2$
c. $p=8$ en $q=\text{-}3$ (bijvoorbeeld), dan: $7a-56=0$, dus $a=8$.
d. Als je het snijpunt invult, vind je $p\cdot 0+q\cdot 0=0$, dus het snijpunt voldoet aan de vergelijking.
e. $p=1\frac{4}{7}$ en $q=\text{-}\frac{5}{7}$

19 a. snijpunt (2,4)
b. snijpunt (-2,4)
c. snijpunt (0,3)
d. De lijnen k en m vallen samen, dus elk punt van k is oplossing.
e. geen snijpunt

20 a. $p=1$ en $q=0$; $p=0$ en $q=1$
b. Dan moet $\text{-}22p+12q=0$ zijn, kies dus bijvoorbeeld $p=6$ en $q=11$.

21 a. (Er zijn veel mogelijkheden, bijvoorbeeld:)
punt (2,4), richtingsv. (4,-3), pv:$(x,y)=(2,4)+t(4,\text{-}3)$
punt (-3,0), richtingsv. (5,4), pv:$(x,y)=(\text{-}3,0)+t(5,4)$
punt (0,0), richtingsv. (4,-3), pv:$(x,y)=t(4,\text{-}3)$
punt (3,0), richtingsv. (0,1), pv:$(x,y)=(3,0)+t(0,1)$
b. $x-4y=\text{-}15$; $x+4y=8$; $x+3y=10$
c. (1) $x=\text{-}1-2t$ en (2) $y=2+3t$. Uit (1) volgt: $t=\text{-}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$.
Dit invullen in (2) geeft: $y=2+3(\text{-}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x)$. Vereenvoudigen geeft: $3x+2y=1$.
d. $t=x-4$ invullen in $y=t^2+1$ geeft: $y=(x-4)^2+1$.
De figuur hierbij is een parabool.

Paragraaf 2 Het inproduct nadere bekeken

1 a. -3, -5, -8, $\text{-}3+\text{-}5=\text{-}8$
b. -3, -21, $\text{-}21=7\cdot\text{-}3$
c. $(1,\text{-}2)\cdot(1,\text{-}2)=|(1,\text{-}2)|^2$

2 a. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2+16=18$
b. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=9+16+4=29$
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{29}$
c. $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=9+16-4=21$
$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{21}$

3 a. 18
b. -48

c. $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

4 **a.** $\vec{a} - \vec{b}$ is een normaalvector van de middelloodlijn van *AB*. Voor het midden *M* van *AB* geldt: $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

b. $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

$= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} - (\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}|) = 0$

5 **a.** $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{x} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|$; $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{x} = \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|$

b. Uit **a** volgt (trek de twee gelijkheden van elkaar af):
$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{s} - (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}| - (\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|)$.
Voor de linkerkant geldt:
$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{s} - (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{s} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{s}$
Voor de rechterkant geldt:
$\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{b}| - (\frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|) = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|$
Dus: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|$.

6 **a.** De lijn met vergelijking $\vec{b} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ heeft als normaalvector $\vec{b}$ en een punt van de lijn is *A*.

b. Vergelijking van de hoogtelijn uit *B*: $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ en vergelijking van de hoogtelijn uit *O*:
$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = 0$.

c. Als $\vec{b} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ en $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, dan:
$\vec{b} \cdot \vec{x} - \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$, dus $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = 0$.

d. Neem aan dat *X* het snijpunt van de hoogtelijnen uit *A* en *B* is. Dan $\vec{b} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ en $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, dus $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = 0$. Dit laatste is een vergelijking van de hoogtelijn uit *O*. Dus *X* ligt op de hoogtelijn uit *O*.

7 **a.** $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

b. Een richtingsvector van *AX* is $\vec{x} - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{c}| = 0$.

8 $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{k} = \vec{v} \cdot \vec{k} + \vec{w} \cdot \vec{k}$ en $\vec{w} \cdot \vec{k} = 0$, want $\vec{w} \perp \vec{k}$.

9 **a.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{d} \cdot \vec{b}$ want $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{d} \cdot \vec{b} = |\vec{d}| \cdot |\vec{b}|$ want $\vec{d}$ en $\vec{b}$ **z**ijn gelijk gericht (eigenschap 5 van het inproduct)

b. $|\vec{d}| = |\vec{a}| \cos\alpha$

10 a. $\vec{d} \cdot \vec{b} = -|\vec{d}| \cdot |\vec{b}|$ want $\vec{d}$ en $\vec{b}$ zijn tegengesteld gericht (eigenschap 5 van het inproduct)

b. $|\vec{d}| = |\vec{a}| \cos\varphi$

c. $-\cos\varphi = \cos\alpha$

11 a. $\cos 100° = -\cos 80°$

b. $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Paragraaf 3 Hoeken

1 a. 23°, 91° en 127°

b. 31°, 59°

c. 14°

2 a. $\vec{v} = (2,1)$

b. $\dfrac{(1,3)\cdot(2,1)}{|(1,3)|\cdot|(2,1)|} = \dfrac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, klopt

c. $\vec{w} = (-1,2)$

d. $\dfrac{(1,5)\cdot(a,1)}{|(1,5)||(a,1)|} == \dfrac{a+5}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

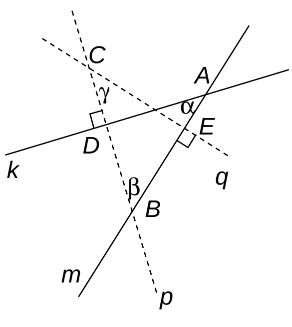
kruislings vermenigvuldigen geeft het resultaat.

e. $a+5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{26+26a^2}$ kwadrateren geeft:

$a^2+10a+25 = 13+13a^2 \Leftrightarrow a = 1\frac{1}{2}$ of $a = -\frac{2}{3}$.

Beide voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.
Dus $a = 1\frac{1}{2}$ of $a = -\frac{2}{3}$.

d. Veelvouden van $(1\frac{1}{2},1)$ of $(-\frac{2}{3},1)$, mooier:
veelvouden van (3,2) of (-2,3).



3 a. Zie plaatje: $\alpha+\beta = 90°$ (hoekensom driehoek *ABD*), $\gamma+\beta = 90°$ (hoekensom driehoek *BCE*); dus $\alpha = \gamma$.

b. α is de hoek tussen de normaalvectoren (2,3) en (3,-4). Dan $\cos\alpha = \dfrac{-6}{\sqrt{13}\sqrt{25}}$, dus $\alpha \approx 109°$.

De hoek tussen de lijnen is dan 71°.

c. α is de hoek tussen de normaalvectoren (2,-1) en (1,1). Dan $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, dus $\alpha \approx 63°$.

De hoek tussen de lijnen is dan 63°.

4 a. $(1,m)$

b. Bijvoorbeeld: $(x,y) = (0,q) + t\,(1,m)$

c. De verticale (evenwijdig aan de *y*-as).

5 **a.** $b = 0$
b. $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$
c. $-\frac{a}{b}$

6 **a.** $\frac{3}{4}$, $-m$
b. $\frac{1}{2}$, $\tan \angle CAB = \frac{1}{2}$, $\angle CAB = 63°$
d. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, -1, $-\sqrt{3}$
e. $\tan -70° = -2{,}75$, dus -2,75

7 **a.** **De** richtingsvector (-2,3) heeft hellingshoek α, dan $\tan \alpha = -1\frac{1}{2}$, dus $\alpha = -56°$
b. Normaalvector van die lijn is (2,5), dus richtingsvector (-5,2). Als hellingshoek $= \alpha$, dan $\tan \alpha = -2\frac{1}{2}$, dus $\alpha = -68°$.

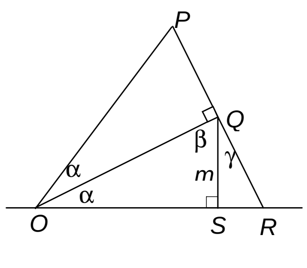
8 **a.** $(1,n) \cdot (1,m) = 0 \Leftrightarrow 1 + m\,n = 0$.
b. richtingscoëfficiënt $= \frac{4}{5}$, dus $y = \frac{4}{5}x + q$. Het punt (4,-3) moet op de lijn liggen, dus: $-3 = 3\frac{1}{5} + q$, dus $q = -6\frac{1}{5}$. Vergelijking $y = \frac{4}{5}x - 6\frac{1}{5}$.

9 **b.** 26,565..
d. 53,130..
e. cosinus hoek tussen (1,0) en (4,2) $= \dfrac{4}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$;

cosinus hoek tussen (4,2) en (3,4) $= \dfrac{20}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{25}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

f. De vectoren (5,0) en (3,4) zijn even lang; als je optelt volgens de parallellogrammethode krijg je een vector die de hoek tussen (5,0) en (3,4) middendoor deelt (Eigenschap van een ruit: diagonaal deelt hoeken middendoor)
g. Richtingscoëfficiënt bij richtingsvector (1,2): $m = \frac{1}{2}$ en bij richtingsvector (4,3): $m = 1\frac{1}{3}$.
$m = \frac{1}{2}$ invullen in $\dfrac{2m}{1-m^2}$ geeft $1\frac{1}{3}$.

h. $\dfrac{2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}$



10 **a.** $\alpha + \beta = 90°$, hoekensom in driehoek *OSQ*.
$\beta + \gamma = 90°$ (rechte hoek), dus $\alpha = \gamma$. De driehoeken *OQS* en *QRS* hebben de hoeken gelijk; ze zijn dus gelijkvormig.
b. $OS \cdot SR = QS^2$, dus $m^2 = 1 \cdot SR$, dus $R = (m^2 + 1{,}0)$.
c. $\overrightarrow{RQ} = (-m^2, m)$, dus $P = (1 - m^2, 2m)$.
d. Dan ligt *P* op de *y*-as en is de helling ∞.
De noemer van $\dfrac{2m}{1-m^2}$ wordt dan 0.
Een positief getal gedeeld door 0 wordt ∞.

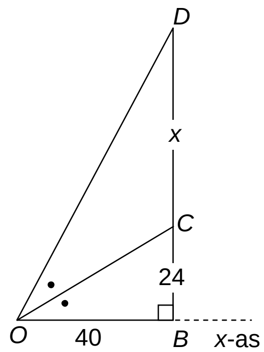
11 b. Uit de eerste regel van **a** volgt:

(1) $\cos\varphi \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+m^2} = 1 + mx$ en uit de tweede:

(2) $\cos\varphi \cdot \sqrt{1+m^2} = 1$

Als je (2) in (1) invult, krijg je: $1 + mx = \sqrt{1+x^2}$.

c. Kwadrateren geeft: $1 + 2mx + m^2x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$
$2mx + m^2x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2m + m^2x = x \Leftrightarrow 2m = (1-m^2)x$, dus
$x = \dfrac{2m}{1-m^2}$.



12 Zie plaatje: helling $OC = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$, dus helling $OD =$

$\dfrac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1-\frac{9}{25}} = \dfrac{15}{8}$. Maar ook helling $OD = \dfrac{x+24}{40}$. Dus:

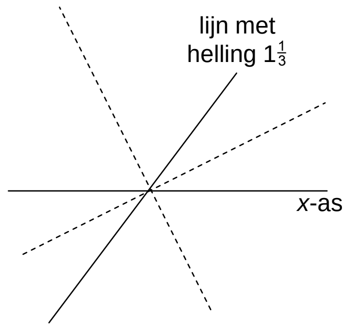
$\dfrac{x+24}{40} = \dfrac{15}{8}$, dus $x + 24 = 75$, dus $x = 51$.

13 a. $\alpha = \text{inv}\tan 1\frac{1}{3} \approx 53,\ldots$, $\frac{1}{2}\alpha \approx 26,56\ldots$, dus
$m = \tan 26,56\ldots \approx 0,5$

b. $\dfrac{2m}{1-m^2} = 1\frac{1}{3} \Leftrightarrow 1-m^2 = \frac{3}{4} \cdot 2m = 1\frac{1}{2}m$, dus
$2m^2 + 3m - 2 = 0$.

c. Met *abc*-formule $m = \frac{1}{2}$ of $m = -2$.

d. De twee deellijnen van de hoeken tussen de lijn met helling $1\frac{1}{3}$ en de x-as hebben beide de eigenschap, dat als je de hellingshoek verdubbelt, je de lijn met helling $1\frac{1}{3}$ krijgt. Omdat de deellijnen loodrecht op elkaar staan, is het product van de hellingen -1.



e. $m = \frac{1}{2}$, want α is positief, dus $\frac{1}{2}\alpha$ ook, dus m ook.

14 De hellingshoek van p is de helft van de hellingshoek van k. Noem de richtingscoëfficiënt van p: m . Dan geldt:

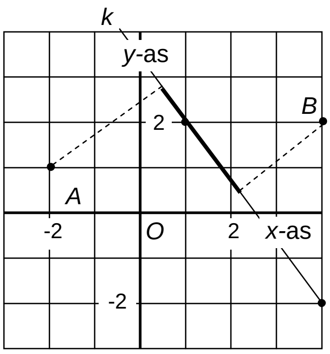
$\dfrac{2m}{1-m^2} = \dfrac{24}{7} \Leftrightarrow 24 - 24m^2 = 14m \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ of $m = -1\frac{1}{3}$

Dus $m = \frac{3}{4}$.

p: $(x,y) = (3,0) + t\,(4,3)$ en q: $(x,y) = (3,0) + t\,(-3,4)$.

15 **a.** Noem de oorspronkelijke lijn k en de gedraaide lijn s. Een richtingsvector van k is $(1,m)$. Als je k over 90° tegen de wijzers van de klok in draait, krijg je de lijn met richtingscoëfficiënt $(-m,1)$. De vectoren $(1,m)$ en $(-m,1)$ zijn even lang, dus hun som $(1-m, 1+m)$ is een richtingsvector van s. De richtingscoëfficiënt van s is dus: $\dfrac{1+m}{1-m}$.

Paragraaf 4 Projecties



1 **a.** Zie het plaatje hiernaast. De projectie is vet getekend.

b. Een richtingsvector van k is: $(3,-4)$. $\overrightarrow{AB} = (6,1)$, dus de lengte van de projectie is $\dfrac{(3,-4)\cdot(6,1)}{|(3,-4)|} = \dfrac{14}{\sqrt{25}} = 2\tfrac{4}{5}$.

2 **a.** $R(6,2)$

b. normaalvector k is $(2,1)$, normaalvector m is $(1,-2)$ en $(2,1) \perp (1,-2)$.

c. $\overrightarrow{PR} = (4,0)$, richtingsvector k is $(1,-2)$, de projectie van $\overrightarrow{PR}$ op k heeft lengte $\dfrac{(4,0)\cdot(1,-2)}{|(1,-2)|} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \tfrac{4}{5}\sqrt{5}$;

richtingsvector m is $(2,1)$, de projectie van $\overrightarrow{PR}$ op m heeft lengte $\dfrac{(4,0)\cdot(2,1)}{|(2,1)|} = \dfrac{8}{\sqrt{5}} = 1\tfrac{3}{5}\sqrt{5}$.

Oppervlakte $PQRS = 1\tfrac{3}{5}\sqrt{5} \cdot \tfrac{4}{5}\sqrt{5} = 6\tfrac{2}{5}$

3 **a.** De afstand is $\dfrac{(1,4)\cdot(-1,3)}{|(1,4)|} = \dfrac{11}{\sqrt{17}} = \tfrac{11}{17}\sqrt{17}$.

b. $\dfrac{(1,4)\cdot(1,5)}{|(1,4)|} = \dfrac{21}{\sqrt{17}} = 1\tfrac{4}{17}\sqrt{17}$

c. Bijvoorbeeld $Q = (6,1)$, dan $\overrightarrow{AQ} = (8,3)$.

Afstand $= \dfrac{(3,4)\cdot(8,3)}{|(3,4)|} = \dfrac{36}{\sqrt{25}} = 7\tfrac{1}{5}$

4 Punt van de lijn is $P(4,2)$, Het punt $(3,-1)$ noemen we A. Dan $\overrightarrow{AP} = (-1,-3)$.

De afstand is $\dfrac{|(-1,-3)\cdot(4,-5)|}{|(4,-5)|} = \dfrac{11}{\sqrt{41}} = \tfrac{11}{41}\sqrt{41}$

5 **a.** $\dfrac{|(0,10)\cdot(1,2)|}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} > 8$, dus glijdt naar beneden

b. $5\sqrt{2} < 8$, dus glijdt niet naar beneden

c. $\dfrac{|(0,10)\cdot(1,a)|}{\sqrt{1+a^2}} = 8 \Leftrightarrow 10a = 8\sqrt{a^2+1}$

Kwadrateren geeft: $100a^2 = 64a^2 + 64$, dus $a = 1\frac{1}{3}$

6 $\dfrac{(5,1)\cdot(2,1)}{|(2,1)|} = \dfrac{11}{\sqrt{5}} = 2\frac{1}{5}\sqrt{5}$

7 **a.** 0

b. (a,b)

c. $\dfrac{|(a_1-p_1,a_2-p_2)\cdot(a,b)|}{|(a,b)|} = \dfrac{|a_1\cdot a + a_2\cdot b - (p_1\cdot \mathrm{a} + p_2\cdot b)|}{|(a,b)|}$

8 **a.** $\dfrac{|5\cdot 1 + 1\cdot 2 - 20|}{\sqrt{5^2+1^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{26}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

b. Een vergelijking van de lijn is: $x - 3y + 10 = 0$,

de afstand is dan $\dfrac{|1\cdot 3 - 3\cdot -2 + 10|}{\sqrt{10}} = 1\frac{9}{10}\sqrt{10}$.

c. We nemen bijvoorbeeld als basis lijnstuk *AB*. De hoogte van driehoek *ABC* is dan de afstand van *C* tot lijn *AB*. $\overrightarrow{AB} =$ (2,-4). Een vergelijking van lijn *AB* is: $2x + y = 0$.

De afstand van *C* tot lijn *AB* is: $\dfrac{|2\cdot 10 + 1\cdot 10|}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$

De lengte van lijnstuk $AB = 2\sqrt{5}$, dus oppervlakte driehoek $ABC = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 30$.