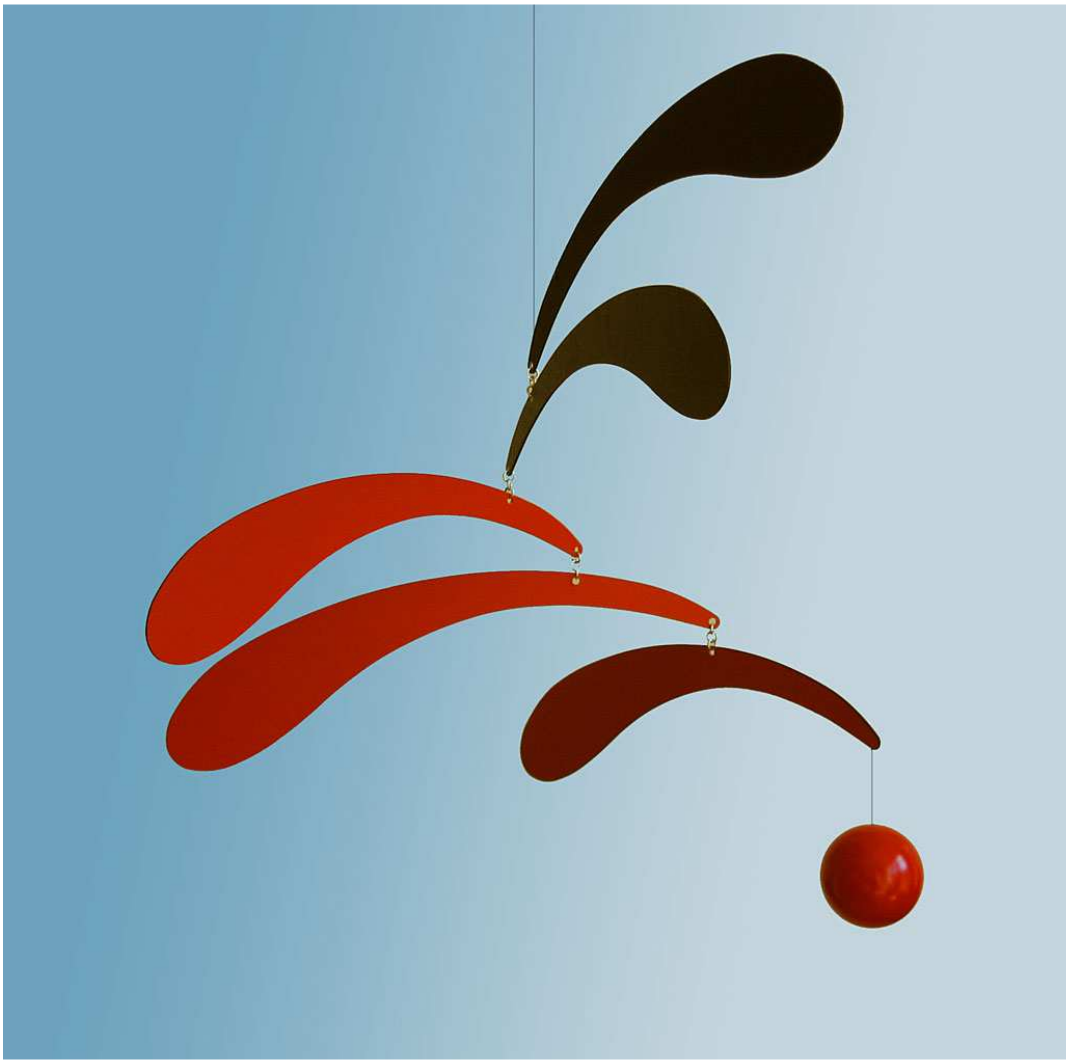
2 Verschuiven



Dit is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten
Blok *Punten met gewicht*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2014) wiskunde B vwo.

Opgaven met dit merkteken kun je zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

1	**Vectoren**	**1**
2	**Toepassingen**	**7**
3	**Rechthoekscoördinaten**	**13**
4	**Op zoek naar evenwicht**	**21**
5	**De stelling van Ceva**	**29**
6	**Antwoorden**	**34**

Eerste uitgave, februari 2010

Colofon

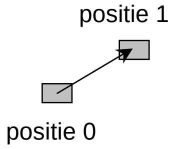
Auteurs Aad Goddijn, Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh,

Met medewerking van Josephine Buskes, Richard Berends, Sieb Kemme, Dick Klingens

Illustraties Wilson Design, Uden

1 Vectoren

We werken in het platte vlak.

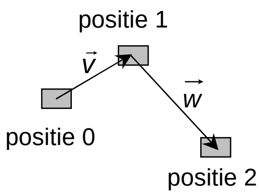


* **1** Joeri verplaatst een kist van positie 0 naar positie 1.

Een verplaatsing gaat in een bepaalde *richting* over een bepaalde *afstand*. Een **pijl** is het geschikte middel om zo'n verplaatsing weer te geven. Hierbij is de lengte van de pijl de afstand waarover verplaatst wordt. Waar die pijl geplaatst wordt, is niet van belang. In het vervolg noemen we een verplaatsing een **vector**.

Latijn: *vector* is *drager*, iemand die iets van de ene naar de andere plaats draagt.

Om vectoren van getallen te onderscheiden, noteren we ze als een letter met een pijl erboven, bijvoorbeeld $\vec{v}$.



Anne verplaatst de kist van positie 1 naar positie 2.
De vector bij Joeri's verplaatsing noemen we $\vec{v}$, die bij Anne noemen we $\vec{w}$.

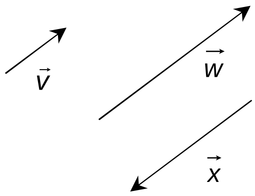
Met $2 \cdot \vec{v}$ bedoelen we de verplaatsing over een twee keer zo grote afstand als $\vec{v}$, in dezelfde richting.
Met $\vec{v}+\vec{w}$ bedoelen we de verplaatsing die je krijgt door eerst over $\vec{v}$ te verplaatsen, gevolgd door de verplaatsing over $\vec{w}$ (of andersom).

a. Teken op het werkblad een pijl die hoort bij de vector $\vec{v}+\vec{w}$ en een pijl die hoort bij de vector $2 \cdot \vec{v}$.

Met $-\vec{v}$ bedoelen we de verplaatsing over dezelfde afstand als $\vec{v}$, maar dan in tegengestelde richting.
De vectoren $-\vec{v}$ en $\vec{v}$ zijn **tegengestelde vectoren**.

b. Teken de vector $-\vec{v}$ en $-(\vec{v}+\vec{w})$.

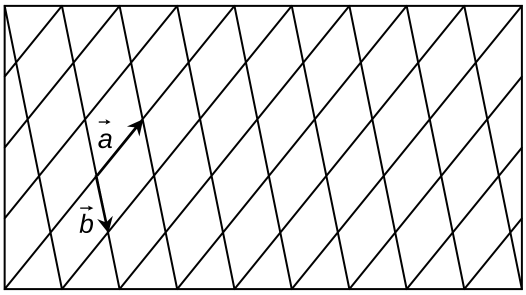
Als twee vectoren in elkaars verlengde liggen (als we ze in hetzelfde punt laten beginnen), dan is de een veelvoud van de ander.



Zo zijn in het plaatje hiernaast, de vectoren $\vec{w}$ en $\vec{x}$ veelvouden van $\vec{v}$, dat wil zeggen er zijn getallen *k* en *m* zó, dat $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ en $\vec{x} = m \cdot \vec{v}$.

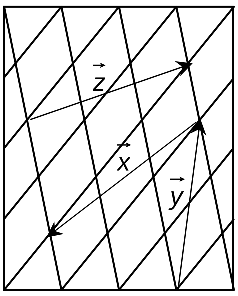
c. Bepaal de getallen *k* en *m* (meten).

Bij twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, die niet in elkaars verlengde liggen, kun je een rooster maken; zie hieronder.

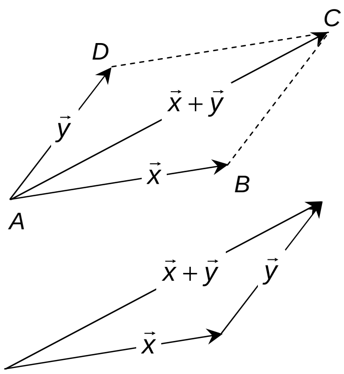


d. Teken in het rooster op het werkblad pijlen die de vectoren $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} + -\vec{b}$ en $-\vec{a} + 2\vec{b}$ voorstellen.

Meestal schrijven we $\vec{a} - \vec{b}$, in plaats van $\vec{a} + -\vec{b}$.



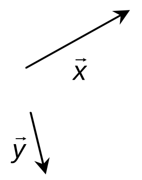
2 We gaan verder met de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ van opgave **1**. Elke vector die roosterpunten naar roosterpunten verplaatst, kun je schrijven als $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$, voor zekere gehele getallen *k* en *m*.
Zoek die getallen voor de vectoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ in het plaatje hiernaast.



Er zijn twee manieren om bij twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ de **somvector** $\vec{x} + \vec{y}$ te tekenen.

- Als je $\vec{x}$ en $\vec{y}$ in hetzelfde punt laat beginnen, dan krijg je $\vec{x} + \vec{y}$ als diagonaal van het parallellogram *ABDC* zoals hiernaast. Deze manier noemen we de **parallellogrammethode**.
- Het kan ook zo.

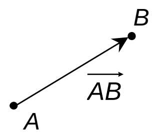
Je laat de *staart* van $\vec{y}$ beginnen bij de *kop* van $\vec{x}$. De pijl die wijst van de staart van $\vec{x}$ naar de kop van $\vec{y}$ stelt de verplaatsing $\vec{x} + \vec{y}$ voor. Deze manier noemen we **kop-staartmethode**.



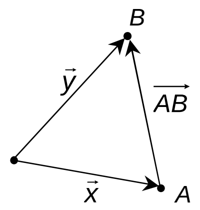
3 Teken twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ zoals hiernaast.

a. Teken met de kop-staartmethode de vectoren $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{y}$ en $\vec{x}+2\vec{y}$.

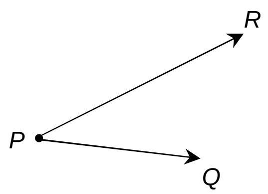
b. Teken met de parallellogrammethode de vectoren $2\vec{x}+\vec{y}$ en $\vec{x}-2\vec{y}$.



De vector die het punt A naar het punt B verplaatst, noteren we met $\overrightarrow{AB}$.



4 Zie het plaatje hiernaast en ga na: $\overrightarrow{AB} = \vec{y} - \vec{x}$.

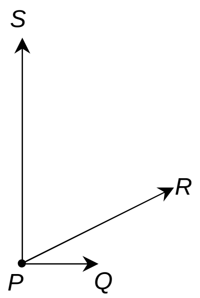


* **5** De vectoren $\overrightarrow{PR}$ en $\overrightarrow{PQ}$ hiernaast staan ook op het werkblad.

a. Teken de vector $2\cdot\overrightarrow{PQ}+1\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PR}$.

(Hoewel we niet afgesproken hebben wat $k\cdot\overrightarrow{PR}$ betekent als k niet geheel is, zal wel duidelijk zijn wat er mee bedoeld wordt.)

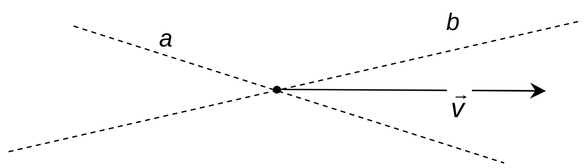
b. Teken de vector $2\cdot\overrightarrow{PQ}-1\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PR}$.



* **6** Het plaatje hiernaast staat ook op het werkblad.
Er zijn gehele getallen k en m zó, dat
$\overrightarrow{PS} = k\cdot\overrightarrow{PQ} + m\cdot\overrightarrow{PR}$.
Zoek uit welke (gehele) getallen k en m zijn.
Tip. Teken lijnen door S evenwijdig aan lijn PQ en lijn PR.

In opgave **6** hebben we de vector $\overrightarrow{PS}$ **ontbonden** ten opzichte van de vectoren $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{PR}$.

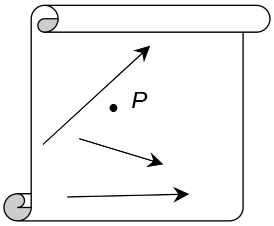
* **7**



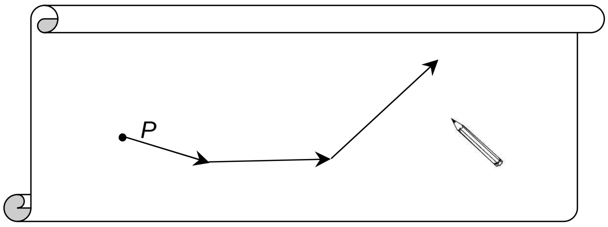
Teken twee vectoren, één op lijn *a* en één op lijn *b*, zó dat de som van de vectoren die je getekend hebt de vector $\vec{v}$ in het plaatje oplevert.

De twee vectoren die je getekend hebt in opgave **7**, heten de **componenten van** $\vec{v}$ ten opzichte van *a* en *b*.

Zo heb je in opgave **6** de componenten van de vector $\overrightarrow{PS}$ ten opzichte van de lijnen *PQ* en *PR* bepaald.)



8 Teken drie vectoren en een punt *P* zoals hiernaast. Je kunt het punt *P* in zes verschillende volgordes over de drie vectoren verplaatsen. Hieronder is er één getekend volgens de kop-staartmethode.
Teken de andere vijf.



Dat je in opgave **8** in alle zes de gevallen hetzelfde resultaat krijgt, is een gevolg van de volgende regels die voor het optellen van vectoren gelden.

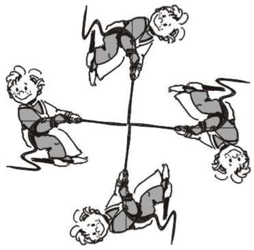
Associatiewet $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

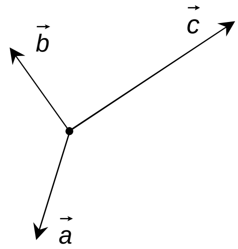
Commutatiewet $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Als je twee vectoren optelt, krijg je weer een vector. De vector die je krijgt door twee tegengestelde vectoren op te tellen, noemen we de nulvector.

De vector met lengte 0 geven we aan met $\vec{0}$. We noemen dit de **nulvector**.
Er geldt: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$ voor elke vector $\vec{v}$.

*** 9**





Vier touwen zijn aan elkaar geknoopt. Aan elk van de touwen trekt een krachtpatser. De trekkrachten worden voorgesteld door de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$. Hiervan zijn $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ al getekend.

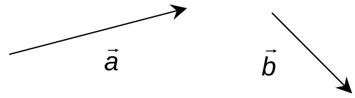
a. Welke van de drie trekkrachten is het grootst?

De vier krachtpatsers houden elkaar precies in evenwicht.

b. Teken de vector $\vec{d}$.

Er geldt: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

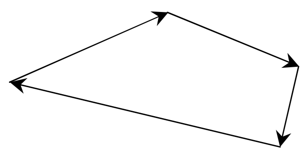
10 a. Teken twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zoals hieronder.

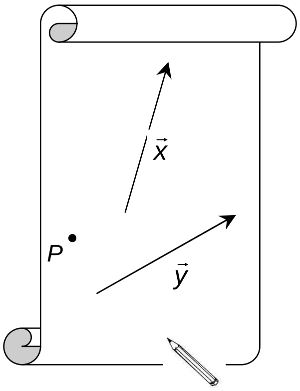


Teken de vector $\vec{x}$ zó, dat $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$.

b. Ga met een tekening na: $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$.

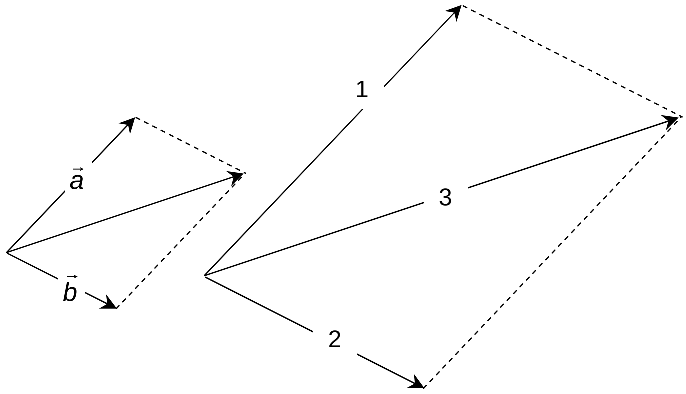
11 Hieronder zijn vier vectoren getekend. Wat kun je over de som van deze vier vectoren zeggen?





* **12 a.** Teken op het werkblad het punt waarnaar P verplaatst wordt over $\vec{x}$ en zet er P_0 bij.
b. Teken het punt waarnaar P verplaatst wordt over $\vec{x}+\vec{y}$ en zet er P_1 bij.
Teken ook de punten die je krijgt door P te verplaatsen over $\vec{x}+2\vec{y}$ en $\vec{x}-\vec{y}$ zet er P_2 en P_{-1} bij.
c. Het punt P wordt verplaatst over alle mogelijke vectoren van de vorm $\vec{x}+k\cdot\vec{y}$ waarbij k een willekeurig (niet noodzakelijk geheel) getal is.
Kleur de punten waarnaar P verschoven kan zijn.

13

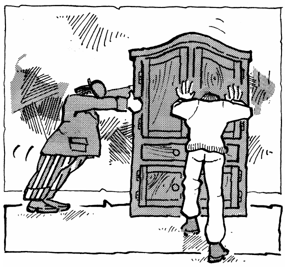


De ene figuur hierboven is met factor 2 uitvergroot tot de andere. Dus: vector 1 is $2\cdot\vec{a}$ en vector 2 is $2\cdot\vec{b}$.
Vector 3 kun je op twee manieren schrijven, één keer met en één keer zonder haakjes. Doe dat.

Voor alle getallen k en m en vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt:
$k\cdot(\vec{a}+\vec{b})=k\cdot\vec{a}+k\cdot\vec{b}$;
$k\cdot(m\cdot\vec{a})=(k\cdot m)\cdot\vec{a}$

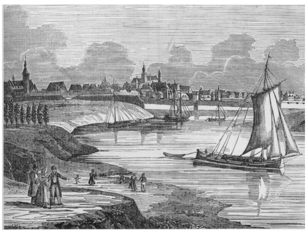
14 De eerste regel regel volgt uit gelijkvormigheid; zie opgave **13**.
Laat in een plaatje zien dat de tweede regel klopt voor $k=2$ en $m=-1\frac{1}{2}$.

2 Toepassingen



1 Ollie en Stan duwen een zware kast. Ollie duwt drie keer zo hard als Stan. Ollie duwt tegen de linkerzijkant en Stan duwt tegen de voorkant van de kast.
De krachten van Ollie en Stan kun je voorstellen door vectoren. De vector die bij het duwen van Ollie hoort, is langer dan de vector die bij het duwen van Stan hoort.
a. Hoeveel keer zo lang?
b. Teken in een bovenaanzicht heel precies de richting waarin de kast verschoven wordt.

De vector die je in **b** getekend hebt, is de **resultante** van de vectoren bij de krachten van Ollie en Stan.

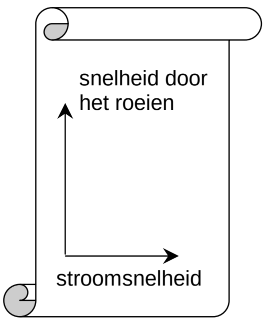


Gezicht op Venlo en de Maas vanuit het noorden (anoniem ongeveer 1840)

2 Jaap dobbert in een roeibootje op de Maas. De Maas heeft daar een stroomsnelheid van 3 km/u.
a. Teken een pijl van 3 cm lengte. Die stelt de stroomvector van de Maas voor.
Zo wordt het bootje verplaatst als Jaap niet roeit.

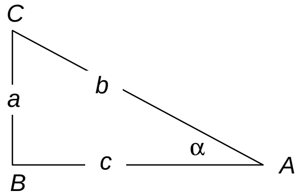
Jaap gaat met een snelheid van 4 km/u roeien (dat wil zeggen: in stilstaand water zou de boot een snelheid van 4 km/u hebben).
b. Teken de ‘netto’-verplaatsingsvector van het bootje als Jaap met de stroom mee roeit.

De verplaatsingsvector die je getekend hebt, is de resultante van de vector bij de stroomsnelheid en de vector bij het roeien.
c. Hoe lang heb je de vector gemaakt?
d. Teken de verplaatsingsvector als Jaap tegen de stroom in roeit. Hoe lang is de vector nu?



Hiernaast zijn (verkleind) de vectoren getekend die de stroomsnelheid en de roeisnelheid weergeven als Jaap loodrecht op de richting van de stroom roeit.
e. Teken de resultante van de twee vectoren, de snelheidsvector van het bootje.
f. Bereken de snelheid van het bootje.
g. Bereken de hoek tussen de richting die het bootje opgaat en de richting waarin de rivier stroomt in graden nauwkeurig. Als je niet weet hoe dat moet, lees dan eerst het volgende.

.

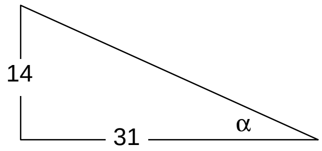


Intermezzo

In de rechthoekige driehoek *ABC* geldt: $\sin\alpha = \frac{a}{b}$

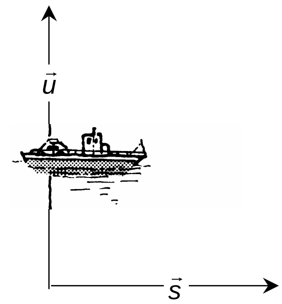
$\cos\alpha = \frac{c}{b}$

$\tan\alpha = \frac{a}{c}$



Voorbeeld

In de rechthoekige driehoek hiernaast is $\tan\alpha = \frac{14}{31}$,
met het rekenmachientje vind je dan: $\alpha \approx 24{,}3°$.



3 Veerboot op de Maas

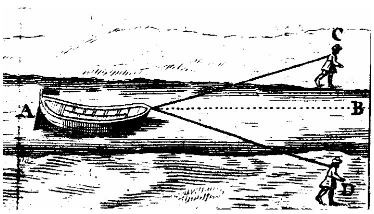
Een veerboot vaart loodrecht de rivier over, doordat de veerman de boot schuin tegen de stroom in stuurt. De stroomsnelheid van de rivier is weer 3 km/u en wordt weergegeven met een pijl $\vec{s}$ van 3 cm. De pijl $\vec{u}$ daar loodrecht op is 3,75 cm lang.

a. Neem de figuur over en teken de vector $\vec{v}$ zó, dat $\vec{s} + \vec{v} = \vec{u}$

b. Bereken de lengte van $\vec{v}$ in één decimaal en de hoek die $\vec{v}$ met $\vec{s}$ maakt in graden nauwkeurig.
Welke snelheid moet de veerboot uit zichzelf maken?

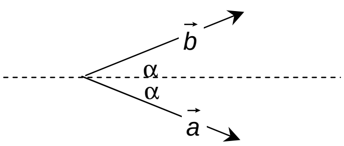
De lengte van een vector $\vec{v}$ noteren we met $|\vec{v}\,|$.

In opgave **3** geldt: $|\vec{s}\,| = 3$.



Uit: Nollet, *Leçons de Physique Experimentale,* M.DCC.LIII

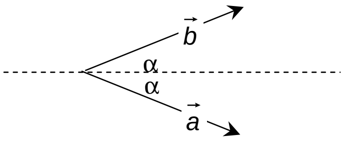
Een jaagpad of trekpad is een pad langs een kanaal of rivier dat vroeger werd gebruikt om schepen, gewoonlijk vrachtschepen, als de wind niet gunstig was, vooruit te trekken. Dit voorttrekken werd jagen genoemd, vandaar de naam. Gewoonlijk gebeurde dit door de schipper, zijn vrouw of samen met hun kinderen. Trekschuiten werden altijd gejaagd. Als er geld voor was, kon voor het jagen een paard met begeleider ingehuurd worden.
Uit: Wikipedia



4 Jaagpad 1

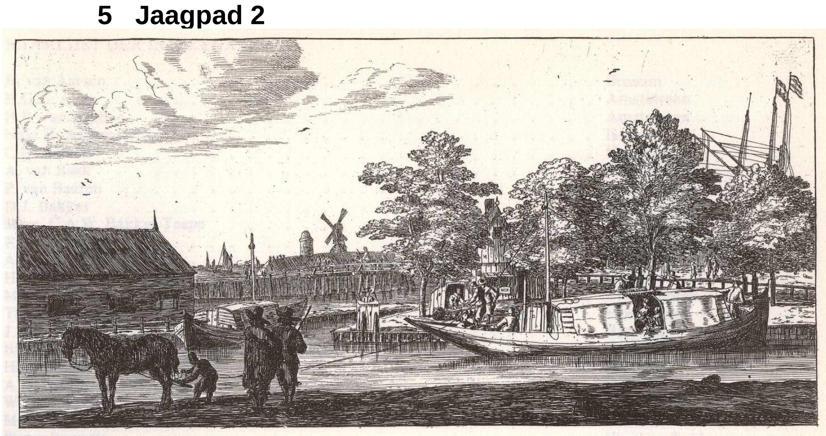
Hierboven zie je een boot voortgetrokken door twee mensen, elk aan een zijde van het water. We gaan er vanuit dat beiden even hard trekken. We stellen hun trekkracht voor door vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ van lengte 2. De

hoek tussen de richting waarin getrokken wordt en de richting waarin de boot beweegt, noemen we α.
We nemen $\alpha = 60°$.



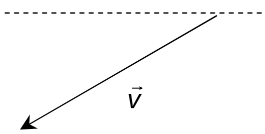
a. Neem de tekening hiernaast over en teken $\vec{a}+\vec{b}$, dat is de resultante van de trekkrachten $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Wat is $|\vec{a}+\vec{b}|$ (exact)?
b. Teken $\vec{a}-\vec{b}$.
c. Wat is $|\vec{a}-\vec{b}|$ exact?

5 Jaagpad 2



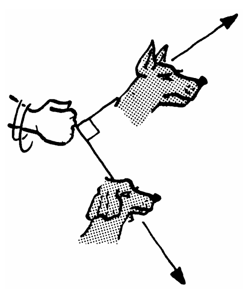
Trekschuit
Reinier Nooms
rond 1650

De kracht waarmee het paard op het jaagpad de schuit hierboven voorttrekt, loopt niet in de richting waarin de schuit zich verplaatst. De trekkracht van het paard geven we weer met de vector $\vec{v}$. Neem aan dat deze een hoek maakt van 30° met de richting waarin de schuit zich verplaatst.



a. Ontbind $\vec{v}$ in een vector $\vec{u}$ in de vaarrichting en een vector $\vec{w}$ in de richting daar loodrecht op.

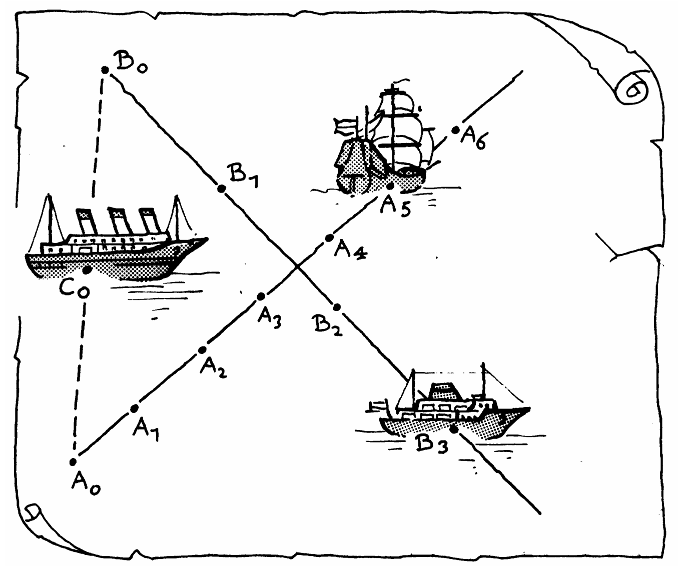
De component $\vec{w}$ van $\vec{v}$ draagt niet bij aan de snelheid waarmee de schuit beweegt. Hij wordt 'opgevangen'. De component $\vec{u}$ bepaalt de snelheid van de schuit.
b. Bepaal $|\vec{u}|$ en $|\vec{w}|$ als $|\vec{v}| = 3$.



6 Mieke laat haar beide hondjes uit, ieder hondje netjes aan de lijn. De hondjes trekken even hard. De richtingen waarin ze trekken, staan loodrecht op elkaar. Mieke trekt even hard terug.
a. Neem het plaatje over en geef de kracht waarmee Mieke trekt aan met een pijl.
b. Hoeveel keer zo groot is de kracht waarmee Mieke trekt als die waarmee elk van de honden trekt?

* **7 Vlootschouw**

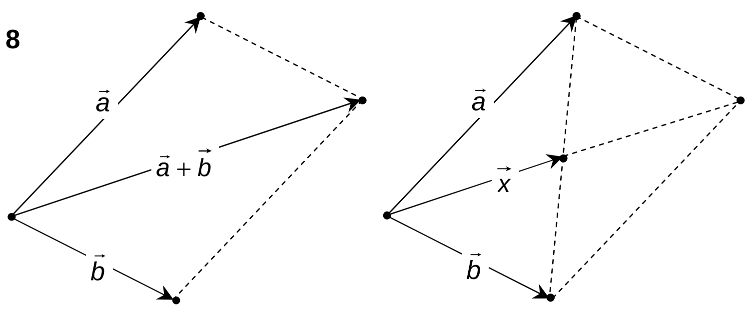
Tijdens een onderdeel van de vlootschouw zijn drie schepen in actie. Schip *A* vaart met een constante snelheid van 5 mijl per uur, schip *B* vaart met een constante snelheid van 10 mijl per uur. Schip *C* heeft van de leiding de opdracht gekregen op elk moment precies midden tussen de schepen *A* en *B* in te varen (om esthetische redenen). A_0 en B_0 zijn de startposities van A en *B*; A_1 en B_1 de posities van *A* en *B* na 1 minuut, enzovoort.



a. Zoek uit waar schip *C* zich na 1, 2, 3, ... minuten bevindt. Geef die plaatsen op het werkblad aan met C_1, C_2, C_3,... . De plaats C_0 is al aangegeven.

Het ziet er naar uit dat schip *C* zich over een rechte lijn beweegt. We kunnen dit inzien door gebruik te maken van vectoren.

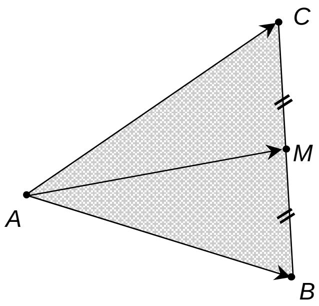
8



In de figuur linksboven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ volgens de parallellogrammethode opgeteld.
De vector $\vec{x}$ rechtsboven heeft hetzelfde startpunt als $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en wijst naar het midden van het parallellogram.

Zoals bekend, delen de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor.

Welke uitdrukking voor $\vec{x}$ in $\vec{a}$ en $\vec{b}$ volgt hieruit?



In driehoek *ABC* is *M* het midden van *BC*.
Dan: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

9 Terug naar de vlootschouw.
De verplaatsing van schip *A* in één minuut noteren we met $\vec{x}$ en de verplaatsing van schip B in één minuut met de vector $\vec{y}$. We schrijven kort $\vec{a}$ voor $\overrightarrow{C_0A_0}$; dan is $\overrightarrow{C_0B_0} = -\vec{a}$.

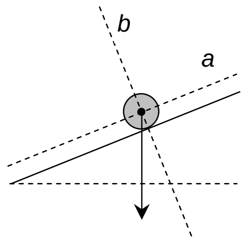
a. Ga na dat $\overrightarrow{C_0A_1} = \vec{a} + \vec{x}$ en $\overrightarrow{C_0B_1} = -\vec{a} + \vec{y}$.

b. Druk $\overrightarrow{C_0C_1}$ uit in $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{a}$.

c. Druk vervolgens $\overrightarrow{C_0C_2}$, $\overrightarrow{C_0C_3}$ ... , enzovoort in $\vec{x}$ en $\vec{y}$ uit.

d. Hoe kun je aan de uitdrukkingen in **c** zien dat *C* over een rechte lijn beweegt?

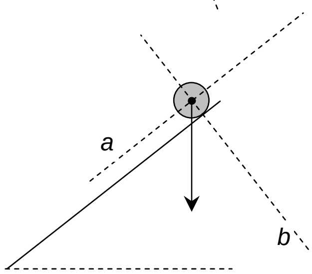
e. Neem aan dat de hoek tussen de routes van de schepen *A* en *B* 90° is. Met welke snelheid (exact) moet *C* dan varen? (*A* voer met 5 mijl per uur en *B* met 10 mijl per uur.)



* **10 Een rollende knikker**
Een knikker die op een hellend vlak ligt, rolt naar beneden door werking van de zwaartekracht. Hoe groter de helling van het vlak, hoe sneller de knikker rolt.

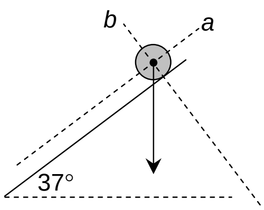
De zwaartekracht werkt verticaal. Hiernaast zie je dezelfde knikker op twee verschillende hellingen. (De plaatjes staan ook op het werkblad.) De zwaartekracht is weergegeven door een vector.

a. Ontbind de zwaartekrachtvector in beide gevallen langs de lijnen *a* en *b*.



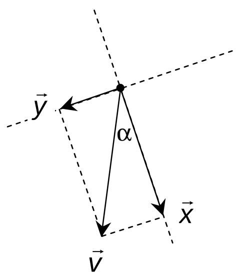
Lijn *b* staat loodrecht op het vlak *V* waarlangs de knikker rolt. We noemen lijn *b* een **normaal** van *V*. Een vector die loodrecht op een vlak staat noemen we **normaalvector** van dat vlak. De component langs *b* die je in **a** getekend hebt is een normaalvector van *V*.

De component in de richting van *b* drukt op het vlak. We nemen aan dat deze component geen invloed op de beweging van de knikker heeft. (In de natuurkunde zegt men: de rolweerstand wordt verwaarloosd).
De component in de richting van *a* zorgt voor de beweging van de knikker. Deze component is groter naarmate de helling van het vlak groter is.



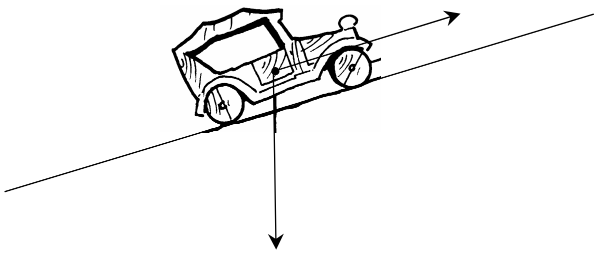
Hiernaast is de helling van het vlak waarop de knikker ligt 37°. De lengte van de zwaartekrachtvector is 12.

b. Leg uit dat de hoek tussen de zwaartekrachtvector en lijn *b* ook 37° is en benader de component van de zwaartekrachtvector langs *b* in twee decimalen.



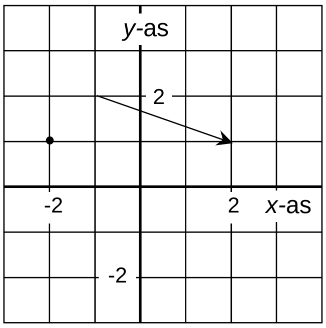
De vector $\vec{v}$ in het plaatje hiernaast is ontbonden in twee onderling loodrechte componenten $\vec{x}$ en $\vec{y}$.
Er geldt: $|\vec{x}| = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ en $|\vec{y}| = |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$.

*** 11**

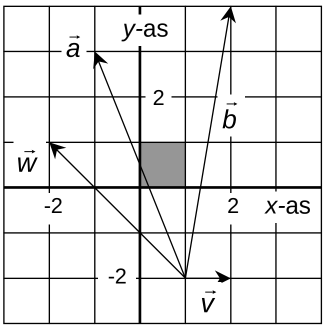


Een auto wordt een helling op getrokken. De trekkracht en de zwaartekracht die op de auto uitgeoefend worden, zijn weergegeven door pijlen.
a. Ontbind de zwaartekrachtvector in een component in de richting van het hellend vlak en in de richting van de normaalvector van het vlak.
b. Vergelijk de lengte van de pijlen. Krijgt hij de auto de helling op? (De rolweerstand wordt verwaarloosd.)

3 Rechthoekscoördinaten



In deze paragraaf werken we in een rooster van vierkanten van 1 bij 1. Na keuze van een oorsprong en een assenstelsel, kunnen we elk punt in het vlak aangeven door een tweetal getallen (een getallenpaar). We werken dan zogezegd met **rechthoekscoördinaten**. Het getekende punt in het rooster heeft eerste coördinaat -2 en tweede coördinaat 1; we noteren het als (-2,1).
Een verplaatsing in het rooster geven we ook met een getallenpaar. Zo geven we de getekende vector aan met (3,-1). We noemen het paar (3,-1) de **kentallen** van de vector. Dit is verwarrend, maar uit de context zal steeds blijken wat bedoeld wordt.



* **1** In het rooster hiernaast is een aantal vectoren getekend. Verder is een roosterhokje grijs gemaakt.
a. Geef de kentallen van de vier vectoren en bereken hun exacte lengte.

Het grijze hokje wordt verplaatst over vectoren van de vorm $k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$, waarbij *k* en *m* gehele getallen zijn.
b. Geef op het werkblad met grijs aan welke hokjes bereikt worden.
c. Ontbind de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in componenten in de richtingen van $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en geef de getallen *k* en *m* zó dat $\vec{a} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$, respectievelijk $\vec{b} = k \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$.

2 $\vec{v}$ = (2,3) en $\vec{w}$ = (-1,-2)
a. Teken in een rechthoekig rooster de vectoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ en $\vec{v} + \vec{w}$.
Wat zijn de kentallen van $\vec{v} + \vec{w}$?
b. Teken $2 \cdot \vec{v}$.
Wat zijn de kentallen van $2 \cdot \vec{v}$?

Als je een vector met een getal vermenigvuldigt, moet je beide kentallen met dat getal vermenigvuldigen.
Als je twee vectoren optelt, moet je de kentallen plaatsgewijs optellen.
In formules:
Als $\vec{v}$ = (*a*,*b*) en $\vec{w}$ = (*c*,*d*),
dan $\vec{v} + \vec{w}$ = (*a*+*c* , *b*+*d*) en $k \cdot \vec{v}$ = (*ka*,*kb*)

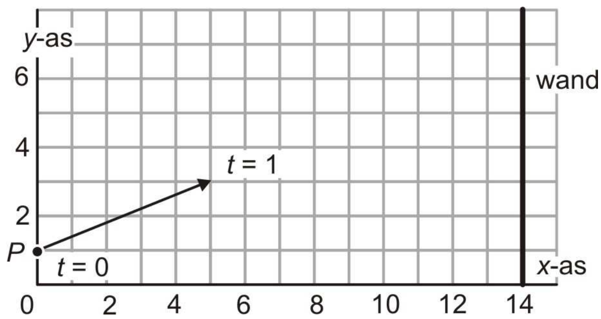
Voorbeeld 1

Als $\vec{a} = (2,3)$ en $\vec{b} = (\text{-}1,2)$ dan

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (2 \cdot 2\ ,\ 2 \cdot 3) + (\text{-}3 \cdot \text{-}1\ ,\ \text{-}3 \cdot 2)$$
$$= (4,6) + (3,\text{-}6) = (4+3\ ,\ 6-6) = (7,0)$$

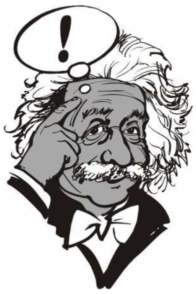
3 Vanuit het punt $P(0,1)$ wordt een kogel afgeschoten in de in de richting $\vec{v} = (5,2)$.
We nemen aan dat de kogel in een rechte lijn beweegt en elke seconde 5 eenheden in de x-richting en 2 eenheden in de y-richting beweegt.
a. Neem de figuur hieronder over en teken daarin ook de punten waar de kogel zich bevindt op de tijdstippen 2, $2\frac{1}{2}$ en 3.

Ergens tussen $t = 2$ en $t = 3$ komt de kogel tegen de wand (de lijn $x = 14$).



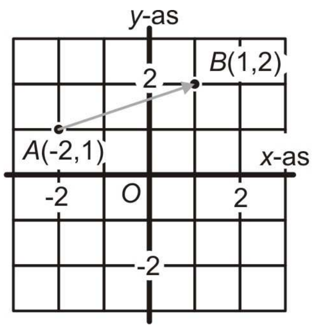
b. Na hoeveel seconden precies? In welk punt?

Het antwoord op **b** kun je ook vinden door met vectoren te rekenen. De coördinaten van het punt waar de steen zich op $t = 2\frac{1}{2}$ bevindt, krijg je door het punt (0,1) over de vector $2\frac{1}{2} \cdot (5,2)$ te verschuiven. Je komt dan in het punt:
$(0,1) + 2\frac{1}{2} \cdot (5,2) = (0 + 2\frac{1}{2} \cdot 5\ ,\ 1 + 2\frac{1}{2} \cdot 2) = (12\frac{1}{2},6)$.
In het algemeen: op tijdstip t bevindt de kogel zich in het punt: $(0,1) + t \cdot (5,2) = (5t, 1+2t)$.
De kogel komt op de wand als zijn eerste coördinaat 14 is, dus $5t = 14$, dus $t = 2\frac{4}{5}$. Het punt waar de kogel zich dan bevindt, vind je door $t = 2\frac{4}{5}$ in te vullen in $(5t, 1+2t)$.
Je vindt het punt $(14, 6\frac{3}{5})$.



We noemen $(x,y) = (0,1) + t \cdot (5,2)$ of $(x,y) = (5t, 1+2t)$ een **parametervoorstelling** (pv) van de lijn waarlangs de kogel beweegt. De parameter is t.

4 **a.** Teken in een rooster de punten $A(-2,1)$ en $B(1,2)$. Teken ook de vector $\overrightarrow{AB}$.



We gaan het punt A verplaatsen over alle mogelijke veelvouden van de vector $\overrightarrow{AB}$. Je krijgt dan de lijn met pv: $(x,y) = (-2,1) + t(3,1) = (-2+3t, 1+t)$.

b. Teken de punten met coördinaten $(-2+3t, 1+t)$ die je krijgt door voor $t=0$, 1, -1 en 2 te nemen.

Voor $t=0$ krijg je natuurlijk A en voor $t=1$ krijg je B. Voor alle andere waarden van t krijg je ook punten van lijn AB: je beweegt vanuit A immers steeds in dezelfde richting, namelijk in de richting van vector $\overrightarrow{AB}$ als $t>0$ en in de tegengestelde richting als $t<0$.

Het punt (-17,-4) ligt op lijn AB.

c. Welke waarde van t moet je nemen om dat punt te krijgen?

d. Voor welke waarde van t is $(-2+3t, 1+t)$ een punt van de x-as? En voor welke waarde van t een punt van de y-as? Wat zijn dus de coördinaten van de snijpunten van lijn AB met de x-as en de y-as?

5 k is de lijn met pv $(x,y) = (2,1) + t(1,-2) = (2+t, 1-2t)$ en m de lijn met pv $(x,y) = (2,0) + t(-2,4) = (2-2t, 4t)$.

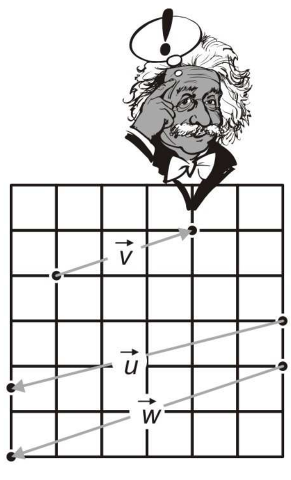
a. Teken de lijnen k en m in een rooster, door eerst wat punten van die lijnen te berekenen.

b. De lijnen k en m zijn evenwijdig. Dit kun je aan de pv van die lijnen zien. Hoe?

c. Geef een pv van de lijn door (2,3) evenwijdig aan k en m.

d. Teken de lijn met pv $(x,y) = (0,4) + t(-1,2)$.

De lijn die je in **d** getekend hebt is m. Verschillende pv's kunnen dus dezelfde lijn voorstellen.



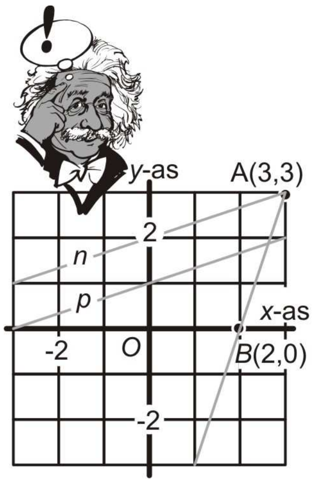
> We zeggen dat twee vectoren ($\neq \vec{0}$) **afhankelijk** zijn als ze dezelfde of tegengestelde richting hebben.

In het plaatje zijn $\vec{v}$ en $\vec{w}$ afhankelijk, $\vec{u}$ en $\vec{w}$ niet.

6 **a.** Bepaal het getal a zodat de vectoren $(a,2)$ en $(2,4)$ afhankelijk zijn. Bepaal het getal b zodat de vectoren $(b,-8)$ en $(2,4)$ afhankelijk zijn.
b. Bepaal het getal a zodat de vectoren $(a,-2)$ en $(2,5)$ afhankelijk zijn. Bepaal het getal b zodat de vectoren $(b,7)$ en $(2,5)$ afhankelijk zijn.

Twee vectoren $(\neq \vec{0})$ zijn afhankelijk als de ene een veelvoud van de andere is.
In formule: $\vec{v}$ en $\vec{w}$ $(\neq \vec{0})$ zijn afhankelijk als er een getal k is zó, dat $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.

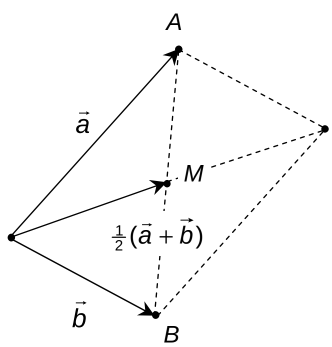
In opgave **5** hebben we de lijnen k en m bekeken.
De richting van de lijn k met pv $(x,y) = (2,1) + t(1,-2)$ wordt bepaald door de vector $(1,-2)$.
De lijn m met pv $(x,y) = (2,0) + t(-2,4)$ is evenwijdig met k omdat de vectoren $(1,-2)$ en $(-2,4)$ afhankelijk zijn.
In de pv van k: $(x,y) = (2,1) + t(1,-2)$ noemen we de vector $(1,-2)$ **richtingsvector**.



Voorbeeld 2
• Een pv van de lijn door $A(3,3)$ en $B(2,0)$ vind je zo.
Een richtingsvector is $\overrightarrow{AB} = (3-2, 3-0) = (1,3)$.
Een pv is dan: $(x,y) = (2,0) + t(1,3)$.
• Een pv van de lijn n door $A(3,3)$ evenwijdig met p: $(x,y) = (0,2) + t(3,1)$ vind je zo.
Een richtingsvector van p is $(3,1)$; die kun je ook als richtingsvector van n nemen. Een pv van n is dan: $(x,y) = (3,3) + t(3,1)$.

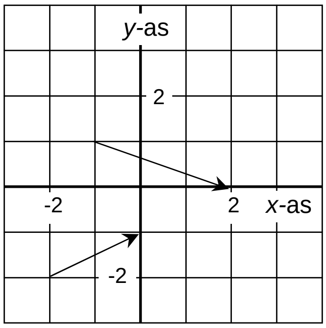
7 Lijn k snijdt de x-as in $(3,0)$ en de y-as in $(0,2)$.
a. Geef een pv van k.

m gaat door door $A(2,2)$ en is evenwijdig met k.
b. Geef een pv van m.
c. Bereken de coördinaten van de snijpunten van m met de x-as en de y-as.



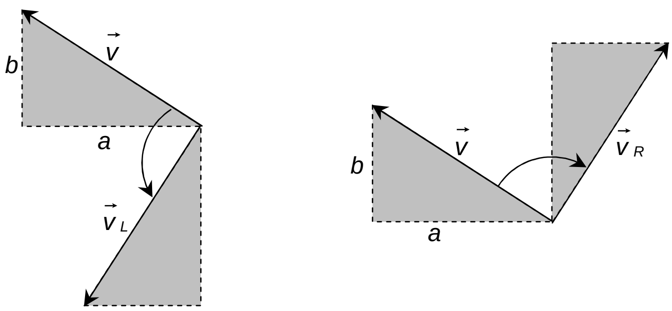
8 In paragraaf 2, opgave **8** heb je gezien:
Als je de vectoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ in hetzelfde punt laat beginnnen, dan wijst $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ naar het midden van lijnstuk AB.
Gebruik dit om de coördinaten van het midden van lijnstuk AB uit te drukken in de coördinaten van $A(a_1, a_2)$ en $B(b_1, b_2)$

Het midden van lijnstuk AB met $A(a_1,a_2)$ en $B(b_1,b_2)$ is het punt $(\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2, \frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}b_2)$.

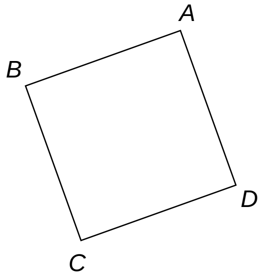


9 **a.** Geef de twee vectoren die loodrecht op de vector (3,-1) staan en even lang zijn als (3,-1).
b. Geef de twee vectoren die loodrecht op de vector (1,2) staan en even lang zijn als (1,2).
c. Geef de twee vectoren die loodrecht op de vector (87,100) staan en even lang zijn als (87,100).

De vectoren $\vec{v}_L = (-b,a)$ en $\vec{v}_R = (b,-a)$ staan loodrecht op $\vec{v} = (a,b)$.
$\vec{v}_L$ krijg je door $\vec{v}$ 90° linksom te draaien en $\vec{v}_R$ door $\vec{v}$ 90° rechtsom te draaien



10 $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn twee (willekeurig gekozen) vectoren.
Geldt $\vec{a}_R + \vec{b}_R = (\vec{a}+\vec{b})_R$?
Geldt $(t \cdot \vec{a})_R = t \cdot \vec{a}_R$?
Wat kun je zeggen van $(\vec{a}_R)_R$?



In de volgende drie opgaven bekijken we vierkanten *ABCD*. De letters *A*, *B*, *C* en *D* staan steeds linksom in volgorde bij de hoekpunten.

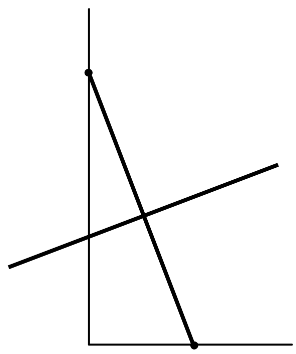
11 Bepaal de coördinaten van C en D in de volgende gevallen. Maak eventueel een tekening op roosterpapier.

a. $A=(1,2)$ en $B=(4,3)$;
b. $A=(1,2)$ en $B=(4,0)$;
c. $A=(11,20)$ en $B=(72,83)$.

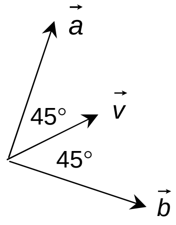
In **c** kun je als volgt te werk gaan: $\overrightarrow{AB}=(61,63)$, dus C krijg je door B te verschuiven over (-63,61),
dus $C=(72+-63\,,\,83+61)=(9,144)$.
d. Maak een soortgelijke berekening voor de coördinaten van D, als $A=(11,20)$ en $B=(72,83)$. Schrijf je berekening op.
e. Bereken de coördinaten van C en D als $A=(-11,20)$ en $B=(50,10)$. Schrijf je berekening op.

12 Als $A=(a_1,a_2)$ en $B=(b_1,b_2)$, krijg je:
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$, dus $C=(b_1-(b_2-a_2),b_2+(b_1-a_1))$
a. Schrijf de coördinaten van C zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.
b. Schrijf een berekening op voor de coördinaten van D. Schrijf die coördinaten zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

13 Bepaal de coördinaten van B en D in de volgende gevallen.
a. $A=(-1,-2)$ en $C=(3,6)$.
b. $A=(-110,115)$ en $C=(4,-1)$.
Tip. Bepaal eerst het midden M van lijnstuk AC. De coördinaten van de punten B en C kun je dan vinden door M over $\overrightarrow{AM}_R$ respectievelijk $\overrightarrow{AM}_L$ te verschuiven.



14 Twee staven van lengte 2 vormen een Grieks kruis (dat wil zeggen dat de staven elkaar loodrecht middendoor delen).
Van één van de staven bewegen de eindpunten over de x-as en de y-as. Noem die eindpunten $(a,0)$ en $(0,b)$.
a. Wat kun je zeggen over a^2+b^2?
b. Druk de coördinaten van het centrum van het kruis uit in a en b.
c. Beschrijf de baan van het centrum.
d. Druk de coördinaten van de eindpunten van de andere staaf uit in a en b.
e. Bepaal de baan van de eindpunten van de andere staaf.
Tip. Vergelijk de x- en de y-coördinaat van die eindpunten.



15 Gegeven is de vector $\vec{v} = (1,2)$. Met behulp van $\vec{v}_L$ en $\vec{v}_R$ kun je ook wel vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vinden die een hoek van 45° met (1,2) maken, zie plaatje.

a. Doe dat. Hoe lang zijn de vectoren die je gevonden hebt?

b. Geef de kentallen van de vectoren die je krijgt door $\vec{v}$ 45° met de wijzers van de klok mee te draaien.

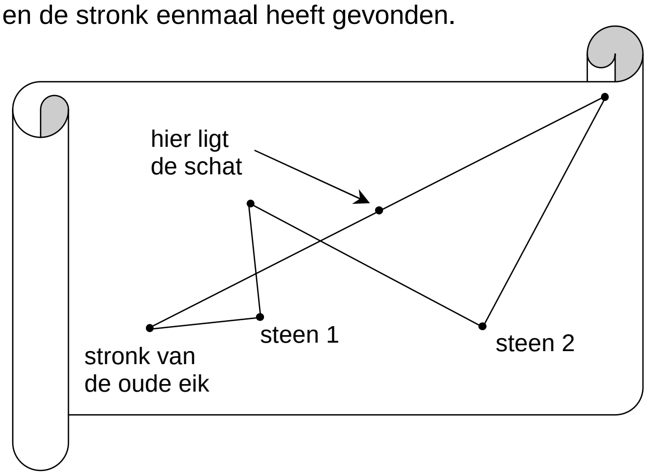
16 Schatgraven op Teleurstellingseiland

Op een onooglijk stukje vergeeld papier dat Anne in een oude kist vindt, staat het volgende.

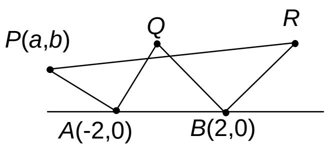

.....................igt begraven op TELEURSTELLINGS EILAND .
Ga op de stronk van de oude eik st....n. Loop n......... de eerste steen, sla lood....cht linksaf en loop nog....als dezelfde afstand.
Van dit p..t loop je naar de tw........ .....en, j.... ...at weer loodrecht link.....f
je lo........ laatste afstand nog eens.
Gr...f precies midden tussen waar je nu bent en de stron

Ze trekt zich niets aan van de gruwelverhalen op *http://en.wikipedia.org/wiki/Disappointment_Island.*
Het eiland ligt op 50° 36’ ZB, 165° 58’ OL.: *Disappointment Island;* een van de onbewoonde Auckland Islands ten zuiden van Nieuw Zeeland. Onbewoond? Op 65.000 visverwerkende witkopalbatrossen na!

Anne heeft vast een plan gemaakt, voor als ze de stenen en de stronk eenmaal heeft gevonden.



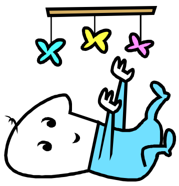
Op Teleurstellingseiland aangekomen, vindt ze wel de twee stenen, maar de stronk van de oude eik is vergaan.
a. Neem een stuk papier en teken daarop twee punten. Daar liggen de stenen. Kies nu een willekeurig derde punt voor de positie van de stronk en voer de zoekactie uit met je geodriehoek.
Kies nog een ander punt voor de stronk en voer de zoekactie nog eens uit.
Het lijkt wel of de plaats van de schat niet van de plaats van de stronk afhangt!



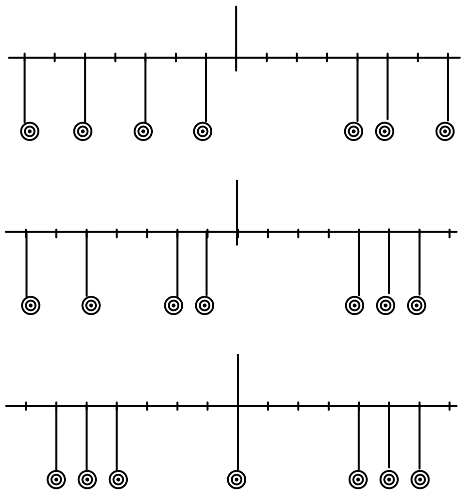
Dat dit inderdaad zo is, kun je als volgt inzien.
Neem een assenstelsel zo dat de stenen in de punten $A(-2,0)$ en $B(2,0)$ liggen. Zeg dat de eik in $P(a,b)$ stond.
b. Druk de coördinaten van de punten Q en R (zie plaatje) in a en b uit.
c. Laat zien dat het midden M van PR niet afhangt van a en b.

4 Op zoek naar evenwicht

Iemand heeft zeven blokken op elkaar gestapeld. De stapel helt gevaarlijk naar rechts over. Maar hij valt niet om! Hoe dat te begrijpen is, daar gaat deze paragraaf over.



1 Het mobiel hieronder is in evenwicht. De zeven massa's zijn allemaal even groot. De tweede situatie krijg je door twee van de massa's in tegengestelde richting te verplaatsen. De derde situatie krijg je door daarna twee massa's tegengesteld aan elkaar te verplaatsen over dezelfde afstand en dat daarna nog eens te doen. In de derde situatie zie je goed dat het mobiel inderdaad in evenwicht is.



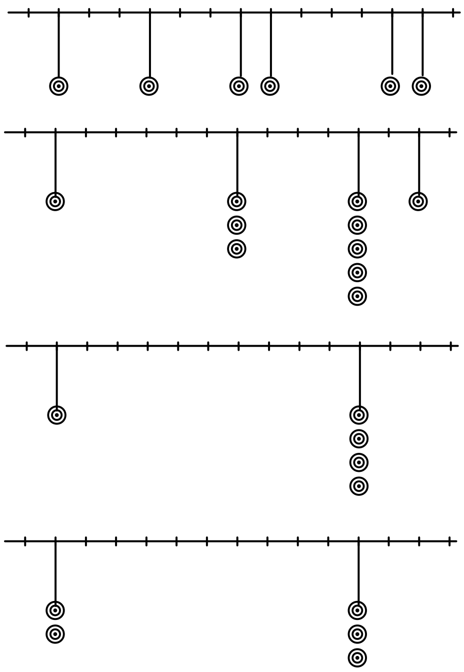
Ga deze twee verplaatsingen na.

Schuifprincipe
Het evenwicht wordt niet verstoord als je twee massa's tegengesteld aan elkaar verplaatst:
$\longrightarrow \quad \longleftarrow$ of $\longleftarrow \quad \longrightarrow$

Het schuifprincipe is ons uitgangspunt. Als je een balans tot je beschikking hebt, kun je experimenteel vaststellen dat dit juist is. Uitgaande van dit natuurkundige principe, gaan we wiskundig redeneren.

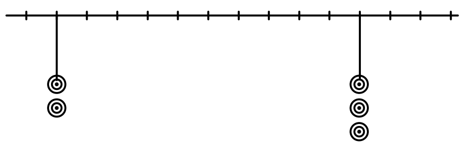
De lengte van de ophangtouwtjes is niet van belang.

* **2** Zoek uit waar je de mobielen moet ophangen opdat zij in evenwicht zijn. De mobielen staan ook op het werkblad.



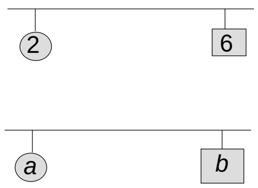
In plaats van één massa 2 eenheden te verplaatsen, kun je ook twee massa's 1 eenheid verplaatsen (in dezelfde richting).

In het laatste mobiel van de vorige opgave was de afstand tussen de linker en de rechter massa's 10.



We verplaatsen elk van de linker massa's 3 plaatsen naar rechts en elk van de drie rechter massa's 2 plaatsen naar links. Dan houden we evenwicht. Doen we dat nog een keer dan hangen alle vijf de massa's op dezelfde plaats. Die plaats verdeelt de oorspronkelijke afstand in stukken die zich verhouden als 6 : 4.

Het punt waar de staaf met massa's moet worden opgehangen om de staaf in evenwicht te krijgen, noemen we het **zwaartepunt** of **massamiddelpunt** van de staaf met massa's.

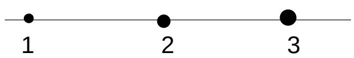


3 **a.** Aan een massaloze staaf hangen twee massa's van grootte 2 en 6.
Waar moet de staaf worden opgehangen opdat hij in evenwicht is?
b. Aan een massaloze staaf hangen twee massa's van grootte a en b.
Waar moet de staaf moet worden opgehangen opdat hij in evenwicht is?

In A en B bevinden zich twee massa's van grootte a en b.
Het zwaartepunt Z van de twee massa's ligt op lijnstuk AB, zodat $AZ : BZ = b : a$.

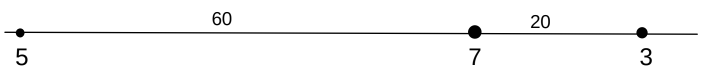
4 Aan een massaloze staaf hangen twee massa's van grootte 3 en 7.
Bepaal de plaats van het zwaartepunt Z op twee manieren:
a. door te schuiven
b. door bovenstaande stelling toe te passen.

Nu we weten hoe we het zwaartepunt van twee massa's kunnen bepalen, gaan we een systeem van drie massa's op één lijn aanpakken.

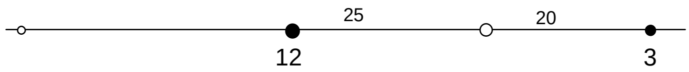


5 Aan een massaloze staaf hangen drie massa's van grootte 1, 2 en 3 op onderling gelijke afstanden, en in deze volgorde.
a. Waar ligt het zwaartepunt?
b. En waar als je de massa's 2 en 3 van plaats verwisselt?

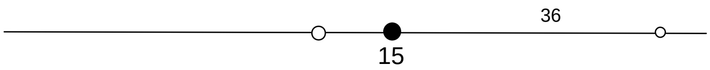
Bij drie massa's kun je er eerst twee samennemen, en vervolgens het resultaat van die twee combineren met het derde massa. Bijvoorbeeld:



Het zwaartepunt van 5 en 7 ligt op afstand 25 van 7. Dus vervangen we de situatie door:



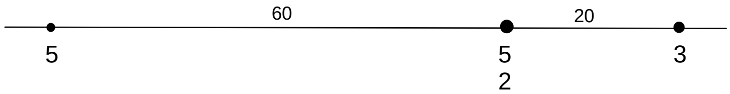
Vervolgens bepalen we het zwaartepunt van 12 en 3, die een onderlinge afstand 45 hebben:



We vinden het zwaartepunt van de oorspronkelijke drie massa's op afstand 36 van het rechter massa.

6 **a.** Ga na dat je dezelfde plek vindt als je begint met de massa's 3 en 5 samen te nemen.
b. Ook als je begint met de massa's 7 en 3 samen te nemen.

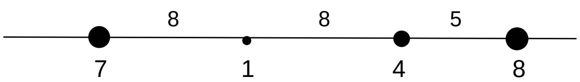
Het kan nog anders. Splits de massa van 7 in twee massa's van 5 en 2:



c. Neem nu de twee massa's van 5 samen en de massa's van 2 en 3. Vind je weer hetzelfde zwaartepunt?

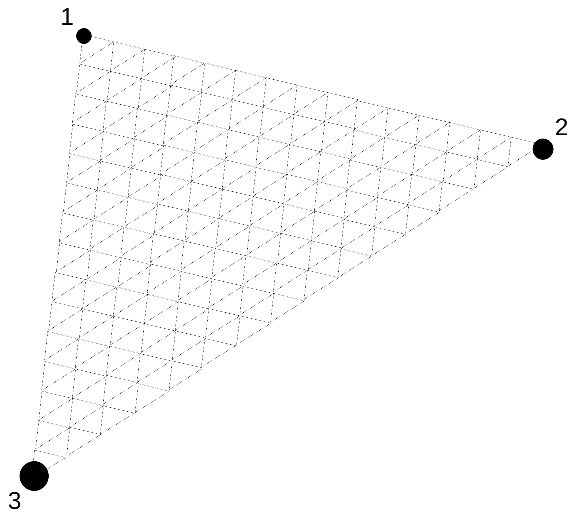
Bij elk aantal massa's op een lijn vind je altijd hetzelfde eindpunt, hoe je ook de tweetallen kiest die je achtereenvolgens samenneemt. Dat betekent dat je terecht kunt spreken van *het* zwaartepunt. Verderop zul je – met behulp van vectoren - begrijpen waarom je altijd hetzelfde eindpunt vindt.

7 Bepaal het zwaartepunt van:



Hoe gaat het als de massa's niet op één lijn liggen? Ook dan verschuiven we massa's naar elkaar toe, tot dat alles in een "centrum" samenklontert: als dat punt weer altijd hetzelfde is, mag dat *het* zwaartepunt heten.

* **8** We bekijken een voorbeeld met drie massa's: 1, 2 en 3.

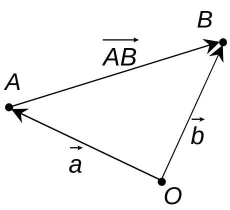


Voor het gemak hebben we een driehoekjesrooster aangebracht, waarbij de afstanden tussen een tweetal massa's verdeeld is in 15'en.

a. Bepaal op het werkblad het zwaartepunt door eerst de massa's 2 en 3 samen te nemen.

b. Ook door eerst 1 en 2 samen te nemen.

c. En door eerst 1 en 3 samen te nemen.

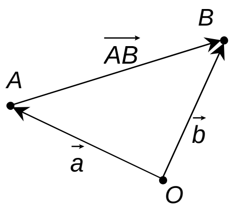


Waarom vind je altijd hetzelfde eindpunt als je massa's twee aan twee samenneemt? De volgorde waarin je daarbij te werk gaat, doet niet ter zake. Dit kun je begrijpen door met vectoren te werken.

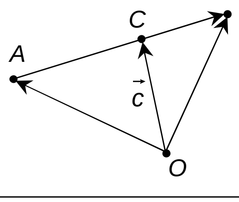
We kiezen een oorsprong O in het vlak.

In het vervolg schrijven we voor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ enzovoort: $\vec{a}$, $\vec{b}$, enzovoort ; dat is gemakkelijker.

* **9** **a.** Druk $\overrightarrow{AB}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$



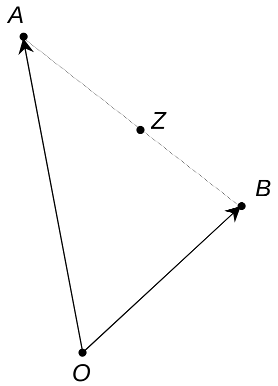
Het punt C verdeelt het lijnstuk AB zó, dat $AC : BC = 3 : 2$.

b. Ontbind $\vec{c}$ in de richtingen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en toon aan dat $\vec{c} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

Tip. Teken lijnen door C evenwijdig aan OA en OB en gebruik gelijkvormigheid.

Het punt D verdeelt lijnstuk AB zó dat $AD : BD = 3 : 5$.

d. Ontbind $\vec{d}$ in de richtingen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en bereken de getallen k en m waarvoor geldt dat $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$.



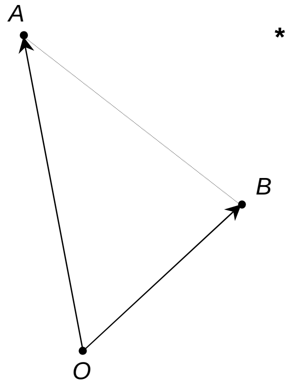
Stelling
In A en B bevinden zich de massa's a en b.
We kiezen een willekeurig punt O als oorsprong.
Het zwaartepunt Z is het eindpunt van de vector

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$

Bewijs

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) =$$

$$(1 - \frac{b}{a+b})\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$



* **10** In de punten A en B bevinden zich de massa's a en b. Geef op het werkblad de plaats van het zwaartepunt aan in de volgende gevallen.
a. $a = 0$ en $b = 6$
b. $a = 1$ en $b = 5$
c. $a = 2$ en $b = 4$
d. $a = 3$ en $b = 3$
e. $a = 4$ en $b = 2$
f. $a = 5$ en $b = 1$
g. $a = 6$ en $b = 0$

Merk op dat de keuze van de oorsprong O er niet toe doet.

11 **a.** Hoe luidt de stelling als we voor O het punt A kiezen?
b. Hoe luidt de stelling als we voor O het punt Z kiezen?

12 Gegeven zijn vijf massa's in een vlak (of in de ruimte, of op een lijn): 2, 3, 5, 7 en 10, op de plaatsen A_1, A_2, A_3, A_4 en A_5. Kies een oorsprong O.
Om het zwaartepunt te vinden kunnen we (bijvoorbeeld) als volgt te werk gaan:
- bepaal het zwaartepunt Z_{12} van de massa's 2 en 3 ,
- bepaal het zwaartepunt Z_{34} van de massa's 5 en 7,
- bepaal het zwaartepunt Z_{345} van het systeem met massa 12 in Z_{34} en massa 10 in A_5,
- bepaal het zwaartepunt Z van het systeem van massa 5 in Z_{12} en massa 22 in Z_{345}.

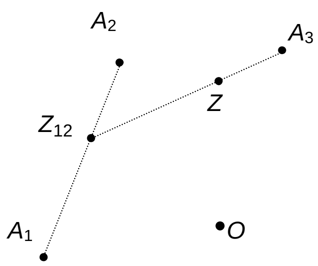
Welke vector $\overrightarrow{OZ}$ vind je op deze manier, uitgedrukt in $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ en $\overrightarrow{OA_5}$?

$\overrightarrow{OZ}$ is een soort gemiddelde vector van $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ en $\overrightarrow{OA_5}$. Hoe "zwaar" elk van die vectoren in het gemiddelde meetelt, hangt af van de grootte van massa op de betreffende plaats.

We gaan nu het algemene geval bekijken.

Voor drie massa's
Gegeven zijn drie massa's a_1, a_2, a_3 op de plaatsen A_1, A_2, A_3.
We kiezen een willekeurig punt O als oorsprong en berekenen de som van de massa's: $a = a_1+a_2+a_3$.
Dan vinden we het zwaartepunt Z als volgt:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3}.$$



Bewijs
Stel dat we eerst de massa's a_1 en a_2 samennemen. Die twee kunnen we vervangen door het massa $b = a_1 + a_2$ in hun zwaartepunt Z_{12} met

$$\overrightarrow{OZ_{12}} = \frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2}.$$

Dit gecombineerd met massa a_3 geeft het punt Z met

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{b}{b+a_3}\overrightarrow{OZ_{12}} + \frac{a_3}{b+a_3}\overrightarrow{OA_3} = \frac{b}{b+a_3}\left(\frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2}\right) + \frac{a_3}{b+a_3}\overrightarrow{OA_3} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3}.$$

Omdat in het eindantwoord de drie massa's en de drie plaatsen volkomen symmetrisch voorkomen, is de volgorde waarin de massa's zijn samengenomen kennelijk niet van belang!

Voor vier massa's
Gegeven zijn vier massa's a_1, a_2, a_3, a_4 op de plaatsen A_1, A_2, A_3, A_4.
We kiezen een willekeurig punt O als oorsprong en berekenen de som van de massa's: $a = a_1+a_2+a_3+a_4$.
Dan vinden we het zwaartepunt Z als volgt:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3} + \frac{a_4}{a}\overrightarrow{OA_4}.$$

Bewijs
Eerst nemen we de massa's in A_1, A_2 en A_3 samen. Die kunnen we vervangen door massa $b = a_1+a_2+a_3$ in plaats Z_{123}, waarbij

$\overrightarrow{OZ_{123}} = \frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{b}\overrightarrow{OA_3}$.

Dit nemen we samen met massa a_4 in A_4. Dat geeft ons het zwaartepunt Z, waarvoor:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{b}{a_4+b}\overrightarrow{OZ_{123}} + \frac{a_4}{a_4+b}\overrightarrow{OA_4} =$$

$$\frac{b}{a_4+b}\left(\frac{a_1}{b}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{b}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{b}\overrightarrow{OA_3}\right) + \frac{a_4}{a_4+b}\overrightarrow{OA_4} =$$

$$\frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \frac{a_3}{a}\overrightarrow{OA_3} + \frac{a_4}{a}\overrightarrow{OA_4} .$$

Weer is het antwoord volkomen symmetrisch in de vier massa's en plaatsen. Kennelijk is de volgorde van samennemen niet van belang.

En zo gaat dat door voor vijf, zes, … massa's. Algemeen vinden we voor elk aantal massa's a_1, a_2, …, a_n. op de plaatsen A_1, A_2, … A_n het zwaartepunt Z als volgt:

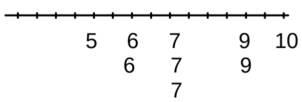
Stelling
De massa's a_1, a_2, …, a_n bevinden zich op de plaatsen A_1, A_2, … A_n . Het zwaartepunt noemen we Z. Dan:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{a_1}{a}\overrightarrow{OA_1} + \frac{a_2}{a}\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \frac{a_n}{a}\overrightarrow{OA_n} .$$

Hierbij is $a = a_1 + a_2 \ldots + a_n$.

We zien dat $\overrightarrow{OZ}$ een soort gemiddelde vector is van $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, …, $\overrightarrow{OA_n}$. Hierbij bepaalt een massa op een plaats hoe zwaar die plaats meetelt.

Het doet er niet toe in hoeveel dimensies we werken. De punten mogen best op een rechte lijn liggen, maar dat hoeft niet. En als drie punten een driehoek in de ruimte vormen, hoeft de gekozen oorsprong niet in het vlak van de driehoek te liggen. De werkwijze met vectoren is dus algemeen geldig.

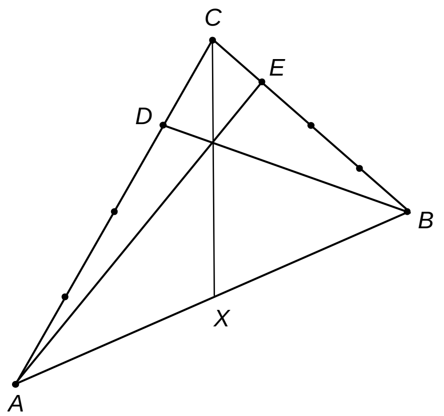


13 Anneke heeft achtereenvolgens de volgende cijfers voor wiskunde gehaald: 7, 6, 5, 9, 9, 10, 6, 7, 7.
Ze heeft de cijfers uitgezet op de getallenlijn.
Bepaal haar gemiddelde wiskundecijfer.

Merk de analogie op tussen het gemiddelde cijfer en het zwaartepunt.

5 De stelling van Ceva

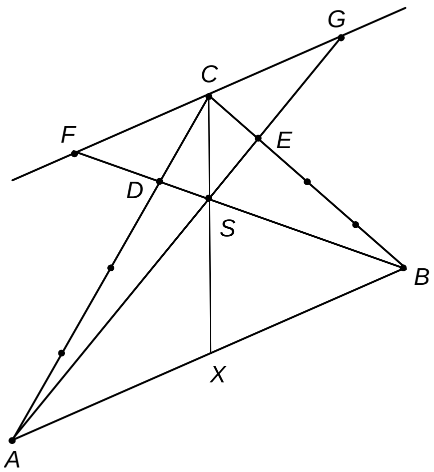
1



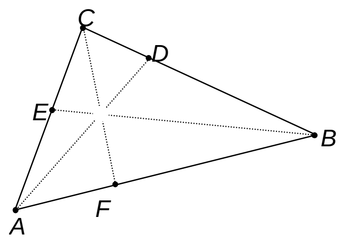
De zijden AC en BC van driehoek ABC zijn in vier gelijke stukken verdeeld; zie plaatje. Twee van de verdeelpunten zijn D en E. De lijn door C en het snijpunt van AE en BD snijdt AB in X.
Het lijkt erop dat X het midden van AB is. In het volgende bewijzen we dat dit inderdaad zo is.
In het plaatje hieronder is een lijn door C evenwijdig aan lijn AB getekend.

a. Bewijs dat FC en GC even lang zijn.
Tip. Laat zien dat beide $\frac{1}{3}$ van AB zijn.

b. Laat nu met gelijkvormigheid zien dat $AX = BX$.



Wat we hierboven hebben gezien is een speciaal geval van de stelling van Ceva.



Stelling van Ceva
In driehoek *ABC* liggen punten *D*, *E* en *F* op de zijden *BC*, *CA* en *AB.* Dan komen de volgende twee dingen op hetzelfde neer.

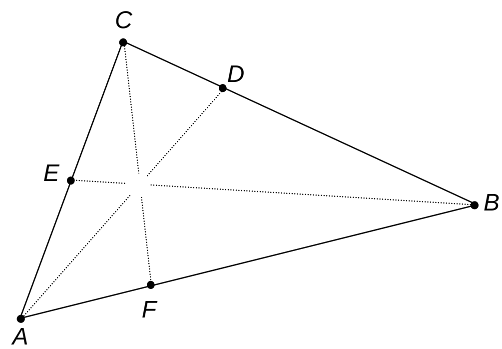
- $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$
- De lijnen *AD*, *BE* en *CF* gaan door één punt.


Interieur van de Santa Teresa Mantova

Giovanni Ceva (geboren 7 december 1647 in Milaan, gestorven 15 Juni 1734 in Mantua) was een Italiaanse wiskundige. Hij studeerde aan de jezuïtische hogeschool in Milaan en volgde een wiskundestudie aan de universiteit van Pisa.
Vanaf 1686 werkte hij in Mantua als "Matematico Cesareo e Commessario Generale dell' Acque di tutto lo Stato". Hij werd begraven in de Santa-Teresakerk van de Carmelitani Scalzi in Mantua.
Ceva hield zich vooral met meetkunde bezig. In 1678 publiceerde hij het boek *De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio* waarin ook bovenstaande stelling te vinden is. Hij publiceerde ook economisch getint werk *De Re Nummeraria* (met Mantua als voorbeeld) en *Opus hydrostaticum* over hydraulica.

2 Laat zien dat je opgave **1** met de stelling van Ceva kunt bewijzen.

3 **Bewijs van de stelling van Ceva**
In de punten *A*, *B* en *C* bevinden zich massa's *a*, *b* en *c*.



Het zwaartepunt van de massa's *a* en *b* noemen we *F*, dat van *b* en *c* noemen we *D* en dat van *c* en *a* noemen we *E*. Het zwaartepunt van de drie massa's *a*, *b* en *c* noemen we *Z*.

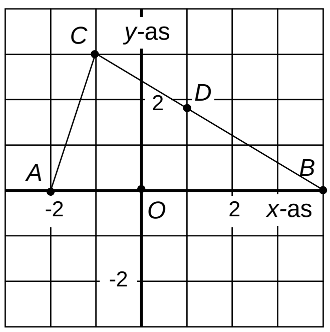
a. Leg uit dat Z op lijnstuk CF ligt.

Evenzo ligt Z op de lijnstukken BE en AD, dus gaan de lijnen AD, BE en CF door één punt.

b. Druk de volgende verhoudingen in a, b en c uit:
$\frac{AF}{FB}$, $\frac{BD}{DC}$ en $\frac{CE}{EA}$.

c. Schrijf $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$ zo eenvoudig mogelijk.

Als de lijnen AD, BE en CF door één punt gaan, kun je er gewichten a, b en c bij verzinnen, en dan is
$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.
Het omgekeerde moet dan ook waar zijn omdat er maar één punt X op lijn AB is met $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.



4 In $A(-2,0)$, $B(4,0)$ en $C(-1,3)$ bevinden zich de massa's 4, b en c. Het zwaartepunt van de massa's in A en B is O. Het zwaartepunt van de massa's in B en C is D. D ligt op de lijn $x = 1$.

a. Bereken $CD : DB$ en vervolgens b en c.

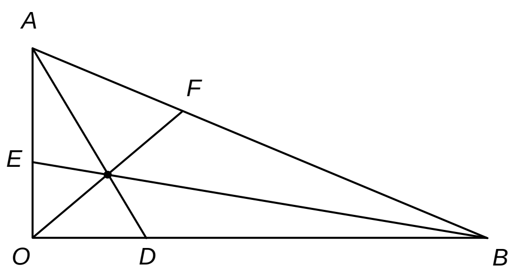
Het snijpunt van de lijnen OC en AD is noemen we Z.
Lijn BZ snijdt lijn AC in X.

b. Bereken $AX : XC$.

c. Bereken $XZ : ZB$.

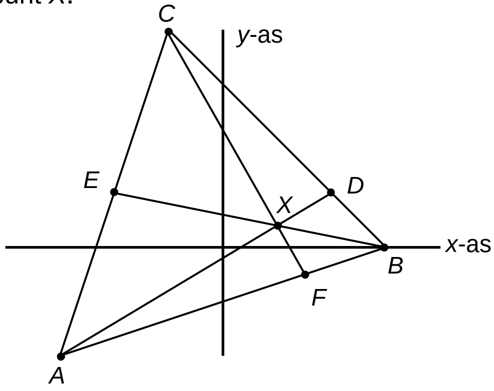
5 Hieronder zijn getekend $A(0,15)$, $B(36,0)$, $D(9,0)$, $E(0,6)$ en $O(0,0)$. De lijnen OF, AD en BE gaan door één punt.

a. Bereken de coördinaten van F.



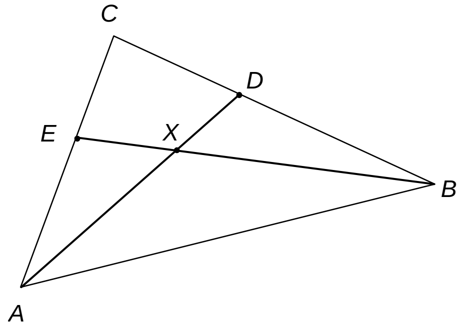
b. Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen OF, AD en BE.

6 In het plaatje hieronder staan de punten $A(-9,-6)$, $B(9,0)$, $C(-3,12)$, $D(6,3)$ en $E(-6,3)$. De lijnen CF, AD en BE gaan door één punt X.



Bereken de coördinaten van F en van X.

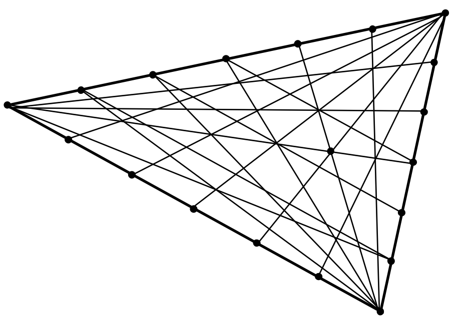
7 Op de zijden AC en BC van driehoek ABC liggen de punten E en D. Het snijpunt van BE en AD is X.

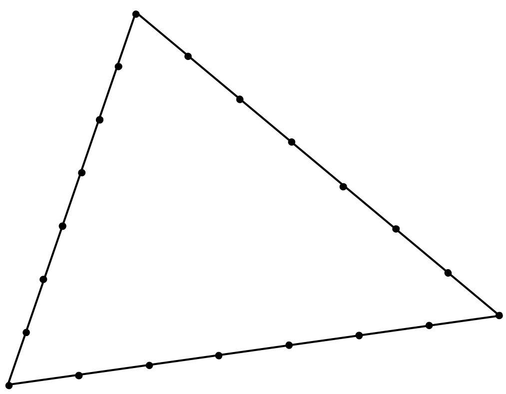


Laat zien:

lijn CX gaat door het midden van AB $\Leftrightarrow$ $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC}$.

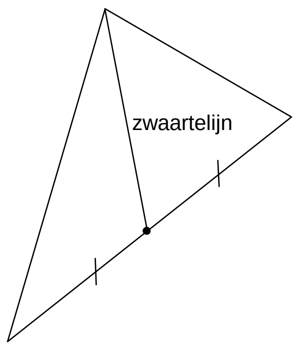
8





In de linker driehoek zijn de zijden in zes gelijke delen verdeeld en de verbindingslijnen van de hoekpunten naar de verdeelpunten getekend.
Het lijkt erop dat er punten zijn die op drie verbindingslijnen liggen. Om zeker te weten dat dat inderdaad het geval is, is een berekening nodig.
a. Laat met de stelling van Ceva zien dat het aangegeven punt op drie verbindingslijnen ligt.

In de rechter figuur is een indeling in zeven delen op de zijden gemaakt.
b. Zijn er ook hier weer punten die op drie verbindingslijnen van hoekpunten met verdeelpunten liggen?
Zoek dat uit. Motiveer je antwoord.



9 Het meetkundige zwaartepunt van een driehoek
In de onderbouw heb je de volgende definitie gezien. Een zwaartelijn van een driehoek gaat door een hoekpunt en het midden van de tegenoverliggende zijde.

Stelling
De zwaartelijnen van een driehoek *ABC* gaan door één punt, het zwaartepunt *Z* van de driehoek.
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijnen in de verhouding 1 : 2.

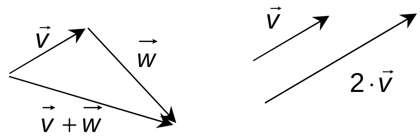
Er geldt: $\vec{z} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

Bewijs de stelling.

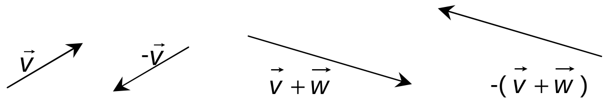
6 Antwoorden

Paragraaf 1 Vectoren

1 a.

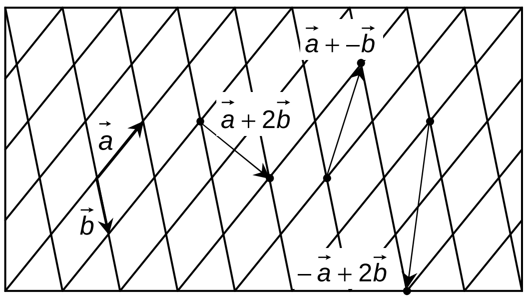


b.



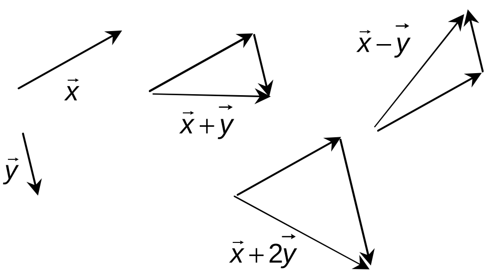
c. $k=3$ en $m=-2$

d.

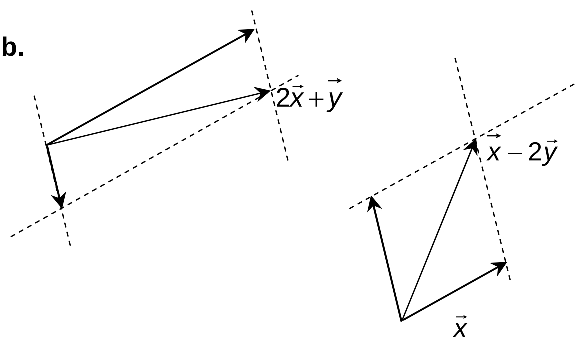


2 $\vec{x}=-3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{y}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{z}=3\vec{a}+2\vec{b}$

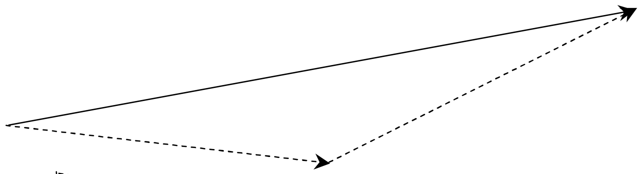
3 a.



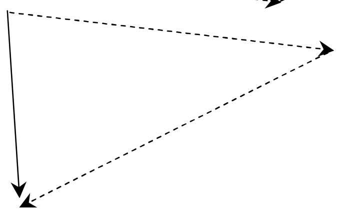
b.



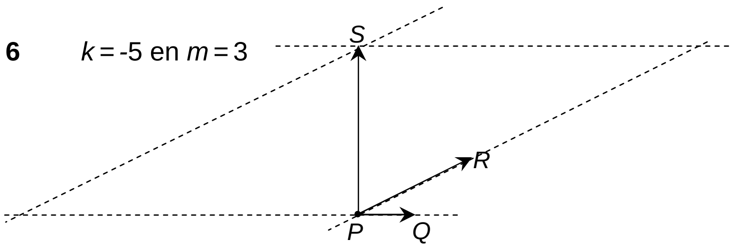
5 a.



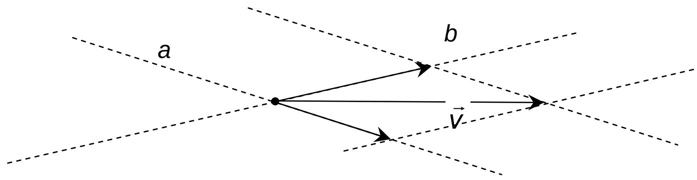
b.



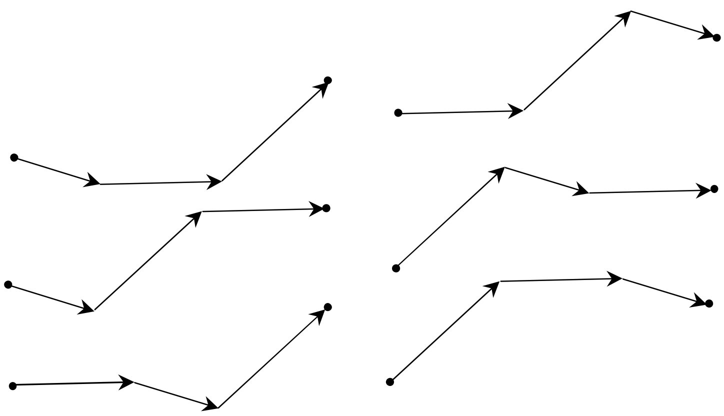
6 $k = -5$ en $m = 3$



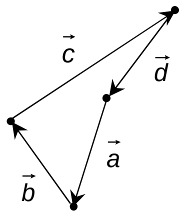
7



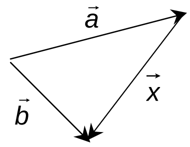
8



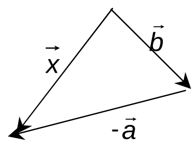
9



10 a.



b.

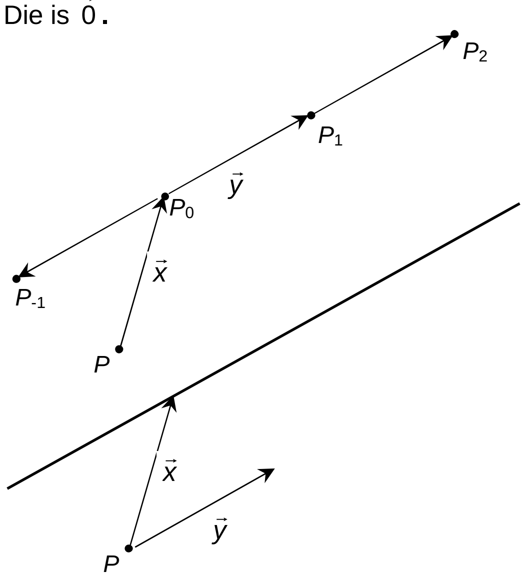


11 Die is $\vec{0}$.

12 a.

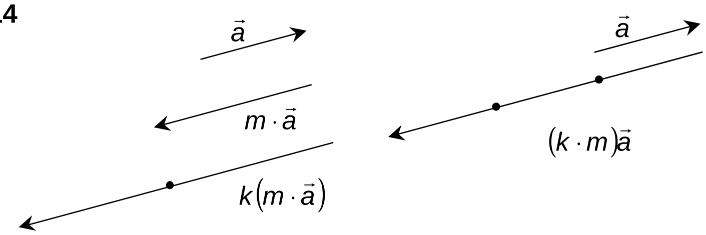
b.

c.



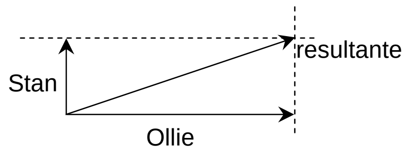
13 $2(\vec{a}+\vec{b})$ en $2\vec{a}+2\vec{b}$

14

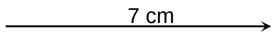


Paragraaf 2   Toepassingen

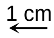
1 **a.** 3 keer
b.



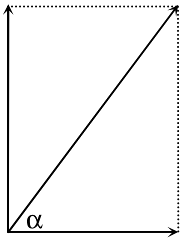
2 **a.**
b.



c. 7 cm
d.



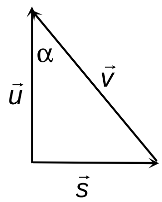
e.



f. $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ km/h

g. $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{3}$, $\alpha \approx 53°$

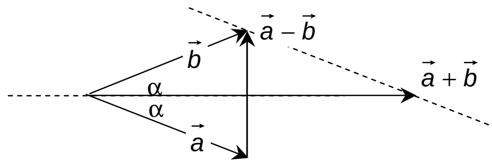
3 **a.**



b. $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 3{,}75^2} \approx 4{,}8$

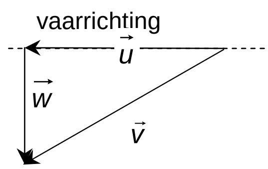
$\tan(\alpha) = \dfrac{3}{3{,}75}$, dus $\alpha \approx 39°$ en de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{s}$ is dus 39° + 90° = 129°.
De veerboot moet zelf 4,8 km/h varen.

4 **a.**
$2\sqrt{3}$



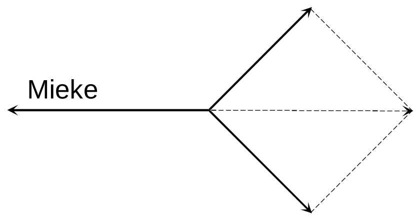
b.
c. 2

5 **a.**



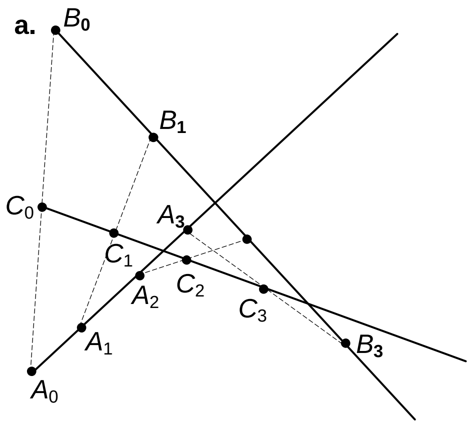
b. $|\vec{u}\,| \approx 1{,}73$, $|\vec{w}\,| = 1$

6 a.



b. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ keer zo groot

7 a.



8 $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

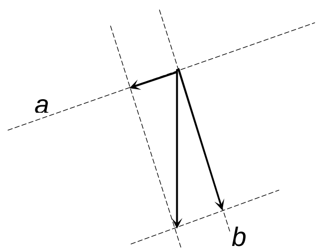
9 b. $\frac{1}{2} \cdot \vec{x} + \vec{y}$

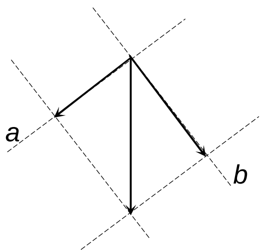
c. $\vec{x} + \vec{y}$; $1\frac{1}{2} \cdot (\vec{x} + \vec{y})$; enzovoort.

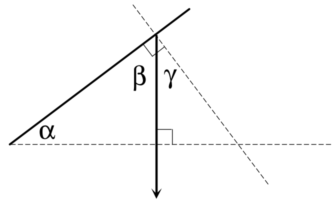
d. Omdat je in **c** steeds veelvouden van dezelfde vector vindt.

e. $2\frac{1}{2}\sqrt{5}$

10 a.



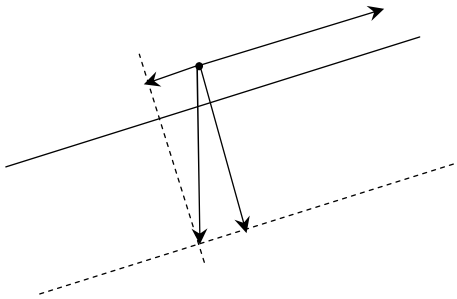


b. 

$$\left.\begin{array}{l} {}^\circ\alpha + \beta = 90^\circ \\ \beta + \gamma = 90 \end{array}\right\} \alpha = \gamma$$

De component langs $\vec{b}$ heeft lengte $12 \cdot \cos(37^\circ) \approx 9{,}58$.

11 a.

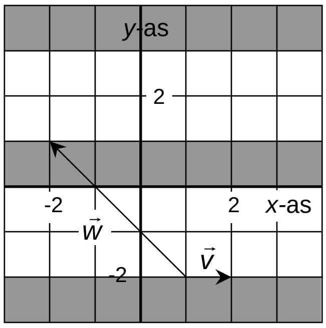


b. ja

Paragraaf 3 Rechthoekscoördinaten

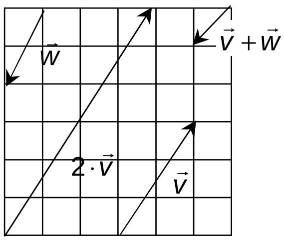
1 a. $\vec{a} = (-2,5)$, lengte $\sqrt{29}$; $\vec{b} = (1,6)$, lengte $\sqrt{37}$,
$\vec{v} = (1,0)$, lengte 1 ; $\vec{w} = (-3,3)$, lengte $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b.

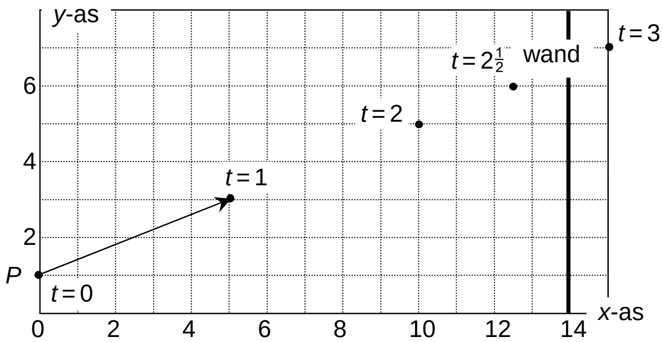


c. $\vec{a} = 3 \cdot \vec{v} + 1\frac{2}{3} \cdot \vec{w}$, $\vec{b} = 7 \cdot \vec{v} + 2 \cdot \vec{w}$

2 a. (1,1)
b. (4,6)

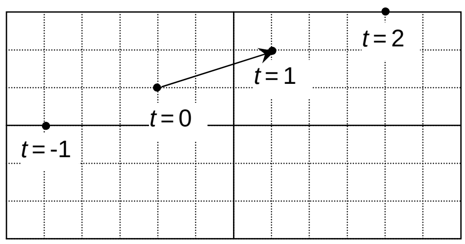


3 a.



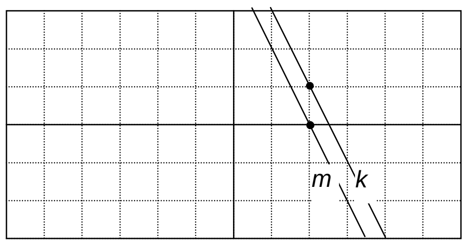
b. Vanaf $t = 0$ moet hij horizontaal 14 eenheden afleggen, daar zijn $14/5 = 2,8$ seconden nodig. In verticale richting heeft hij dan afgelegd : $2,8 \cdot 2 = 5,6$ eenheden. De hoogte is dan $5,6 + 1 = 6,6$.

4 a.
b.



c. $t = -5$
d. $t = -1$, $t = \frac{2}{3}$. Met de x-as : (-5,0), met de y-as : $(0,1\frac{2}{3})$.

5 a.



b. De vectoren (1,-2) en (-2,4) zijn tegengesteld gericht.
c. $(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,-2)$ of $(x,y) = (2,3) + t \cdot (-1,2)$ of…
d. Dezelfde lijn als m.

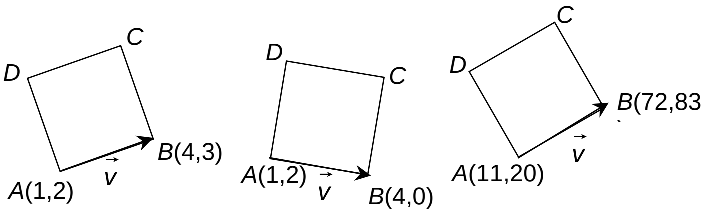
6 a. $a = 1$, $b = -4$
b. $a = -\frac{4}{5}$, $b = 2\frac{4}{5}$

7 a. $(x,y) = (3,0) + t(3,-2)$ of $(x,y) = (0,2) + t(3,-2)$ of…
b. $(x,y) = (2,2) + t(3,-2)$ of…
c. $(x,y) = (2,2) + t(3,-2) = (2 + 3t\ ,\ 2 - 2t)$ is pv van m.
Snijpunt met de x-as: dan $y = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Dit geeft het punt (5,0)
Snijpunt met de y-as: dan $x = 0 \Leftrightarrow 2 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$.
Dit geeft het punt $(0,3\frac{1}{3})$.

9 **a.** (1,3) en (-1,-3)
b. (2,-1) en (-2,1)
c. (100,-87) en (-100,87)

10 ja, ja, $(\vec{a}_R)_R = -\vec{a}$

11 Schetsjes bij **a**, **b** en **c**:



a. $\vec{v} = (3,1)$, $C = (4-1, 1+3) = (3,4)$; $D = (3-3, 4-1) = (0,3)$
b. $\vec{v} = (3,\text{-}2)$, $C = (4+2, 0+3) = (6,3)$;
$D = (6-3, 3+2) = (3,5)$
c. $\vec{v} = (61,63)$, $C = (72-63, 83+61) = (9,144)$;
$D = (9-61, 144-63) = (\text{-}52,81)$
d. Zie **c**.
e. $\overrightarrow{AB} = (61,\text{-}10)$, dus $C = (50+10, 10+61) = (60,71)$ en
$D = (60-61, 71+10) = (\text{-}1,81)$.

12 **a.** $(a_2 + b_1 - b_2, \text{-}a_1 + b_1 + b_2)$
b. $(a_2 + b_1 - b_2 - (b_1 - a_1), \text{-}a_1 + b_1 + b_2 - (b_2 - a_2)) =$
$(a_1 + a_2 - b_2, a_2 - a_1 + b_1)$

13 M is het midden van AC.
a. $M = (1,2)$, $\overrightarrow{AM} = (2,4)$, dus $B = (1+4, 2-2) = (5,0)$;
$D = (1-4, 2+2) = (\text{-}3,4)$.
b. $M = (\text{-}53,57)$, $\overrightarrow{AM} = (57,\text{-}58)$,
dus $B = (\text{-}53-58, 57-57) = (\text{-}111,0)$;
$D = (\text{-}53+58, 57+57) = (5,114)$

14 **a.** $a^2 + b^2 = 4$
b. $(\tfrac12 a, \tfrac12 b)$
c. $(\tfrac12 a)^2 + (\tfrac12 b)^2 = \tfrac14 \cdot 4 = 1$, dus het centrum beweegt over een cirkel met straal 1 en middelpunt (0,0).
d. Zeg $A = (a,0)$, $B = (0,b)$. Het midden M van AB is dan $(\tfrac12 a, \tfrac12 b)$. $\overrightarrow{AM} = (\text{-}\tfrac12 a, \tfrac12 b)$. Noem de eindpunten van de andere staaf C en D, dan $C = (\tfrac12 a - \tfrac12 b, \tfrac12 b - \tfrac12 a)$ en
$D = (\tfrac12 a + \tfrac12 b, \tfrac12 b + \tfrac12 a)$.
De y-coördinaat van C is tegengesteld aan de x-coördinaat van C; De y-coördinaat van D is gelijk aan de x-coördinaat van C. Dus C loopt over de lijn $y = \text{-}x$ en D over de lijn $y = x$.

Je kunt het ook zo zien: C krijg je door B 45° tegen de wijzers van de klok in te draaien, C komt dus te liggen op de lijn $y = -x$. D krijg je door B 45° met de wijzers van de klok mee te draaien, D komt dus te liggen op de lijn $y = x$.

15 a. $\vec{v}_L = (-2,1)$ en $\vec{v}_R = (2,-1)$. Vectoren die een hoek van 45° met $\vec{v}$ maken zijn $\vec{v} + \vec{v}_L = (-1,3)$ en $\vec{v} + \vec{v}_R = (3,1)$. Deze zijn $\sqrt{2}$ keer zo lang als $\vec{v}$.

b. Dus $\vec{a} = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ 1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ )$ en $\vec{b} = (-1\frac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\frac{1}{2}\sqrt{2}\ )$.

16 b. $\overrightarrow{PA} = (-a-2,-b)$, dus $Q = (-2+b,0-a-2) =$ $(-2+b,-a-2)$. Dan $\overrightarrow{QB} = (4-b,a+2)$ en $R = (-2+b-a-b,0+4-b) = (-2-a,4-b)$ en het midden van PR is dan (-1,2), hangt dus niet af van a en b.

Paragraaf 3 Op zoek naar evenwicht

1 Zelf doen.

2 Eerste: $6\frac{1}{2}$ vanaf de linkse
Tweede: 8 vanaf de linkse
Derde: 8 vanaf de linkse
Vierde: 6vanaf de linkse

3 a. $\frac{3}{4}$ van de afstand vanaf links

b. $\dfrac{b}{a+b}$ van de afstand vanaf links

4 a.

b. $\frac{7}{10}$ van de afstand vanaf links.

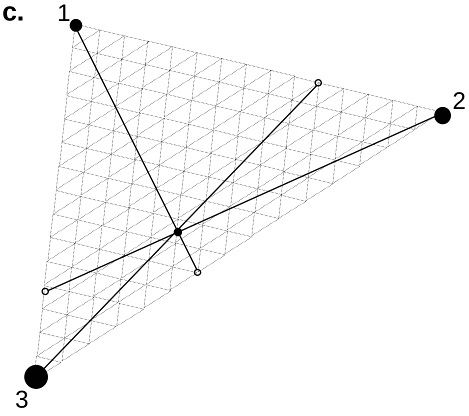
5 a. $1\frac{1}{3}$ vanaf 1

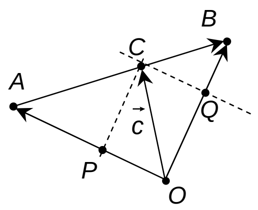
b. $1\frac{1}{6}$ vanaf 1

6 Zelf doen

7 De afstand tussen massa 7 en massa 1 noemen we 8. Dan komt het zwaartepunt op 10 rechts van 7.

8 **a**, **b**, **c.**





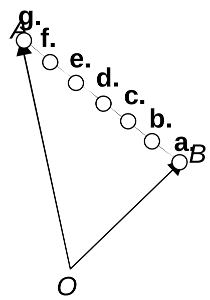
9 **b.** Zie plaatje. De driehoeken *APC* en *AOB* zijn gelijkvormig. $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{2}{5}$, dus $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$.

Evenzo: $\dfrac{OQ}{OB} = \dfrac{3}{5}$, dus $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$.

Dus: $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.

c. $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$

10 a.



11 a. $\vec{AZ} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$

b. $\vec{0} = \frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{ZA} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{ZB}$

12 $\overrightarrow{OZ} = \frac{2}{27}\,\overrightarrow{OA_1} + \frac{3}{27}\,\overrightarrow{OA_2} + \frac{5}{27}\,\overrightarrow{OA_3} + \frac{7}{27}\,\overrightarrow{OA_4} + \frac{10}{27}\,\overrightarrow{OA_5}$

13 $\dfrac{1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 + 2\cdot 9 + 1\cdot 10}{1+2+3+2+1} = \dfrac{66}{9}$.

Het gemiddelde is 7,3,

Paragraaf 5 De stelling van Ceva

1 **a.** De driehoeken *FDC* en *BDA* zijn gelijkvormig, dus $\frac{FC}{AB}=\frac{CD}{AD}=\frac{1}{3}$. Net zo is $\frac{GC}{AB}=\frac{CE}{EB}=\frac{1}{3}$.

b. De driehoeken *FSC* en *BSX* zijn gelijkvormig, dus $\frac{FC}{BX}=\frac{CS}{SX}$. Net zo is $\frac{GC}{AX}=\frac{CS}{SX}$. Dus $\frac{FC}{BX}=\frac{GC}{AX}$.
Uit **a** volgt dan dat $AX=BX$.

2 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, verder $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, dus $\frac{AX}{XB}=1$

3 **a.** Je kunt het zwaartepunt *Z* bepalen door eerst de massa's in *A* en *B* samen te nemen. Het zwaartepunt van die twee ligt in *F*. Vervolgens moet je de massa's in *C* en *F* samennemen. Dus *Z* ligt op lijnstuk *CF*.
b. $\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a}$, $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$ en $\frac{CE}{EA}=\frac{a}{c}$, dus:
$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$.

4 **a.** $\frac{AO}{OB}=\frac{1}{2}=\frac{b}{4}$, dus $b=2$. $\frac{CD}{DB}=\frac{2}{3}=\frac{b}{c}=\frac{2}{c}$, dus $c=3$.
b. *X* is het zwaartepunt van de massa's in *A* en *C*, dus $\frac{AX}{XC}=\frac{3}{4}$.
c. *Z* is het zwaartepunt van de massa's 7 in *X* en 2 in *B*.
Dus $\frac{XZ}{ZB}=\frac{2}{7}$.

5 **a.** $\frac{AE}{EO}\cdot\frac{OD}{DB}\cdot\frac{FB}{AF}=\frac{9}{6}\cdot\frac{9}{27}\cdot\frac{FB}{AF}=1$, dus $\frac{FB}{AF}=\frac{2}{1}$.
$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(12,\text{-}5)$, dus $F=(0+12,15-5)=(12,10)$.
b. Noem het snijpunt *Z*. We leggen in *O*, *A* en *B* geschikte massa's, bijvoorbeeld 1 in *B*, 2 in *A* en 3 in *O*. Dan is *Z* het zwaartepunt van de drie massa's. Neem de massa's in *A* en *B* samen. Dat geeft massa 3 in *F*. *Z* is dan het zwaartepunt van de massa's 3 en 3 in *O* en *F*, dus het midden van *OF*. Dus $Z=(6,5)$.

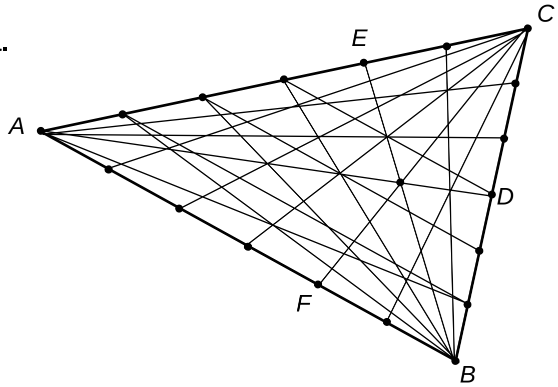
6 $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{3}$ en $\frac{CE}{EA}=\frac{1}{1}$, $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, dus
$\frac{AF}{FB}=\frac{3}{1}$, dus $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BA}=(\text{-}4\tfrac{1}{2},\text{-}1\tfrac{1}{2})$, dus
$F=(9-4\tfrac{1}{2},0-1\tfrac{1}{2})=(4\tfrac{1}{2},\text{-}1\tfrac{1}{2})$.

Om de coördinaten van X te vinden, leg je weer geschikte massa's in A, B en C, resp. 1, 3 en 1. Breng bijvoorbeeld eerst de massa's in B en C bij elkaar in D. X is dan het zwaartepunt van een massa 1 in A en een massa 4 in D, dus $\overrightarrow{DX} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{DA} = (\text{-}3, \text{-}1\frac{4}{5})$, dus $X = (3, 1\frac{1}{5})$.

7 Het snijpunt van CX met AB noemen we F. Dan CX gaat door het midden van $AB \Leftrightarrow \dfrac{AF}{FB} = 1$.

Verder: $\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$, dus $\dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$, dus $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{EA}{CE}$.

8 **a.**



Noem de hoekpunten van de driehoek A, B en C en de speciale verdeelpunten (zie plaatje), D, E en F .

Dan geldt: $\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{3}{3} \cdot \dfrac{2}{4} = 1$, dus gaan de lijnen AD, BE en CF door één punt.

b. Ga zo te werk als in **a**. Je moet dan positieve gehele getallen x, y en z zoeken zó, dat $\dfrac{x}{7-x} \cdot \dfrac{y}{7-y} \cdot \dfrac{z}{7-z} = 1$.

Na wat proberen, zie je dat dat niet gaat.

Je kunt ook wel bewijzen dat die x, y en z te vinden zijn als volgt:

Dan moet $xyz = 243 + 7xy + 7xz + 7yz - 47x - 49y - 49z - xyz$

oftewel: $2xyz = 243 + 7xy + 7xz + 7yz - 47x - 49y - 49z$

De rechterkant van de laatste vergelijking is deelbaar door 7. De linkerkant moet dan ook deelbaar zijn door 7. Dit kan alleen als x, y of $z = 7$.

9 Leg massa's 1 in de hoekpunten!