
4 Bewegen



Dit is een bewerking van
Meetkunde met coördinaten
Blok V *Bewegingen begrijpen*
van Aad Goddijn
ten behoeve van het nieuwe programma (2015) wiskunde B vwo.

✕ Opgaven met dit merkteken kun je overslaan zonder de opbouw aan te tasten.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

1	Beweging relatief bekeken	1
2	Samengestelde bewegingen	6
3	Beweging in formule	15
4	Cycloïde en meer in formule	23
5	Onderzoek aan Lissajousfiguren	28
6	Samenvatting	31
7	Antwoorden	34

Revisieuitgave, december 2011

Colofon

© 2011

cTWO

Auteurs

Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh

Met medewerking van

Theo van den Bogaart, Josephine Buskes, Gert Dankers,
Aad Goddijn, Dick Klingens

Illustraties

Op dit werk zijn de bepalingen van Creative Commons van toepassing. Iedere gebruiker is vrij het materiaal voor eigen, niet-commerciële doeleinden aan te passen. De rechten blijven aan cTWO.

1 Beweging relatief bekeken

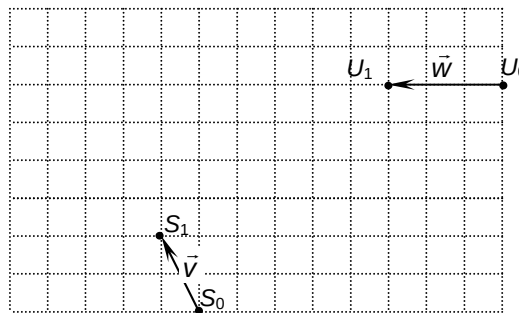
Relatieve positie

*Je zit in de trein. Je stelt je voor dat de (rijdende) trein stil staat. Het landschap lijkt te bewegen.
Welke kant op?*

*Evelien zit in de draaimolen. Haar vader staat aan de kant naar haar te kijken.
Welke baan beschrijft vader in de ogen van Evelien?*

- * 1 Een schip S vaart met constante snelheidsvector $\vec{v}$ op volle zee. De plaats van het schip op tijdstip t is S_t . Er geldt: $\vec{S}_t = \vec{S}_0 + t \cdot \vec{v}$.
Een tweede schip U vaart met constante snelheidsvector $\vec{w}$ en is op tijdstip t in U_t . Dus $\vec{u}_t = \vec{u}_0 + t \cdot \vec{w}$.
Hieronder en op het werkblad zijn de posities van de schepen op de tijdstippen 0 en 1 aangegeven en ook de snelheidsvectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

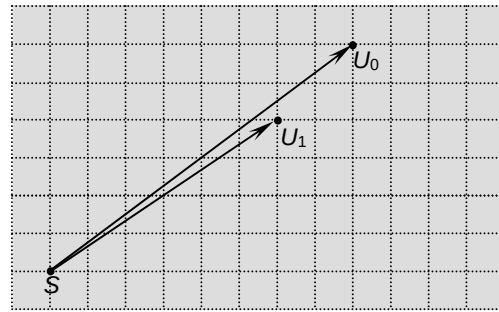
De lengte van een snelheidsvector geeft aan hoeveel afstand er in 1 tijdseenheid afgelegd wordt.



- a. Teken S_2 , S_3 , U_2 en U_3 op het werkblad. (Om gemakkelijker en nauwkeuriger te kunnen tekenen, is een rooster aangebracht,)

Zoals gezegd vaart schip S met vaste koers en snelheid. De zee is glad. Voor de stuurman van S lijkt zijn schip stil te liggen. Voor hem is het punt S vast; ten opzichte daarvan beweegt het schip U . De stuurman maakt een plaatje van de beweging van U zoals hij die ziet. Op de volgende bladzijde staat een begin van dat plaatje.

Relatieve
positie van U
ten opzichte
van S
op de tijd-
stippen 0 en 1



- b.** Ga na dat de vectoren hierboven de relatieve positie van U ten opzichte van S aangeven op $t=0$ en $t=1$.
c. Teken ook de vectoren die de relatieve positie van U ten opzichte van S aangeven op $t=2, 3$ en 4 .
 Als je het goed gedaan hebt, liggen de eindpunten van die vectoren op een rechte lijn. Die lijn noemen we k .

De relatieve positie van U ten opzichte van S op tijdstip t geven we aan met R_t .

- d.** Druk $\vec{r}_t$ uit in $\vec{s}_t$ en $\vec{u}_t$.

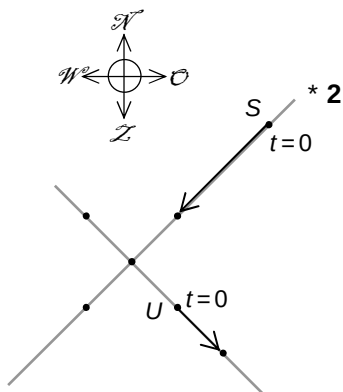
Hoe volgt hieruit dat de eindpunten van de vectoren naar de relatieve posities van U ten opzichte van S op een rechte lijn liggen?

Conclusie

Gegeven zijn twee bewegende punten S en U . Op tijdstip t is S in S_t en U in U_t .

Ten opzichte van S is de relatieve plaatsvector $\vec{r}_t$ van U op tijdstip t : $\vec{r}_t = \vec{u}_t - \vec{s}_t$

- e.** Je kunt natuurlijk ook alles vanuit U bekijken.
 Wat is het verband tussen de relatieve bewegingen van U ten opzichte van S en van S ten opzichte van U ?



Twee schepen S en U varen beide met constante snelheidsvector op zee, het ene in ZW-richting en het andere in ZO-richting. (Dus hun routes snijden elkaar loodrecht.) Van beide schepen is de positie op $t=0$ aangegeven en ook de snelheidsvector. De snelheid van S is 4 knopen en die van U is 2 knopen. We bekijken weer de relatieve beweging van U ten opzichte van S .

- a.** Teken de snelheidsvector waarmee U ten opzichte van S beweegt.

b. Bereken de exacte relatieve snelheid van U ten opzichte van S .

S is op $t=1\frac{1}{2}$ in het gemeenschappelijke punt van de routes en U op $t=-1$.

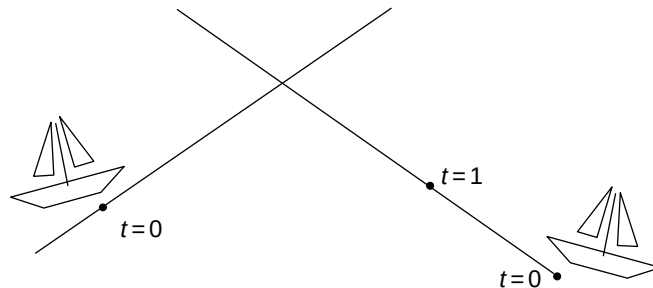
c. Geef op het werkblad de plaats van schip U ten opzichte van S aan op de tijdstippen -1 , 1 en 2 . Teken vervolgens de baan van U ten opzichte van S .

Neem aan dat t in uren wordt gerekend; 1 knoop = 1 zeemijl per uur.

d. Bereken de afstand (in zeemijl) van de twee schepen op $t=0$, $t=1$ en $t=2$.

e. Op welk tijdstip zijn de schepen het dichtst bij elkaar? Licht je antwoord toe.

*** 3** Twee schepen liggen op ramkoers (zij gaan botsen). Ze varen beide met een constante snelheidsvector.



In het plaatje is hun positie op $t=0$ aangegeven. Van een van de schepen is ook de positie op $t=1$ bekend.

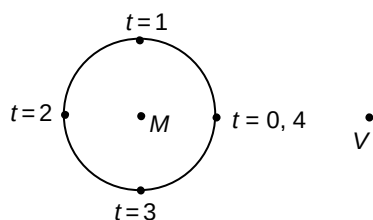
a. Teken, zonder te meten, op het werkblad de positie van het andere schip op $t=1$. Licht je antwoord toe.

b. Een waarnemer op het ene schip kijkt naar het andere. In welke richting ziet hij dat schip varen?

4 We bekijken nog eens de vraag over Evelien en de draaimolen aan het begin van de paragraaf:

Evelien zit in de draaimolen. Haar vader staat aan de kant naar haar te kijken.

Welke baan beschrijft vader in de ogen van Evelien?



In het plaatje zijn de posities van Evelien op $t=0, 1, 2, 3$ en 4 aangegeven; die punten liggen op een cirkel. De positie van vader is V .

We bekijken de relatieve positie van V ten opzichte van Evelien. Neem de positie van Evelien vast; noem dat punt E .

a. Neem de figuur over en teken de vectoren $\vec{EV}$ op de tijdstippen $t=0, 1, 2, 3$ en 4.

b. Wat is de baan van V , vanuit Evelien bekeken?

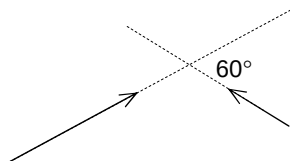
- ✂ * 5 Twee schepen varen beide met een constante snelheidsvector. Hieronder is hun positie op een bepaald tijdstip getekend.



De snelheidsvector van het ene schip is getekend. Het andere schip vaart twee keer zo snel als het eerste schip. De schepen liggen op ramkoers.

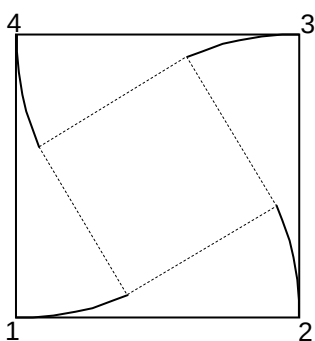
Construeer op het werkblad de snelheidsvector van het tweede schip. Niet meten!

- 6 Twee schepen varen met constante snelheidsvector. Ze liggen op ramkoers. Hun snelheidsvectoren maken een hoek van 120° . Een schip heeft snelheid 4 knopen, het andere snelheid 2 knopen; zie de figuur. Met welke snelheid naderen de schepen elkaar?



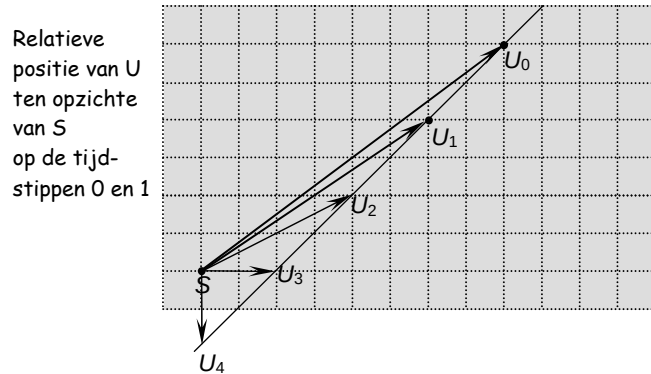
- ✂ 7 Vier indianen op de hoekpunten van een vierkant achtervolgen elkaar: 1 achtervolgt 2 (indiaan 1 heeft zijn blik voortdurend op 2 gericht), 2 achtervolgt 3, 3 achtervolgt 4 en 4 achtervolgt 1, met dezelfde constante snelheid. Ze ontmoeten elkaar in het midden van het vierkant. Op elk moment zitten ze op de hoekpunten van een (steeds kleiner wordend) vierkant.

Als de zijden van het startvierkant 120 meter zijn en de indianen lopen 10 m/s, hoe lang duurt het dan voor ze elkaar ontmoeten en wat is de afstand die ze dan afgelegd hebben?



Met coördinaten

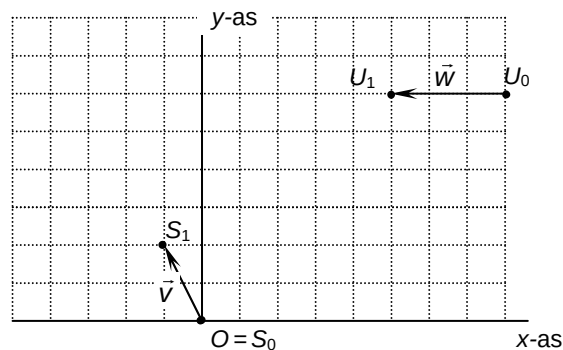
- * 8 De gegevens zijn als in opgave 1. De twee schepen liggen niet op ramkoers: ze botsen niet.



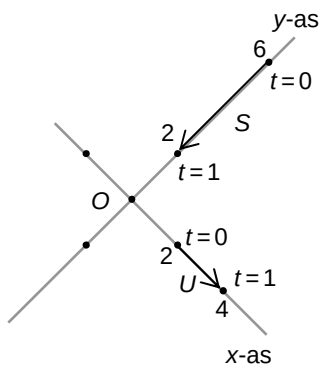
Het plaatje hierboven (antwoord op opgave 1c) staat op het werkblad.

- a. Teken daarin de vector die de relatieve positie van U ten opzichte van S aangeeft als de schepen het dichtst bij elkaar zijn.

We kiezen een coördinatenstelsel. S_0 is de oorsprong $(0,0)$, $U_0 = (8,6)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.



- b. Geef een pv van de lijnen waarlangs de schepen S en U varen en ook van de lijn k waarop de eindpunten van de vectoren liggen die je in 1c getekend hebt.
- c. Bereken exact het tijdstip waarop de schepen het dichtst bij elkaar zijn.



9 We brengen in opgave **2b** een assenstelsel aan met als oorsprong het snijpunt van de routes met S op $t=0$ op de positieve y -as en U op de positieve x -as. Kies 1 zeemijl als eenheid (1 knoop is 1 zeemijl/uur).

a. Toon aan dat de afstand tussen de schepen op tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{20t^2 - 40t + 40}$ zeemijlen.

b. Bereken met kwadraatafsplitsen het tijdstip waarop de schepen het dichtst bij elkaar zijn.

Opmerking. Je kunt dat tijdstip ook met differentiëren berekenen.

Het tijdstip waarop de schepen het dichtst bij elkaar zijn kun je ook uitrekenen door de relatieve beweging van U ten opzichte van S te bekijken. Dat wil zeggen de beweging van een punt R dat beweegt volgens $(x,y) = (2t + 2, 4t - 6)$. Op het gezochte tijdstip staat OR loodrecht op de lijn met $pv (x,y) = (2t + 2, 4t - 6)$.

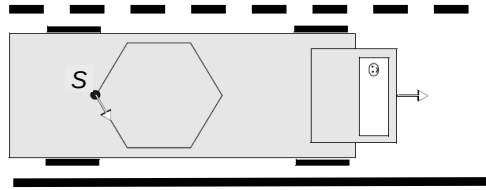
c. Bereken ook hiermee dat tijdstip.

2 Samengestelde bewegingen

In deze paragraaf bekijken we de baan en de snelheid van een punt dat aan twee bewegingen tegelijkertijd deelneemt.

Two rechte lijnige bewegingen

- 1 Je staat op een open vrachtwagen en loopt langzaam met een snelheid van $\frac{1}{2}$ meter per seconde over een regelmatige zeshoek met zijden van 1 meter. Een diagonaal van de zeshoek ligt in de richting waarin de vrachtwagen rijdt.



Je begint in punt S in de figuur. Je bent na twaalf seconden weer op dezelfde plek op de vrachtwagen terug. Gedurende die twaalf seconden heeft je beweging zes verschillende snelheidsvectoren.

- a. Teken die alle zes met hetzelfde beginpunt. Neem 2 cm om de grootte van de snelheid van $\frac{1}{2}$ m/s aan te geven.

De vrachtwagen rijdt langzaam maar constant met een snelheid van $\frac{1}{2}$ meter per seconde.

Jij loopt weer over de zeshoek.

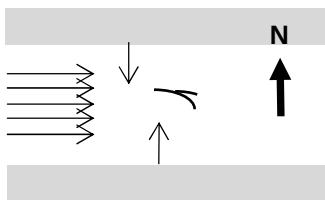
- b. Teken de zes snelheidsvectoren van je beweging *ten opzichte van de straat*, alle zes met hetzelfde beginpunt.
c. Wat is je maximale en minimale snelheid ten opzichte van de straat?
d. Maak een tekening op schaal van de baan die je ten opzichte van de straat maakt.

Herhaal het experiment, waarbij jij twee maal zo snel over de zeshoek loopt, dus al na zes seconden in S terugkomt, en de vrachtwagen dezelfde snelheid houdt.

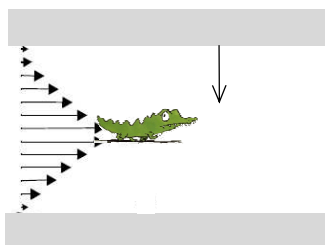
- e. Teken de zes snelheidsvectoren van je beweging ten opzichte van de straat en ook je baan in deze situatie ten opzichte van de straat.

Een waarnemer op de stoep ziet de vrachtwagen naar rechts bewegen. Hij krijgt sterk de indruk dat je op zeker moment naar links beweegt.

- f. Klopt dat?



- 2** Een rivier stroomt over de volle honderd meter breedte van west naar oost, op alle plekken met een snelheid van 2 m/s. De zwemmer steekt over, met zwemsnelheid 1 m/s, steeds gericht op de zon die in het zuiden staat.
- Is de snelheidsvector van de zwemmer (ten opzichte van het land) constant? Volgt daaruit dat de zwemmer in rechte lijn beweegt?
 - Bereken grootte en richting van die snelheid ten opzichte van het land.
 - Bereken hoeveel tijd de zwemmer voor de oversteek nodig heeft.
 - Aan de overkant gaat de zwemmer meteen terug, met dezelfde snelheid, nu met de zon in de rug. Teken heen- en terugroute. Duren die even lang?
 - Bij de start drijft een takje in het midden van de rivier, recht voor het startpunt. Komt de zwemmer dat takje tegen, op de heen- of terugroute?



- 3** Een andere rivier stroomt over de volle honderd meter breedte van oost naar west, maar in het midden aanmerkelijk sneller dan aan de kant. De zwemmer steekt over, met zwemsnelheid 1 m/s, steeds gericht op de zon die in het zuiden staat.
- Is de snelheidsvector van de zwemmer (ten opzichte van het land) constant? Beweegt de zwemmer in een rechte lijn?
 - Bereken hoeveel tijd de zwemmer voor de oversteek nodig heeft.
 - Aan de overkant gaat de zwemmer meteen terug. Schets heen- en terugroute. Duren die even lang?
 - In het midden van de rivier, recht voor het startpunt drijft een kaaiman (slapend). Komt de zwemmer de kaaiman tegen? Zo ja, op de heen- of terugroute of beide, als de kaaiman niet gewekt wordt?

Een punt neemt aan twee bewegingen tegelijk deel. De snelheidsvector waarmee het punt als gevolg daarvan op een bepaald moment beweegt, vind je door de snelheidsvectoren van die twee bewegingen afzonderlijk, op dat moment op te tellen.

Cirkelbeweging en rechte lijnige beweging

4



Aan het ventiel van een fiets is een lampje vastgemaakt. (Het wordt gevoed door een batterij die tussen de spaken zit.)

In een tijdopname laat het lampje zijn baan op de foto achter. Een extra flitsje laat de fietser zien.

a. Als de fietser een vaste snelheid aanhoudt, heeft het lampje dan ook een vaste snelheid?

b. Helemaal rechts zit een gaatje in de lichtbaan. En in de middelste boog zit ook een gaatje. Hoe komt dat?

De baan op de foto is een zogenaamde *cycloïde*.

De cycloïde is de baan van een punt op een cirkelrand, als de cirkel zonder slippen over een rechte lijn rolt.

We spreken van *rolcirkel* en *grondlijn*.

Cycloïde betekent letterlijk *cirkelachtige*.

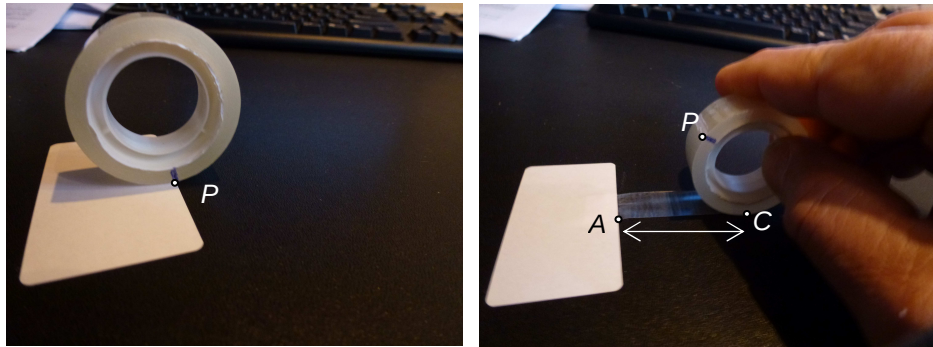
Experiment

Neem een rond voorwerp, bijvoorbeeld een koker of een flesje. Markeer een punt op de omtrek. Begin met dat gemarkeerde punt aan de onderkant, dus op de tafel en rol dan het voorwerp langzaam over de tafel, zonder slippen. Volg het punt. Uiteindelijk komt het weer op tafel terecht. Hoe ziet de boog die het punt beschrijft eruit? Zo krijg je de baan van het ventiel van een fietswiel op je tafel.

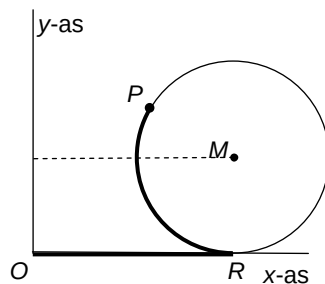
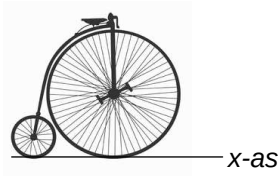
Je kunt het experiment ook op youtube zien:

<http://www.youtube.com/watch?v=vkahXgCaHho>

- 5 Een rolletje plakband wordt uitgerold. Het punt P op het rolletje dat in het begin 'onder' zit, beweegt naar boven.



We nemen de straal van het rolletje als eenheid.
Als de lengte van het afgerolde stuk AC 2 is, bereken dan in twee decimalen hoe hoog P is gekomen.



- * 6 Een fietswiel rolt over de x -as. De dikte van de band wordt verwaarloosd. We volgen het ventiel. De straal van het wiel kiezen we als eenheid. We bekijken de hoogte y van het ventiel als er t meter is afgelegd. We starten als het ventiel op hoogte 0 is.

a. Hoeveel meter is er afgelegd als het ventiel voor de eerste keer weer op de x -as komt?

Hiernaast is de situatie getekend als het wiel over de weg het stuk OR heeft afgelegd.

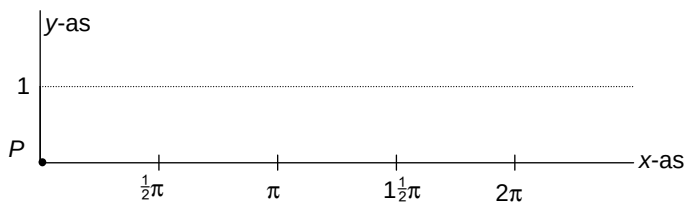
Het middelpunt van het wiel noemen we M , het ventiel P en de eerste coördinaat van het contactpunt R met de grond noemen we t .

b. Waarom is de lengte van de cirkelboog PR ook t ?

c. Bepaal de waarden van t tussen 0 en 2π waarvoor $y=1$.

d. Bereken de exacte waarde van y als $t=\frac{3}{4}\pi$.

De tekening hieronder staat ook op het werkblad.



e. Schets hierop de baan van P .

Je kunt je schets van de baan controleren met de GeoGebra applet *cycloïde*.

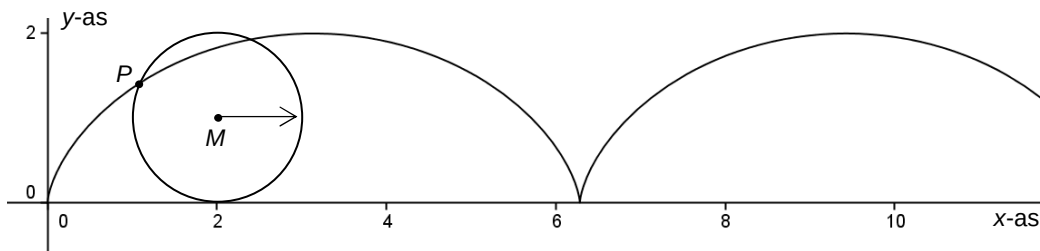
Neem aan dat de fietssnelheid 1 eenheid per seconde is. Dat is de snelheid waarmee M zich naar rechts verplaatst.

P neemt deel aan twee bewegingen:

- P draait eenparig om M ,
- M beweegt eenparig over de lijn $y = 1$.

f. Wat is de snelheid van P in de hoogste punten van de baan? En in de laagste? En in de punten op hoogte 1?

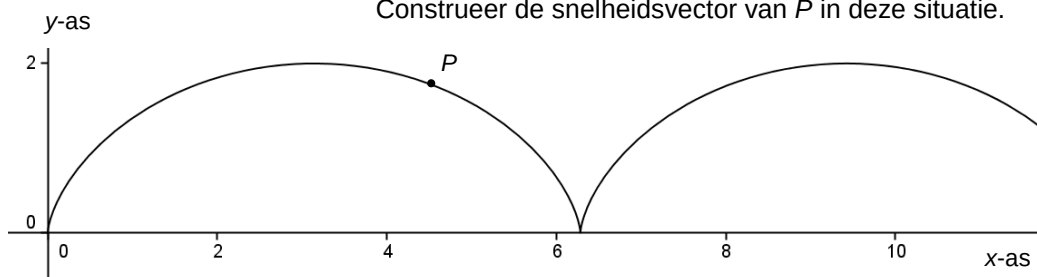
- * 7 We gaan verder met de vorige opgave. We bekijken het punt P op de rolcirkel (= fietswiel) op een zeker moment t .
- a. De tekening hieronder staat ook op het werkblad. Construeer daarop de snelheidsvector in dat punt P met behulp van de snelheidsvector van de rechte lijnige beweging van het middelpunt van de rolcirkel en de snelheidsvector van de cirkelbeweging van P ten opzichte van het middelpunt M van de rolcirkel.

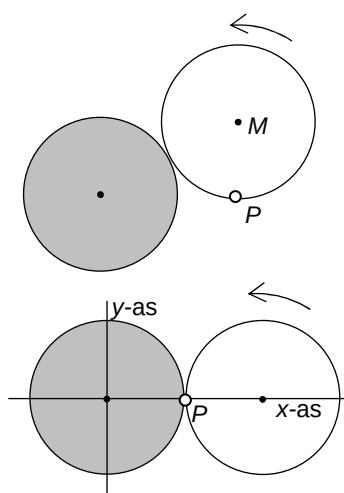


- b. Teken de snelheidsvectoren op nog enkele momenten tijdens één cycloïde-boog; teken die snelheidsvectoren allemaal met hetzelfde beginpunt. De eindpunten van de snelheidsvectoren vormen weer een cirkel. Wat is het middelpunt en wat de straal? Licht je antwoord toe.

c. Hoe verandert de snelheidsvector bij de overgang tussen een boog en de volgende boog?

- d. De tekening hieronder staat ook op het werkblad. Construeer de snelheidsvector van P in deze situatie.





Twee cirkelbewegingen

Een cirkel (in het plaatje wit) waarop een punt P is gemarkeerd, wordt zonder slippen om een andere, even grote cirkel (in het plaatje grijs) gedraaid. De baan die het punt P beschrijft is een zogenaamde *limaçon*.

Neem aan: de cirkels hebben straal 1 cm. We brengen een assenstelsel aan zó dat het contactpunt van de cirkels de standaardcirkelbeweging maakt, dat wil zeggen dat P op $t=0$ in $(1,0)$ is met snelheid 1 cm/s linksom over de eenheidscirkel beweegt. (Zeg dat t de tijd is, die we rekenen in seconden.)

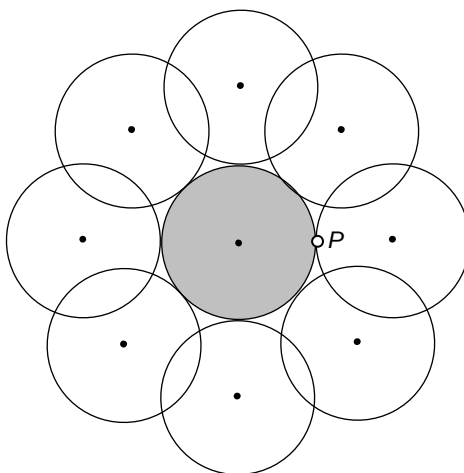
NB. De standaardcirkelbeweging is:
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

- * 8 a.** Met welke snelheid draait het middelpunt M van de witte cirkel rond?

We bestuderen de beweging van P . Daarvoor tekenen we eerst enkele punten van de baan.

De tekening hieronder staat ook op het werkblad. Hierin is de positie van de witte cirkel getekend op de tijdstippen $t=0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi, 1\frac{1}{4}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{3}{4}\pi$ en 2π .

- b.** Teken met behulp hiervan de positie van P op die tijdstippen.

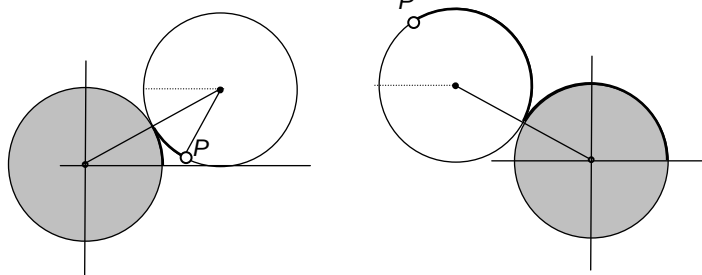


- c.** Schets de baan van P .
d. Je kunt je schets controleren met behulp van de applet *limaçon*.

9 We gaan verder met de limaçon.

P beweegt in tegenwijzerrichting om M . De snelheid waarmee P om M beweegt is 2 cm/s.

a. Leg dat uit. Hiervoor kun je de plaatjes hieronder goed gebruiken.



Je kunt als volgt punten van de limaçon vinden.

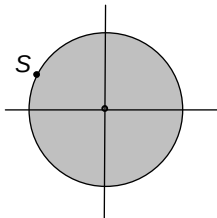
Teken een raaklijn aan de eenheidscirkel. Het spiegelbeeld van $(1,0)$ in de raaklijn ligt op de baan.

b. Leg dat uit.

c. Teken zo op het werkblad het punt van de limaçon als het contactpunt van de cirkels in S is.

Teken nog enkele andere punten van de limaçon.

Met de GeoGebra applet *limaçon9*, kun je zien dat je de limaçon krijgt als je volgens **9c** te werk gaat.



*** 10** Bekijk nog eens de applet *limaçon* voor een animatie.

a. In het punt $(1,0)$ lijkt P in de animatie even stil te staan. Leg dit uit met behulp van de snelheidsvector op dat moment.

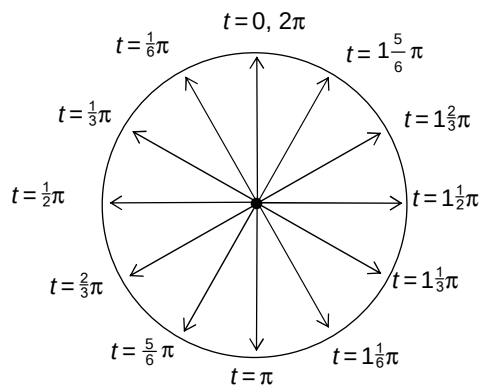
Tip. Bedenk dat P deelneemt aan twee bewegingen:

- P ligt op de rolcirkel, die in tegenwijzerrichting om O draait,
- P draait in tegenwijzerrichting om het middelpunt van de rolcirkel.

b. Teken de snelheidsvector van P als $t = \frac{1}{2}\pi$.

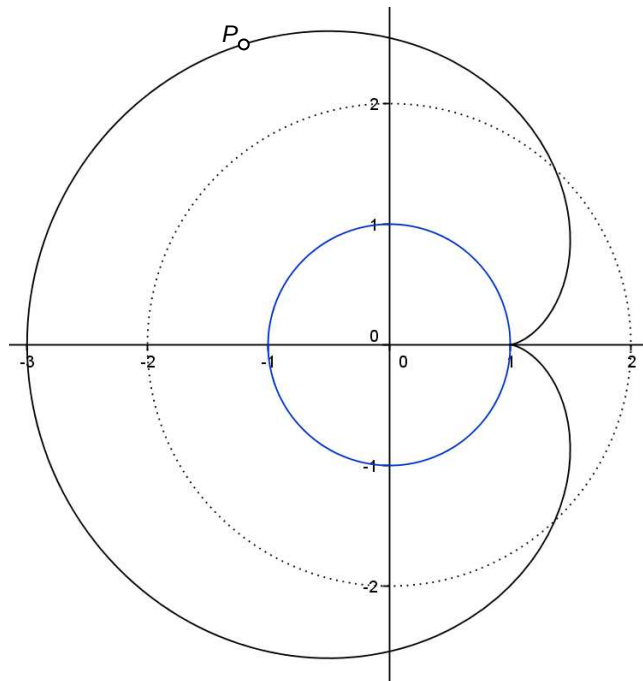
Welke hoek maakt die snelheidsvector met de y -as?

M beweegt over de cirkel met middelpunt O en straal 2. Hieronder staat een plaatje van de snelheidsvectoren, waarmee M over die cirkel beweegt.



- c. Ga na dat dit een juist plaatje is en maak op dezelfde schaal een plaatje van de snelheidsvectoren van de beweging van P om M , met dezelfde waarden van t .
- d. Door de twee plaatjes te combineren, kun je het tijdstip bepalen waarop P horizontaal beweegt. Doe dat.

* **11** In de figuur hieronder is de baan van het middelpunt M van de rolcirkel gestippeld.

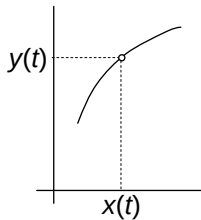
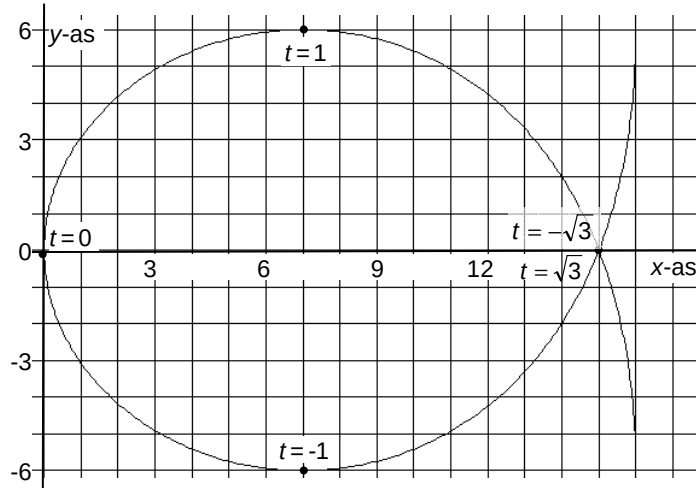


Construeer de snelheidsvector waarmee P beweegt op het moment van tekening.

3 Beweging in formule

Van twee naar één dimensie

- * 1 In het platte vlak hebben we een assenstelsel aangebracht. Een kogeltje (of een ander minuscule voorwerp) beweegt in het platte vlak. De baan is hieronder getekend. Bij enkele punten is het tijdstip t geschreven waarop het kogeltje daar langs komt.



De eerste coördinaat van het punt waar het kogeltje zich op tijdstip t bevindt noemen we $x(t)$ en de tweede coördinaat $y(t)$. In de figuur hierboven lees je bijvoorbeeld af dat $x(1) = 7$ en $y(1) = 6$.

- a. Lees af: $x(-1)$, $x(0)$, $x(1)$, $x(\sqrt{3})$ en $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$.

Formules voor $x(t)$ en $y(t)$ zijn:

$$x(t) = 8t^2 - t^4, y(t) = 9t - 3t^3.$$

Meestal noteren we dat zó:

$$\begin{cases} x(t) = 8t^2 - t^4 \\ y(t) = 9t - 3t^3 \end{cases} \text{ of wat korter: } \begin{cases} x = 8t^2 - t^4 \\ y = 9t - 3t^3 \end{cases}.$$

- b. Ga na of je antwoorden in a met deze formules overeenstemmen.

Er zijn vier tijdstippen waarop $x = 12$. In de figuur zie je de bijbehorende plaatsen op twee van die tijdstippen; de andere twee vallen buiten de figuur.

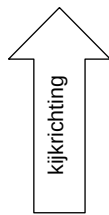
- c. Bereken de vier tijdstippen bij die punten exact. Wat zijn de plaatsen?

- d. Bereken ook de tijdstippen waarvoor het kogeltje eerste coördinaat -9 heeft en de bijbehorende plaatsen.

Het kogeltje beschrijft een baan in het platte vlak. De formules vertellen voor elk moment waar het kogeltje is. De plaats van het kogeltje is dus gegeven met behulp van de variabele t (de tijd), de zogenaamde *parameter*. We noemen het tweetal formules een **parameter-voorstelling** (pv) van de baan.

In 3 *Rekenen aan lijnen* heb je kennis gemaakt met parametervoorstellingen van rechte lijnen.

We kunnen ook de bewegingen in de x - en y -richting afzonderlijk bekijken.



Bekijken we de beweging vanuit de negatieve y -as (dus loodrecht op de x -as; het “onderaanzicht”), dan zien we het kogeltje over de x -as bewegen: van rechts naar links, met de uiterste stand in 0 en dan van links naar rechts:



(Om de beweging over de x -as goed te zien, is de dikke lijn niet precies over de x -as getekend.)

e. Is er ook een uiterste positie aan de rechterkant? Hoe zie je dat aan de formules? Kun je het onderaanzicht van de beweging afmaken?



Bekijken we de beweging vanuit de negatieve x -as (dus loodrecht op de y -as; het “zijaanzicht van links”), dan zien we het voorwerp over de y -as bewegen:

van boven naar beneden, met een laagste stand, daarna naar boven tot een hoogste stand en dan weer naar beneden.

f. Teken de beweging over de y -as.

g. Komt het voorwerp nog hoger dan de hoogste stand (zoals die hierboven genoemd is)? En lager dan de laagste positie? Hoe zie je dat aan de formules? Kun je het zijaanzicht van links afmaken?

h. In welke richting beweegt het kogeltje ongeveer op tijdstip 1000, ten opzichte van de x -as? Kies uit de acht mogelijkheden hieronder.

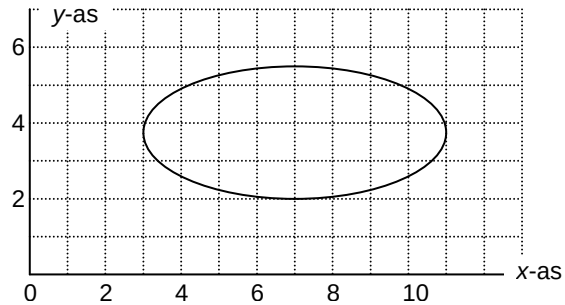


Voor elke waarde van t geldt: $x(-t) = x(t)$ en $y(-t) = -y(t)$.

i. Hoe zie je dat aan de formules voor x en y ?

j. Wat betekent dit voor de baan?

- 2 Een kogeltje beschrijft de ellipsvormige baan die hieronder getekend is. Veronderstel dat het kogeltje op tijdstip 0 in het hoogste punt van de ellips begint en dat het dan naar rechts beweegt.



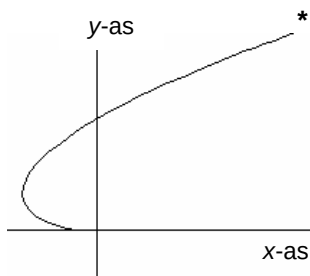
- Teken het onderaanzicht van de beweging, dus over de x -as.
 - Teken het zijaanzicht van links van de beweging, dus over de y -as.
- 3 Teken in één assenstelsel de volgende bewegingen, gebruik kleur.
- $(x,y) = (t, t+2)$
 - $(x,y) = (|t|, t+2)$
 - $(x,y) = (|t|, |t+2|)$

We bekijken de beweging in onderdeel **c** nader. We kunnen die beschouwen als de beweging van een biljartbal die achtereenvolgens van de y -as en de x -as terugstuit.

- Hoe snel beweegt de biljartbal (x en y in meter en t in sec)?

Opmerking

Als de bal op een band van het biljart stuit, wordt zijn bewegingsrichting plotseling veranderd. Op die momenten kun je niet spreken van de snelheidsvector van de bal.



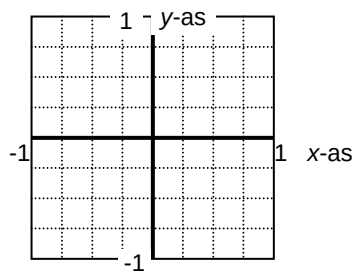
- * 4 Hiernaast en op het werkblad staat de kromme met pv $(x,y) = (t^3 - 3t, t^2)$ voor $t > 0$.
- Teken op het werkblad de kromme voor $t < 0$.
 - Bereken exact de coördinaten van het punt waar de kromme zichzelf snijdt.
 - Bereken exact de coördinaten van de punten met tweede coördinaat 2.

In opgave 1 zijn we begonnen met de baan van een kogeltje en hebben daarna de x - en y -coördinaat afzonderlijk als functie van de tijd t bekeken. Deftiger gezegd: we hebben de baan ontleed in een horizontale en een verticale beweging.

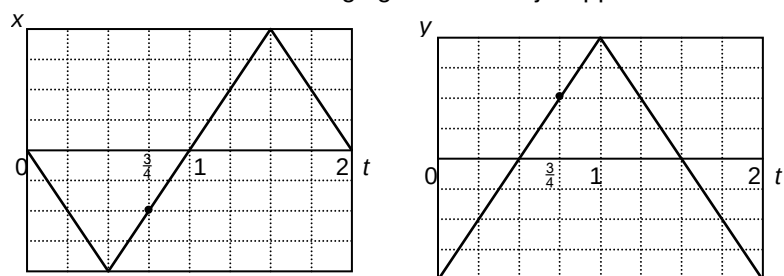
In het volgende gaan we omgekeerd te werk: we beginnen met bewegingen in de x - en y -richting en stellen die samen tot een beweging in het platte vlak.

Van één naar twee dimensies

- 5 Midden over een vierkant biljart kiezen we de x - en y -as, zoals in de figuur hieronder.



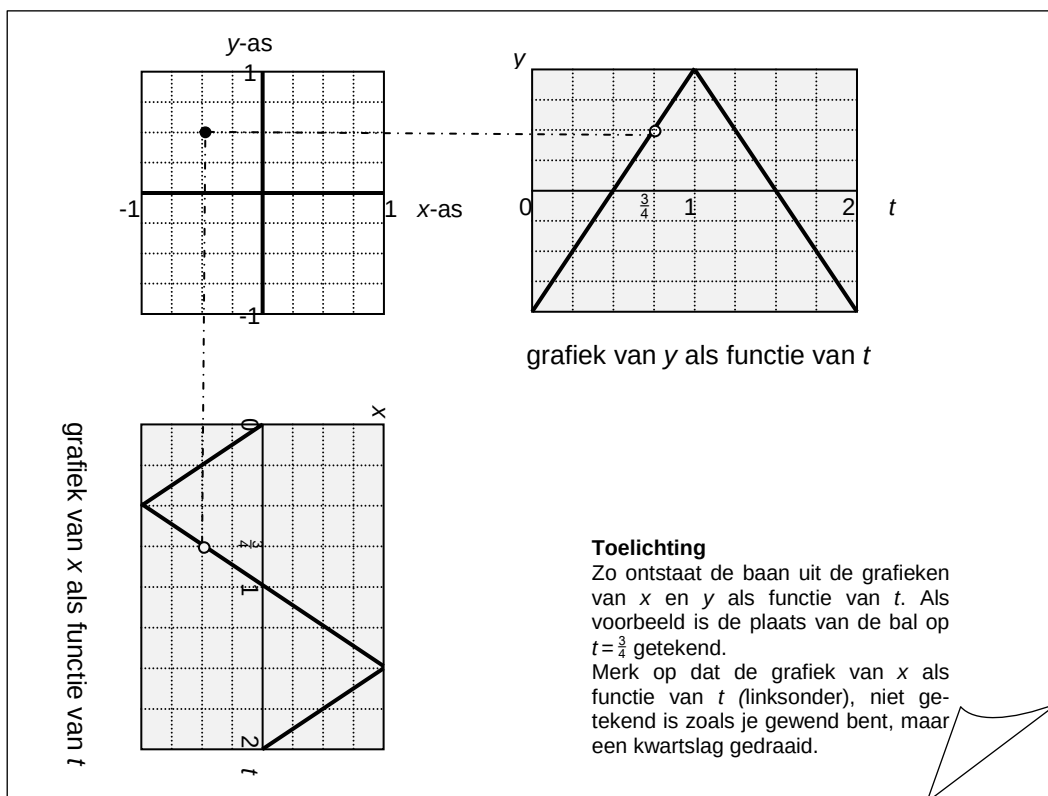
Een (puntvormige) biljartbal beweegt over het biljart. Onderstaande grafieken geven de afzonderlijke horizontale en verticale beweging tussen de tijdstippen 0 en 2.



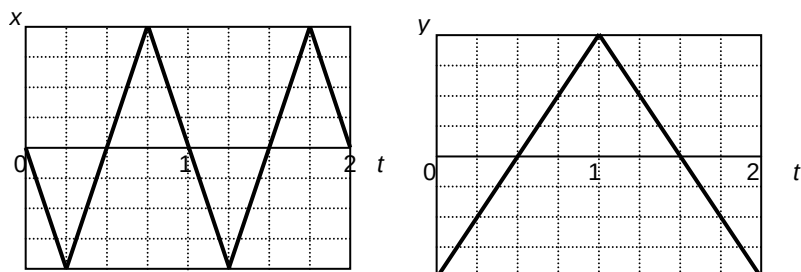
- Neem het biljart in het assenstelsel over en geef daarin de plaats aan van de biljartbal op $t = \frac{3}{4}$.
- Bepaal nog enkele punten en teken de baan van de biljartbal.

Tussen twee momenten waarop de bal op een band stuit, heeft de bal constante snelheid.

- Bepaal die uit de horizontale en verticale beweging.



- 6 De biljartbal wordt nu anders gestoten, op hetzelfde biljart. Gegeven zijn x en y als functie van de tijd t .

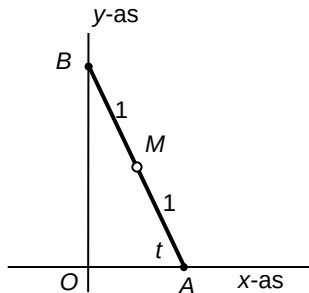


- a. Hoe vaak raakt de bal een band als $0 < t < 2$?
- b. Geef op het biljart de plaatsen aan waar de bal een band raakt en schrijf bij die plaatsen de bijbehorende tijdstippen.
 Teken de baan van de bal.

Neem (om de gedachten te bepalen) de meter als lengte-eenheid en de seconde als tijdseenheid.

- c. Wat is de snelheid van de bal (in m/s) tussen de momenten dat hij op een band stuit?

Cirkelbewegingen



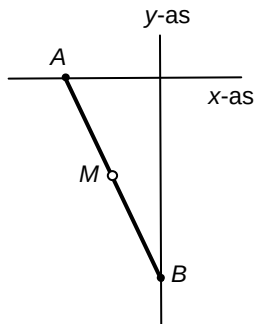
7 De glijdende ladder

Een ladder van lengte 2 glijdt met het ene einde A over de positieve x-as en met het andere B over de positieve y-as. We bekijken hoe het midden M van de ladder beweegt. De grootte van hoek OAB noemen we t .

- Druk de coördinaten van M in t uit.
- Hoe volgt uit **a** wat de baan van M is?

Kennelijk is de afstand van M tot O constant 1.

- Kun je dat ook meetkundig verklaren?



Om M over de *hele* cirkel te laten bewegen moet je A en B ook over een stuk van de negatieve x- en y-as laten bewegen.

M kunnen we de coördinaten $(\cos t, \sin t)$ geven, maar de parameter t is daarin niet de hoek OAB.

- Wat stelt de parameter t daarin wel voor?

8 In opgave 7 hebben we opnieuw de bekende pv van de eenheidscirkel ontmoet:

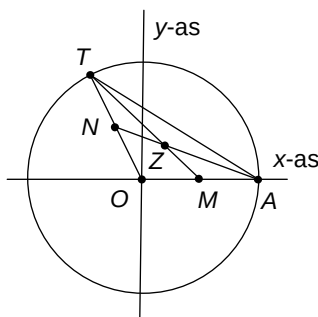
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

We nemen t in seconden en x en y in cm.

- Met welke snelheid wordt de cirkel doorlopen?
- Geef een pv van de eenheidscirkel waarbij de baan twee keer zo snel doorlopen wordt.
- Welk verband tussen x en y geldt voor punten van de eenheidscirkel, zonder tussenkomst van de parameter t ?

9 We bekijken vijf bewegingen. Geef van elk de baan, het startpunt (de positie op $t=0$), de snelheid en de richting van de beweging. (Bij **d** hangt die af van t .)

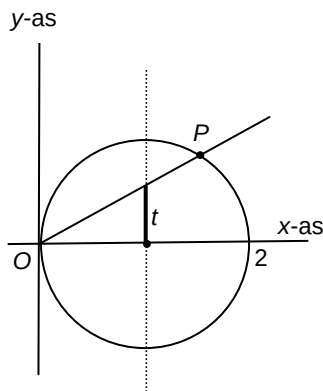
- $(x,y) = (\sin t, \cos t)$
- $(x,y) = (-\sin t, -\cos t)$
- $(x,y) = (-\cos t, -\sin t)$
- $(x,y) = (\cos t, \cos t)$
- $(x,y) = (2\sin t, 2\cos t)$



✂ 10 T maakt de standaardcirkelbeweging. A is het punt (1,0) en Z het zwaartepunt van driehoek AOT.

- Bekijk de beweging die Z maakt met GeoGebra. Beschrijf de baan.
- Bepaal de bewegingsvergelijkingen van Z. Kloppen die met je beschrijving?

Er zijn ook pv's van de eenheidscirkel zonder goniometrische functies. In de volgende opgave maken we er een.



- 11** In het plaatje hiernaast is de cirkel met straal 1 en middelpunt $(1,0)$ getekend. De lijn door O met helling t snijdt de cirkel ook nog in P .

We gaan de coördinaten van P in t uitdrukken.

- Ga na dat $x^2 + y^2 - 2x = 0$ een vergelijking van de cirkel is.
- Geef een vergelijking van lijn OP , uitgedrukt in t .

De eerste coördinaat x van P voldoet aan de vergelijking $x^2 + t^2 x^2 - 2x = 0$. Hiermee kun je x uitrekenen.

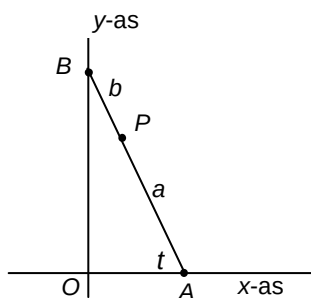
- Ga na dat je vindt: $P = \left(\frac{2}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$.

We hebben nu dus een pv van de cirkel met middelpunt $(1,0)$ en straal 1. Door deze 1 naar links te verschuiven, krijg je de eenheidscirkel.

- Ga na dat $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ y = \frac{2t}{t^2+1} \end{cases}$ een pv van de eenheidscirkel is.

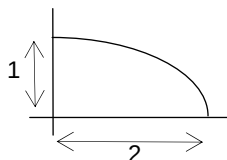
Dit is niet een pv van de *hele* eenheidscirkel. Je mist namelijk één punt.

- Welk punt krijg je niet?



- 12** Opnieuw een glijdende ladder zoals in opgave 7, nu van een onbepaalde lengte. We bekijken nu een punt P op de ladder, een ander dan het midden. De afstand PA noemen we a , de afstand PB noemen we b .

- Druk de coördinaten van P uit in $t = \angle OAB$.
- Teken de baan van P in GeoGebra. De figuur die je krijgt is een deel van een **ellips**.
- Geef een vergelijking van de baan van P .



Je wilt een punt P op een ladder het stuk ellips hiernaast laten beschrijven

- Hoe lang moet de ladder zijn en waar moet P liggen?

Met beperkingen

- 13** Gegeven is de kromme met pv $(x,y) = (t^2 - 3, 2t^2)$.
- Bereken enkele punten, geef die aan in een assenstelsel en teken de baan.
 - Geef een vergelijking van de baan.

Anne heeft als antwoord op vraag **b** gegeven: $y = 2x + 6$. Dat is niet helemaal correct, want de grafiek van $y = 2x + 6$ is een *hele* lijn, terwijl de kromme van de pv een *halve* lijn is. Een correcte beschrijving van de kromme bestaat uit een vergelijking, tezamen met een ongelijkheid: $y = 2x + 6$ en $y \geq 0$.

- Welke afstand legt het punt af gedurende het tijdsinterval $[-5, 5]$?

- 14 a.** Ga na dat de kromme met pv $(x,y) = (-2^t, 1 - 3 \cdot 2^t)$ een deel van een rechte lijn is. Welk deel?
Controleer je antwoord met de GR of met GeoGebra.
Beschrijf de kromme met een vergelijking, tezamen met een ongelijkheid.

- b.** Beredeneer hoe de volgende krommen eruit zien. Teken de krommen; let op eventuele grenspunten. Controleer je antwoorden met de GR of met GeoGebra. Beschrijf elk van de krommen met een vergelijking, zonodig tezamen met een ongelijkheid.

- $(x,y) = (2 \sin t, 1 - 3 \sin t)$
- $(x,y) = (t - |t|, t + |t|)$
- $(x,y) = (2^t, 2^{2t})$
- $(x,y) = (2^t, 2^{-t})$.
- $(x,y) = (\sqrt{1-t}, 1+t)$
- $(x,y) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{1+t})$

- ✂ **15** Een kogeltje maakt de beweging:
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

We nemen $0 \leq t \leq 2\pi$.

- Welke waarden kunnen x en y aannemen?
- Teken de baan op de GR.

De baan lijkt een deel van de parabool met top $(0,1)$ die door $(1,0)$ gaat.

- Stel een vergelijking op van de parabool met top $(0,1)$ die door $(1,0)$ gaat.

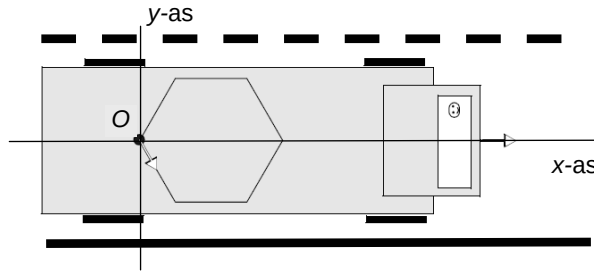
- Controleer of $(\cos t, \sin^2 t)$ aan de vergelijking voldoet.

- Hoe kun je zien aan de parametervoorstelling welk deel van de parabool je krijgt?

4 Cycloïde en meer in formule

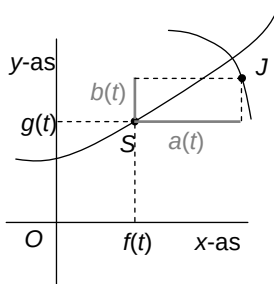
Twee bewegingen in één

- 1 We komen terug op opgave 1 van paragraaf 2. Je loopt met een snelheid van $\frac{1}{2}$ m/s over een regelmatige zeshoek met zijden van 1 meter op de vrachtwagen.



Er is op de weg een assenstelsel aangebracht; zie de figuur. Op $t=0$ ben je in $O(0,0)$. Je bent na twaalf seconden weer op dezelfde plek op de vrachtwagen terug. De vrachtwagen rijdt met een snelheid van $\frac{1}{2}$ m/s, een pv van de vrachtwagenbeweging is: $(x,y) = (t,0)$, dus $\frac{1}{2}$ meter is als eenheid gekozen.

- Bereken exact de coördinaten van je positie in het assenstelsel na 2 seconden. Ook na 4 seconden.
- Geef een pv van jouw beweging in het assenstelsel als $0 \leq t \leq 2$ en ook als $2 \leq t \leq 4$.



Je neemt gelijktijdig deel aan twee bewegingen:

- je loopt over de vrachtwagen,
- de vrachtwagen rijdt.

De totale beweging ten opzichte van een vast punt (in het voorbeeld O) krijg je door de twee afzonderlijke bewegingen op te tellen.

Een punt S beweegt ten opzichte van de oorsprong

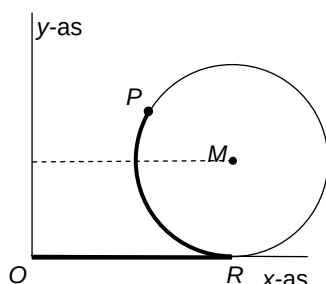
$$\text{volgens } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}.$$

Een punt J beweegt ten opzichte van het punt S

$$\text{volgens: } \begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}.$$

Dan beweegt J ten opzichte van de oorsprong

$$\text{volgens: } \begin{cases} x = f(t) + a(t) \\ y = g(t) + b(t) \end{cases}.$$



2 We komen terug op de cycloïde van paragraaf 2. Een cirkel met straal 1 rolt over de x -as. We bekijken het punt P op de cirkel dat op $t=0$ in $O(0,0)$ is.

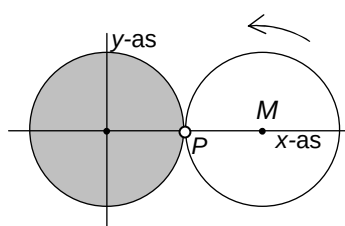
P neemt deel aan twee bewegingen:

- P draait eenparig om M ,
- M beweegt eenparig over de lijn $y=1$.

a. Ga na dat de relatieve positie van P ten opzichte van M gegeven wordt door: $(-\sin t, -\cos t)$.

b. Geef de bewegingsvergelijkingen van M .

c. Geef de bewegingsvergelijkingen van P . Teken de baan van P in GeoGebra.

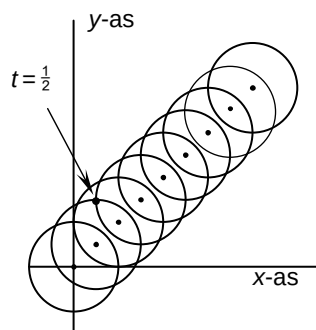


3 We komen terug op de limaçon van paragraaf 2. De witte cirkel draait om de grijze. De cirkels hebben straal 1 cm. We brengen een assenstelsel aan zó dat het contactpunt van de cirkels de standaardcirkelbeweging maakt. We bekijken de baan van het punt P op de witte cirkel dat op $t=0$ in $(1,0)$ is.

P neemt deel aan twee bewegingen:

- P draait eenparig om het middelpunt M van de rolcirkel,
- M maakt een eenparige cirkelbeweging.

Geef van beide bewegingen een pv en daarna ook van de baan van P . Teken de baan vervolgens in GeoGebra.



*** 4** We houden een punt P op de rand van een wiel in de gaten. De as van het wiel is op tijdstip t in het punt (t,t) . Hij beweegt dus over de lijn $x=y$.

P draait om de as van het wiel volgens
$$\begin{cases} x = \cos \pi t \\ y = \sin \pi t \end{cases}$$

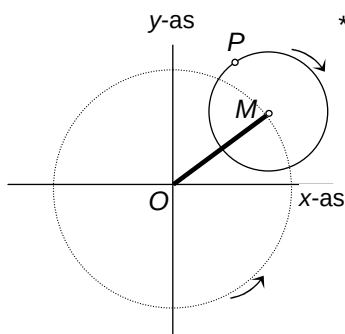
Hiernaast is het wiel getekend op de tijdstippen $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}$ en 4.

De tekening staat ook op het werkblad.

a. Teken op het werkblad de positie van P op elk van de hierboven genoemde tijdstippen (de positie van P op $t=\frac{1}{2}$ is al getekend).

b. Geef de bewegingsvergelijkingen van P .

c. Teken de baan op de GR of met GeoGebra.



* 5 Je geniet van de calypso, een kermisattractie. Je zit op plaats P op een draaiende schijf. Die schijf zit op haar beurt met het middelpunt M vast op een grotere rond-draaiende schijf.

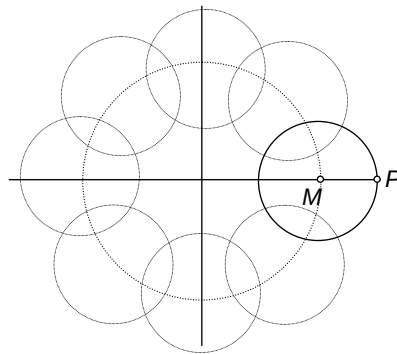
Hiernaast staat een bovenaanzicht. In een geschikt assenstelsel wordt de beweging van M gegeven door:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

en die van P ten opzichte van M :

$$\begin{cases} x = 2 \cos 2t \\ y = -\sin 2t \end{cases}$$

Hieronder zie je de situatie op tijdstip 0.

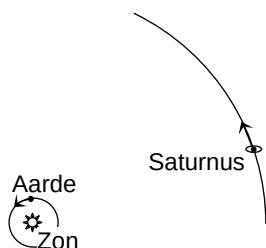


a. Teken op het werkblad de plaats van P op de tijdstippen $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, π , $1\frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{3}{4}\pi$. Voor het gemak zijn de kleine schijven al op deze tijdstippen getekend.

De resulterende beweging van P heeft parametervoorstelling:

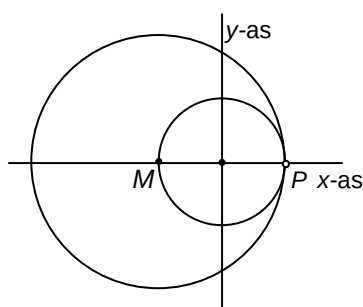
$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

b. Teken met GeoGebra de baan van P .



Saturnus door P.P.Rubens

De planeet Saturnus is genoemd naar een Romeinse god. Deze at zijn eigen zoon op.



- 6 In deze opgave gaan we er vanuit dat de planeten in één vlak in cirkelvormige banen om de Zon bewegen. We nemen als eenheid van afstand de AE (astronomische eenheid; dit is de gemiddelde afstand Aarde – Zon). Als bewegingsvergelijkingen van de Aarde om de Zon nemen we: $(x,y) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

a. Wat is dan de eenheid van tijd?

Saturnus beweegt ten opzichte van de Zon volgens:

$$(x,y) = (9,5 \cos \frac{2\pi}{29,5} t, 9,5 \sin \frac{2\pi}{29,5} t).$$

De waarden 9,5 en 29,5 zijn in één decimaal nauwkeurig.

b. Wat is volgens deze vergelijkingen de afstand van Saturnus tot de Zon? En wat is de omlooptijd van Saturnus om de Zon?

c. Teken met GeoGebra de relatieve beweging van Saturnus ten opzichte van de Aarde.

Welke bewegingsvergelijkingen heb je ingevoerd?

Vanuit de Aarde zie je Saturnus dus soms teruglopen, de zogenaamde **retrograde beweging**.

- ✂ d. Stel de relatieve bewegingsvergelijkingen van Jupiter ten opzichte van de Aarde op. De nodige gegevens vind je bijvoorbeeld op internet; rond die af op "mooie" getallen.

De limaçon anders

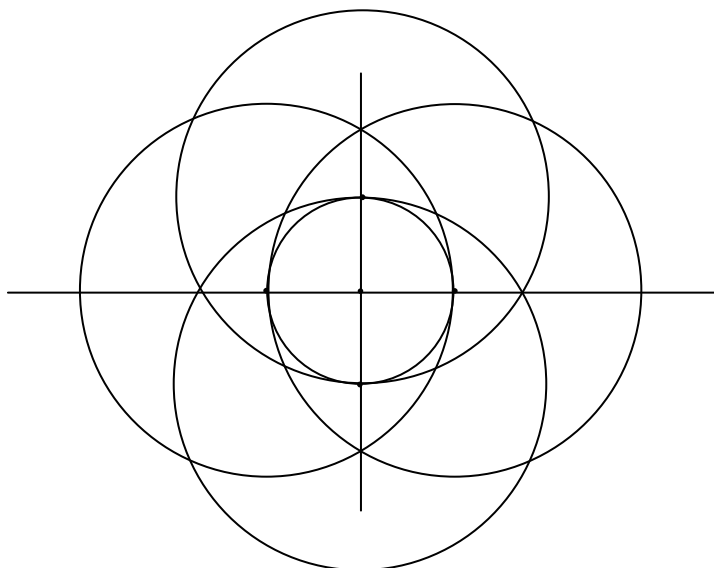
In paragraaf 2 hebben we de limaçon gemaakt door een cirkel om een vaste cirkel te laten rollen zó, dat de vaste cirkel op elk moment *uitwendig* aan de rolcirkel raakte. We laten nu een cirkel om een vaste cirkel rollen zó, dat de vaste cirkel op elk moment *inwendig* aan de rolcirkel raakt. De rolcirkel heeft straal 2 en de vaste cirkel heeft straal 1. We houden een punt P op de rolcirkel in de gaten. We kiezen een assenstelsel zó, dat het contactpunt van de cirkels de standaardcirkelbeweging $(\cos t, \sin t)$ maakt, met t in seconden. We nemen aan dat P op $t=0$ in $(1,0)$ is. Het middelpunt van de grote cirkel noemen we M .

In de animatie `limaçon_alt.ggb` kun je de baan van P zien. Ook wel aardig om te zien is het filmpje op YouTube <http://www.youtube.com/watch?v=7hJoxktpCY>.

De baan lijkt wel de limaçon. Dat dat inderdaad de limaçon is zullen we in de volgende opgaven zien.

-
- * **7 a.** Leg uit dat M over de kleine cirkel beweegt.

Op het werkblad staat het plaatje hieronder.



Daarin is de grote cirkel op de tijdstippen $t=0, \frac{1}{2}\pi, \pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ getekend.

b. Teken de posities van P op de tijdstippen $t=\frac{1}{2}\pi, \pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$.

c. Je kunt in dezelfde figuur ook de posities van P op de tijdstippen $t=2\pi, 2\frac{1}{2}\pi, 3\pi$ en $3\frac{1}{2}\pi$ tekenen. Doe dat.

d. Schets de baan van P .

e. De hoeksnelheid waarmee P over de grote cirkel beweegt is $\frac{1}{2}$ rad/s. Waarom?

- 8** P neemt deel aan twee bewegingen:

- P beweegt over de cirkel met middelpunt M ,
- M beweegt over de eenheidscirkel.

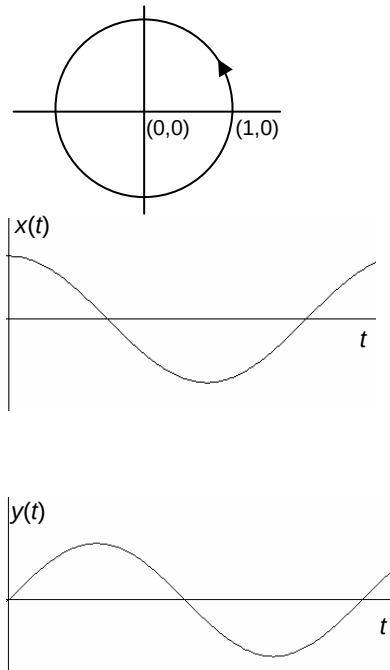
a. Geef van deze beide bewegingen een pv. Geef ook een pv van de baan van P .

b. Vergelijk de pv van P in deze opgave met de pv van de limaçon uit opgave 3.

Wat is het verschil?

De kromme en die van opgave 3 zijn dus precies hetzelfde. We hebben de limaçon nu op twee manieren gemaakt.

5 Onderzoek aan Lissajousfiguren



In paragraaf 1 hebben we de beweging van een biljartbal bekeken. De beweging naar links gaat abrupt over in een beweging naar rechts (als de bal op een band stuit) en de beweging naar beneden gaat abrupt over in een beweging naar boven. De grafieken van x en y als functie van t hebben spitse punten.

In deze paragraaf laten we die overgangen soepeler verlopen.

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ is de standaardcirkelbeweging; de baan

is de eenheidscirkel (straal 1 en middelpunt $(0,0)$).

Als t loopt van bijvoorbeeld 0 tot 2π , wordt de hele cirkel één keer doorlopen, tegen de klok in.

De beweging naar links gaat nu harmonisch (geleidelijk) over in een beweging naar rechts en de beweging naar beneden gaat harmonisch over in een beweging naar boven. De grafieken van x en y als functie van t verlopen glad.

- 1 a.** Wat is de groeisnelheid van x als de beweging overgaat van naar-links naar naar-rechts (of omgekeerd). En wat is de groeisnelheid van y als de beweging overgaat van naar-beneden naar naar-boven?
- b.** De eenheidscirkel kun je ook met andere snelheden doorlopen. Hoe kun je daarvoor de bewegingsvergelijkingen aanpassen?
- c.** Hoe moet je de bewegingsvergelijkingen veranderen om de cirkel met straal 3 en middelpunt $(0,0)$ als baan te krijgen?
- d.** Hoe moet je de bewegingsvergelijkingen veranderen om de cirkel met straal 1 en middelpunt $(-3,2)$ te krijgen?

Als we de bewegingsvergelijkingen van de standaardcirkelbeweging enigszins wijzigen, kunnen er fraaie figuren ontstaan. Met GeoGebra gaan we onderzoeken hoe de figuren samenhangen met wijzigingen van de bewegingsvergelijkingen.

Er is een apart papier met de uitleg van GeoGebra die voor de onderzoeksopdrachten nodig is.

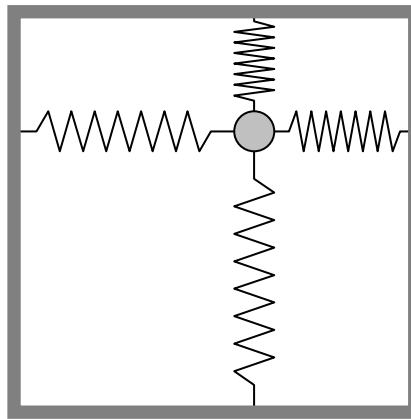
Lissajousfiguren

Een Lissajous-figuur ontstaat als een punt tegelijk deelneemt aan twee onderling loodrechte harmonische trillingen. Dat wil zeggen dat het de volgende bewegingsvergelijkingen heeft:
$$\begin{cases} x = a \cos(pt + \varphi) \\ y = b \sin(qt) \end{cases}$$



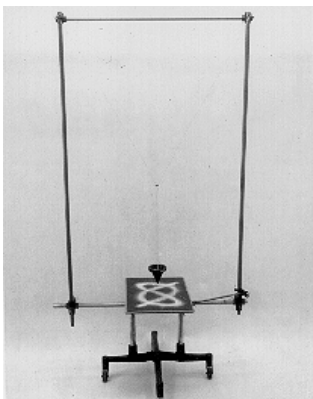
Jules Antoine Lissajous
(1822-1880)

De figuren zijn genoemd naar [J. A. Lissajous](#) (1822-1880). Hij verkreeg zijn figuren door licht achtereenvolgens te laten reflecteren op twee spiegels die bevestigd waren aan twee [stemvorken](#) die haaks op elkaar stonden.



Zie: <http://users.skynet.be/WisFysHForiers/linkpaginas/mecanica.htm>

link 10, 106, 153, 154



Hang aan een stellage een puntzakje zout met onderin een gaatje. Het zakje slingert van links naar rechts en tegelijkertijd slingert het (in een ander tempo) van voor naar achter. Het spoor van zout dat je dan krijgt is een Lissajousfiguur.

2 We onderzoeken de kromme met bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = a \cos(pt + \varphi) \\ y = b \sin(qt) \end{cases}$$

a. Wat moet je voor a , b , p , q en φ kiezen om de standaardcirkelbeweging te krijgen?

b. Kies $a=b=1$, $p=q=1$ en $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Teken de baan in GeoGebra. Kun je verklaren dat je deze baan krijgt?

c. Kies $a=b=1$, $p=q=1$ en $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$. Teken de baan in GeoGebra. Kun je verklaren dat je deze baan krijgt?

d. Kies $a=b=1$, $p=q=1$ en $\varphi=\pi$. Teken de baan in GeoGebra. Kun je verklaren dat je deze baan krijgt?

Wat is het verschil met de beweging $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$?

Opmerking

In $\begin{cases} x = a \cos(pt + \varphi) \\ y = b \sin(qt) \end{cases}$ is t de parameter.

De vergelijkingen geven x en y als functie van de "tijd" t . Daarbij laten we t een zeker interval (domein) doorlopen. a , b , p , q en φ zijn ook parameters. Die kunnen we ook (onafhankelijk van elkaar) variëren. De parameter t is van een andere orde dan de parameters a , b , p , q en φ . Bij elke keuze van a , b , p , q en φ hebben we een paar bewegingsvergelijkingen; daarin laten we vervolgens t door een domein lopen.

Het woord 'parameter' is afkomstig uit het Latijn/Grieks: 'para' - ('naast, ondersteunend') en 'metron' ('maat'). Je zou het woord het best kunnen vertalen met "hulpmaat". Het woord behoort uitgesproken te worden met de klemtoon op de tweede lettergreep.

GeoGebra biedt de mogelijkheid een parameter in te voeren en die met behulp van een schuifknop te variëren: de kromme varieert mee!

Er zijn negen onderzoeksopdrachten.

De opdrachten omschrijven het onderwerp, niet de uitvoering van de opdracht. Die krijg je apart van de docent.

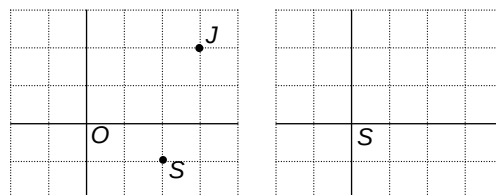
Nabeschuwing

Als je een paar bewegingsvergelijkingen hebt, kun je met een programma als GeoGebra snel de baan tekenen. Dat kan fraaie en verrassende figuren opleveren. Omgekeerd kun je ook bij een kromme bewegingsvergelijkingen zoeken. Soms lukt dat, maar meestal is dat een moeilijk probleem. Als je eenmaal een paar bewegingsvergelijkingen hebt, kun je de snelheid waarmee de kromme doorlopen wordt wijzigen, door de tijd sneller of langzamer te laten lopen (vervang t voor $2t$ of door $\frac{1}{2}t$). Maar het is ook mogelijk om dezelfde baan te krijgen met heel andere bewegingsvergelijkingen.

6 Samenvatting

- Gegeven zijn twee bewegende punten S en U . Op tijdstip t is S in S_t en U in U_t . Ten opzichte van S is de relatieve plaatsvector $\vec{r}_t$ van U op tijdstip t : $\vec{r}_t = \vec{u}_t - \vec{s}_t$.

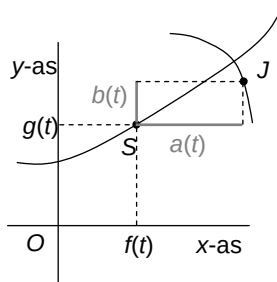
In het linker plaatje hieronder zie je de posities van S en J ten opzichte van O op zeker moment. Teken in het rechter plaatje de relatieve positie van J ten opzichte van S .



- Een punt S beweegt ten opzichte van de oorsprong volgens $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$.

Hierin is t de parameter.

Als je de functies f en g kent, ken je de baan van S .

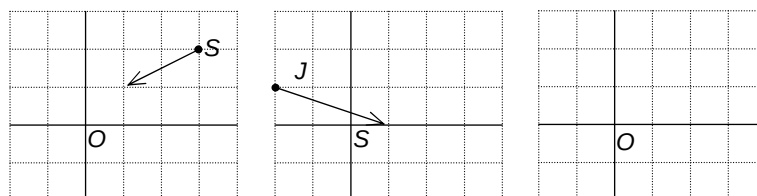


Als bovendien een punt J beweegt ten opzichte van het punt S volgens: $\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}$,

dan beweegt J ten opzichte van de oorsprong volgens $\begin{cases} x = f(t) + a(t) \\ y = g(t) + b(t) \end{cases}$.

- De snelheidsvector waarmee J op een bepaald moment ten opzichte van O beweegt, vind je door de snelheidsvectoren op te tellen, waarmee op dat moment S ten opzichte van O en J ten opzichte van S bewegen.

In de twee linker plaatjes hieronder zie je de posities van S ten opzichte van O en J ten opzichte van S op een zeker moment. Ook zie je de snelheidsvectoren waarmee dan S ten opzichte van O en J ten opzichte van S bewegen.



Teken in het rechter plaatje de positie van J ten opzichte van O en de snelheidsvector waarmee J ten opzichte van O beweegt.

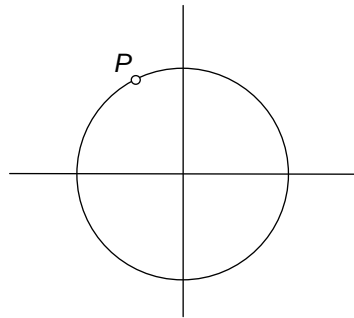
• **Voorbeeld**

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases}$$

Wat is de snelheidsvector op een willekeurig tijdstip?

• **Voorbeeld**

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \text{ is een pv van de standaardcirkelbeweging.}$$



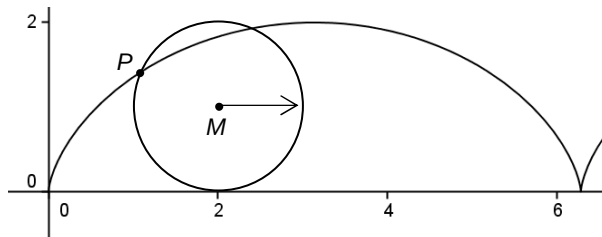
Teken de snelheidsvector van P .

• **Voorbeeld**

Een **cycloïde** is de baan van een punt op de omtrek van een rolcirkel met straal 1, die zonder slippen over een vlakke weg rolt.

Op elk moment is de horizontale weg die middelpunt M heeft afgelegd gelijk aan de booglengte die het punt P over de cirkel heeft afgelegd.

P neemt gelijktijdig deel aan twee bewegingen.



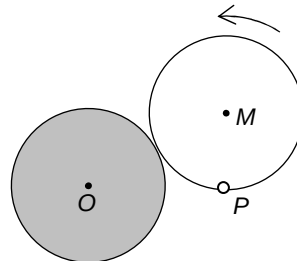
Veronderstel dat M met snelheid 1 beweegt.

Teken de snelheidsvector van P in bovenstaande situatie

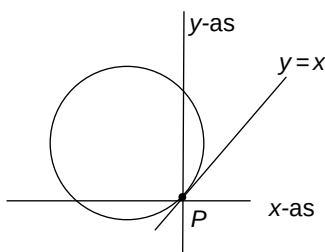
• **Voorbeeld**

Een **limaçon** is de baan van een punt op de omtrek van een rolcirkel, die zonder slippen om een even grote cirkel rolt.

P neemt gelijktijdig deel aan twee bewegingen:
 P beweegt gelijkmatig in π seconden om M , en is op $t=0$ in het meest linkse punt van de witte cirkel.
 M beweegt in 2π seconden gelijkmatig in een cirkel om O .
 Zeg dat de straal van de cirkels 1 is.



Teken de snelheidsvector van P in bovenstaande situatie.

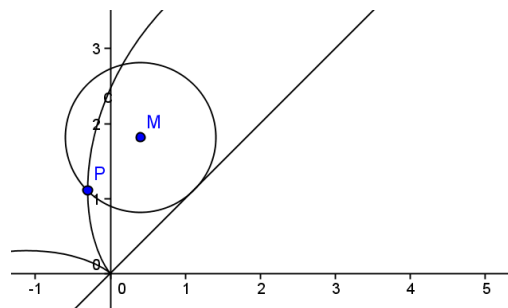


• Voorbeeld

We laten een wiel met straal 1 zonder slippen, over de lijn $y=x$ rollen. Het middelpunt M van het wiel beweegt eenparig met snelheid 1 eenheid per seconde. We letten op een punt P op de omtrek dat op een bepaald moment in O is.

Wat zijn dan de coördinaten van M ?

Hieronder is de situatie $\frac{1}{2}\pi$ seconden later getekend.



Teken de snelheidsvector waarmee P dan beweegt. Licht je antwoord toe.

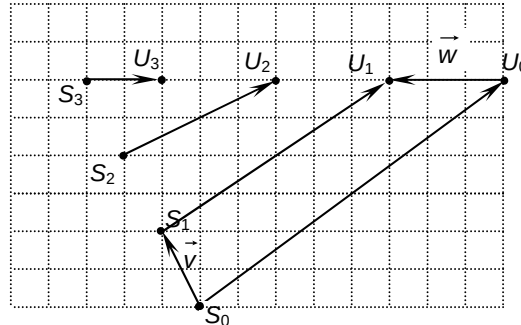
- Een vergelijking van een baan kun je (soms) vinden door de parameter te elimineren.

Stel een vergelijking op van $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^4 \end{cases}$.

7 Antwoorden

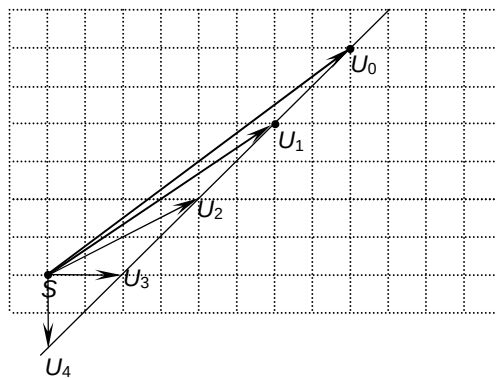
Paragraaf 1 Beweging relatief bekeken

1 a.



b. De vectoren $\overrightarrow{S_0U_0}$ en $\overrightarrow{S_1U_1}$ in het eerste plaatje zijn hetzelfde als de vectoren $\overrightarrow{SU_0}$ en $\overrightarrow{SU_1}$ in het tweede plaatje.

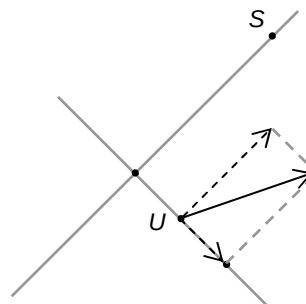
c.



d. $\vec{r}_t = \vec{u}_t - \vec{s}_t$. Er geldt: $\vec{s}_t = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{v}$ en $\vec{u}_t = \vec{u}_0 + t \cdot \vec{w}$. Invullen geeft: $\vec{r}_t = \vec{u}_0 - \vec{s}_0 + t \cdot (\vec{w} - \vec{v})$ en dit is een pv van een rechte lijn met richtingsvector $\vec{w} - \vec{v}$.

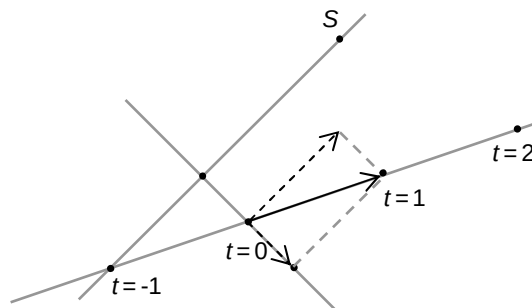
e. Ze zijn tegengesteld.

2 a.



b. $2\sqrt{5}$ knopen

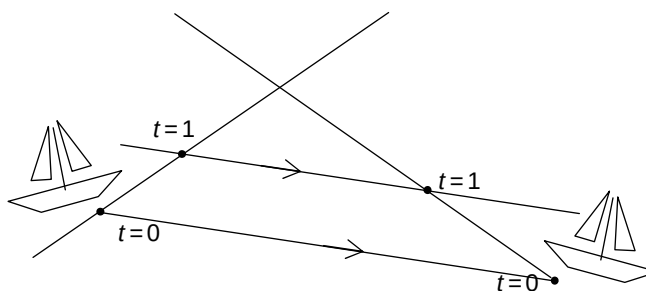
c.



d. $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$ en $2\sqrt{10}$

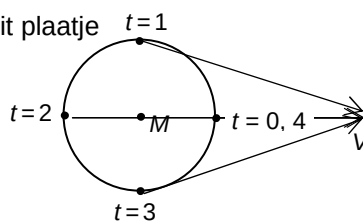
e. Op $t=1$, want de afstandsfunctie is symmetrisch (eenparige beweging) en op $t=0$ is de afstand hetzelfde als op $t=2$.

3 a. (De lijnen met pijl zijn evenwijdig.)

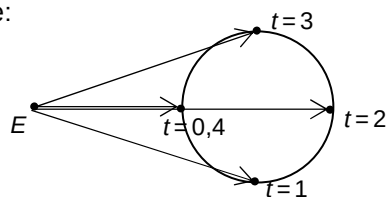


b. Het komt recht op hem af.

4 a. Uit dit plaatje

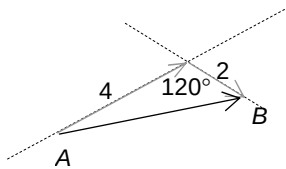
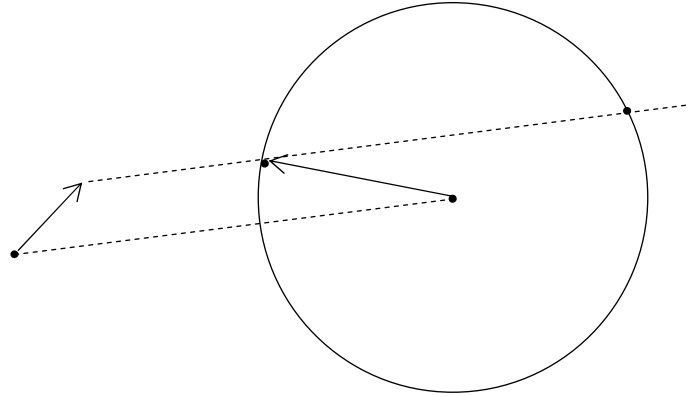


volgt dit plaatje:

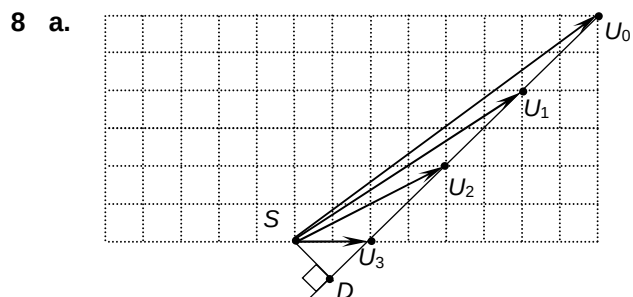


b. Een cirkel met dezelfde straal.

- 5 Toelichting. De stippellijnen zijn evenwijdig. De straal van de cirkel is 2 keer de lengte van de gegeven vector. Merk op dat maar één van de twee snijpunten van de cirkel en de stippelijns in aanmerking komt.



- 6 $AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 28$
De snelheid is de lengte van AB . Die is $2\sqrt{7}$.
- 7 De relatieve snelheid waarmee indiaan 1 indiaan 2 achtervolgt is 10 m/s. De achtervolging duurt dus 12 seconden. De afgelegde afstand is 120 meter.



Dat punt is D in de tekening.

b. $\vec{s}_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}$ en $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} 8-3t \\ 6 \end{pmatrix}$, dus $k: (x,y) = (8-2t, 6-2t)$.

c. Dan moet $(8-2t, 6-2t)$ zo dicht mogelijk bij $O(0,0)$ liggen, dus $(8-2t)^2 + (6-2t)^2 = 8t^2 - 56t + 100 = 8(t-3\frac{1}{2})^2 + 2$ moet minimaal zijn, dat is als $t = 3\frac{1}{2}$.

Of: lijn OD moet loodrecht op k staan, dus het inproduct

van $\begin{pmatrix} 8-2t \\ 6-2t \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ moet 0 zijn $\Leftrightarrow$

$-2(8-2t) - 2(6-2t) = 0 \Leftrightarrow t = 3\frac{1}{2}$.

- 9 a. S bevindt zich op tijdstip t in $(0, -4t+6)$ en U in $(2t+2, 0)$.

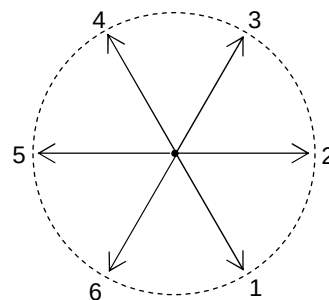
De afstand is dan $\sqrt{(2t+2)^2 + (-4t+6)^2} = \sqrt{20t^2 - 40t + 40}$

- b. $20t^2 - 40t + 40 = 20(t-1)^2 + 20$ en dit is minimaal als $t=1$.

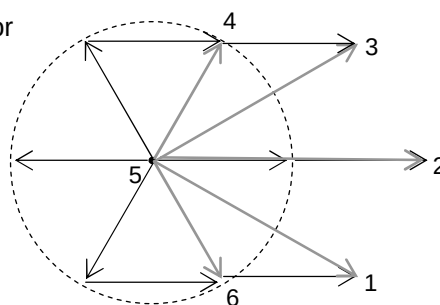
- c. Dan $1 \cdot (2t+2) + 2 \cdot (4t-6) = 0 \Leftrightarrow 10t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Paragraaf 2 Samengestelde bewegingen

- 1 a. De eindpunten van de snelheidsvectoren liggen op een cirkel.



- b. 5 is de nulvector

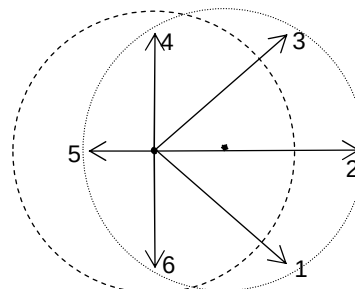


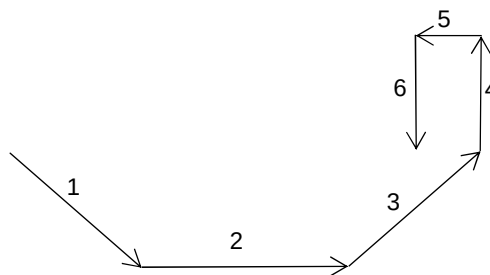
- c. Maximaal 1 m/s, minimaal 0 m/s

- d.



- e.





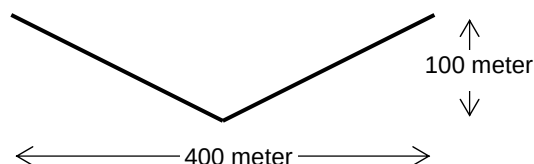
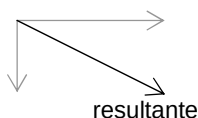
f. Ja, tijdens de 5de seconde, zie hierboven.

2 a. Ja, ja

b. Richting $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als je de positieve x-as in westelijke en de positieve y-as in noordelijke richting kiest. De snelheid is $\sqrt{5}$ m/s.

c. 100 sec

d.



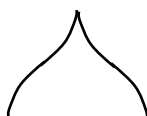
Ja, de duur van de heen- en terugreis is gelijk.

e. Ja, als de zwemmer midden op de rivier is, heeft hij 100 meter in westelijke richting afgelegd en het takje ook. Op de terugweg komen ze elkaar ook weer tegen.

3 a. Nee, nee

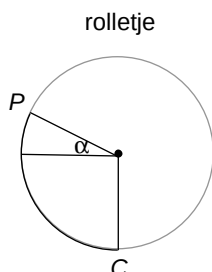
b. 100 sec

c.



Ja, de duur van de heen- en terugreis is gelijk.

d. Nee, op de heenweg heeft de kaaiman een 'voorsprong' op de zwemmer als die op het midden van de rivier komt. Op de terugweg is die voorsprong nog groter.



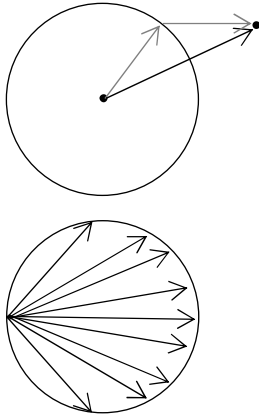
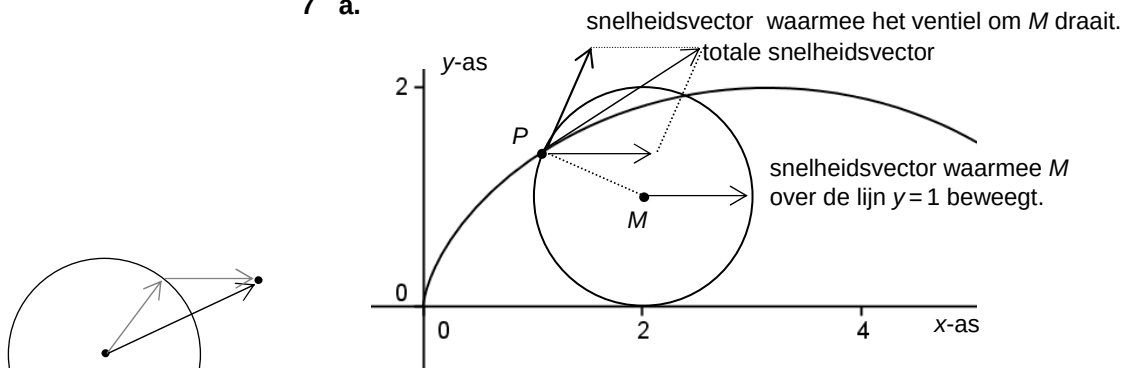
4 a. Nee

b. Dan komt de voorvork tussen het lampje en de lens.

5 Zie plaatje, boog $PC = 2$, dus $\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot 360 - 90 \approx 24,59...^\circ$
 $\sin 24,59...^\circ \approx 0,4161...$, dus de hoogte van P is: 1,42

- 6 a. De omtrek van het wiel, dus 2π
 b. Het wiel slipt niet.
 c. $t = \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$
 d. $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 e. Zie de GeoGebra applet
 f. In de hoogste punten 2 m/s, in de laagste 0 m/s, in de punten op hoogte 1: $\sqrt{2}$ m/s.

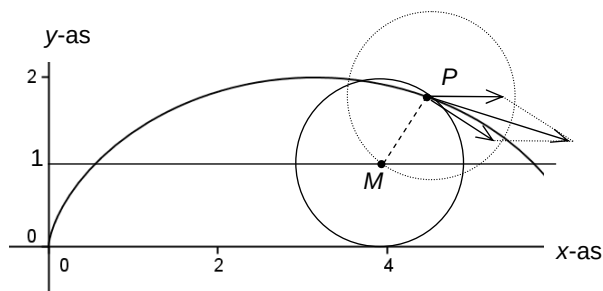
7 a.



b. Elke vector vanuit O met lengte 1 m/s kan optreden als snelheidsvector ten gevolge van rotatie. Bij deze vectoren moet de vector die in de positieve x -richting wijst met lengte 1 m/s opgeteld worden. Je krijgt dus alle mogelijke vectoren met beginpunt O en eindpunt op de cirkel die je krijgt door de eenheidscirkel 1 naar rechts te schuiven; dus de eindpunten liggen op de cirkel met straal 1 en middelpunt $(1,0)$.

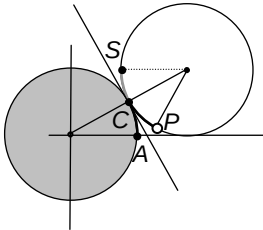
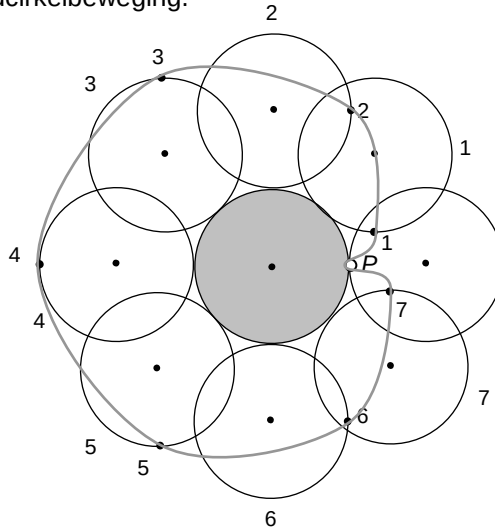
c. Net voordat P op de grond komt, is de snelheidsvector bijna verticaal naar beneden gericht, net daarna bijna verticaal naar boven gericht.

d. Teken een cirkel met straal 1 en middelpunt P . Eén van de snijpunten met de lijn $y=1$ is het middelpunt van de rolcirkel M .

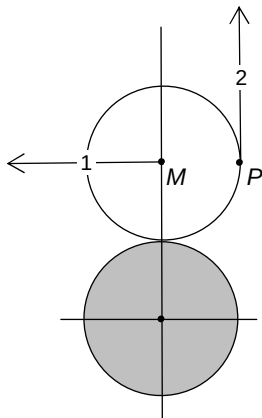
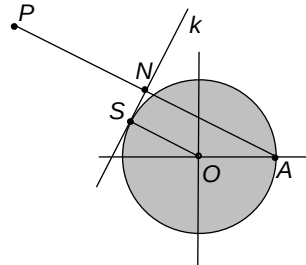


Teken een raakvector aan de rolcirkel in P en een horizontale vector met dezelfde lengte. De som van die vectoren is raakvector in P aan de cycloïde.

- 8 a. M gaat in dezelfde tijd rond, dus twee keer zo snel (omdat de straal van de cirkel twee keer zo groot is) als de standaardcirkelbeweging.
b,c.



- 9 a. Zie plaatje. A is het punt $(1,0)$. Op het tijdstip van tekening is C het contactpunt. S is het meest linkse punt op de witte cirkel. P heeft de weg van S naar P afgelegd. Boog $SC =$ boog CA (symmetrie tov C) en boog $CP =$ boog CA , (bewegen zonder slippen), dus P heeft 2 keer boog CA afgelegd.
b. Uit a volgt dat A en P elkaars spiegelbeeld in de raaklijn in C aan de cirkel zijn (zelfde plaatje als in a).
c.

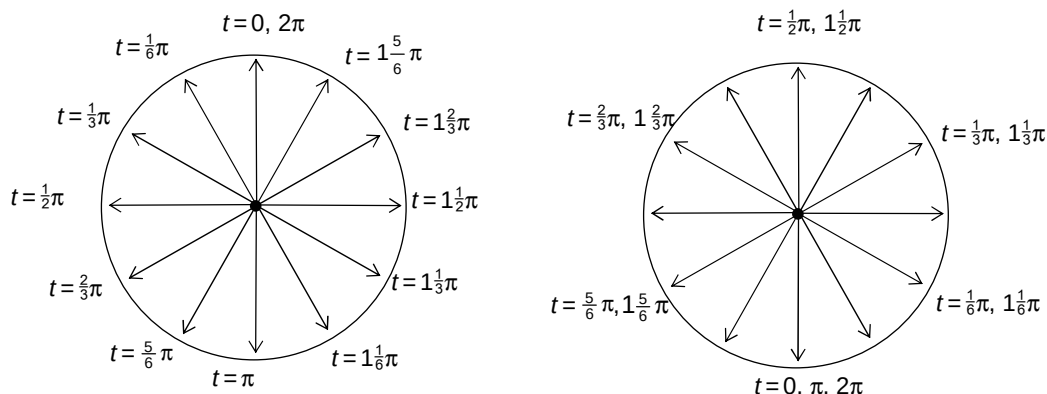


- 10 a. P ligt op de rolcirkel, die in tegenwijzerrichting om O draait, de snelheidsvector die hier bij hoort is op $t=0$ in de richting van de positieve y -as gericht met grootte 2 cm/s (want M draait over een cirkel met straal 2 cm.)
 P draait in tegenwijzerrichting om het middelpunt van de rolcirkel, de snelheidsvector die hier bij hoort is in de richting van de negatieve y -as met grootte 2 cm/s (want P draait 2 keer zo snel om M als de standaard cirkelbeweging)
De som van deze vectoren is de nulvector.
b. P ligt op de rolcirkel, die in tegenwijzerrichting om O draait: dit geeft vector 1

P draait in tegenwijzerrichting om het middelpunt van de rolcirkel: dit geeft vector 2.

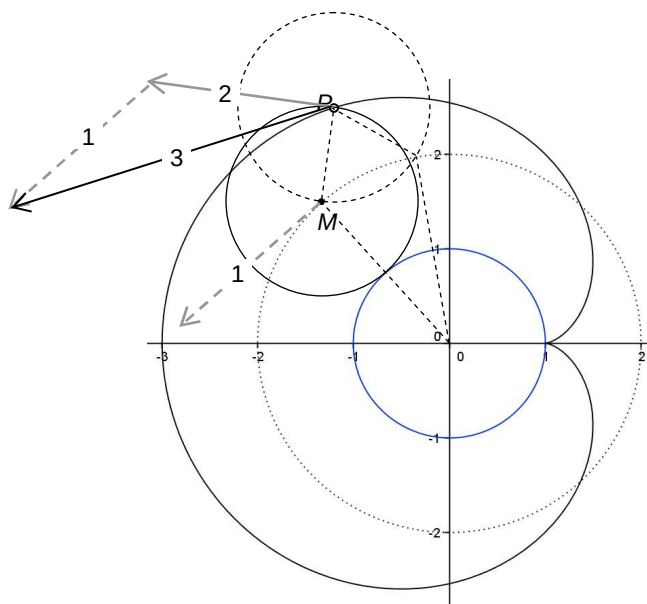
De som van deze vectoren (die even lang zijn) maakt een hoek van 45° met de y -as.

c.



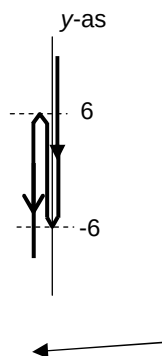
d. De twee plaatjes combinerend zie je dat de som van de vectoren op $t = \frac{2}{3}\pi$ en $1\frac{1}{3}\pi$ horizontaal is.

- 11** Teken de cirkel met straal 1 en middelpunt P . Eén van de snijpunten met de cirkel met middelpunt O en straal 2 is het middelpunt M van de rolcirkel. 1 is de snelheidsvector waarmee M beweegt en 2 de snelheidsvector waarmee P om M beweegt. De som van deze twee is de snelheidsvector van P (3).



Paragraaf 3 Beweging in formule

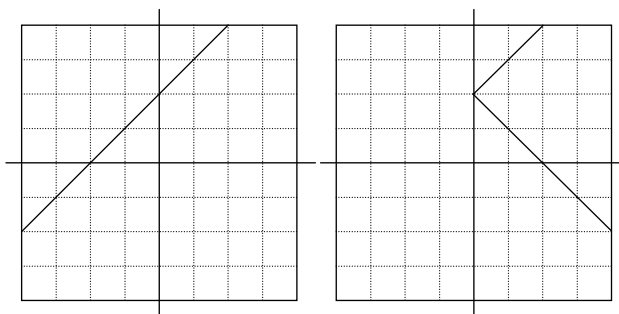
- 1 a. 7, 0, 7, 15 en -6, 0, 6
 c. $8t^2 - t^4 = 12 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 12 = 0$ en $t^2 = a \Leftrightarrow t^2 = 6$ of $t^2 = 2$, dus $t = \sqrt{6}, -\sqrt{6}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ en de snijpunten zijn: $(12, -9\sqrt{6}), (12, 9\sqrt{6}), (12, 3\sqrt{2})$ en $(12, -3\sqrt{2})$
 d. $8t^2 - t^4 = -9 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 9 = 0$ en $t^2 = a \Leftrightarrow t = 3$ of $t = -3$ en de snijpunten zijn: $(-9, -54)$ en $(-9, 54)$.
 e. Ja, want $8t^2 - t^4$ heeft een absoluut maximum voor $t = 2$ en $t = -2$ gelijk aan 16.



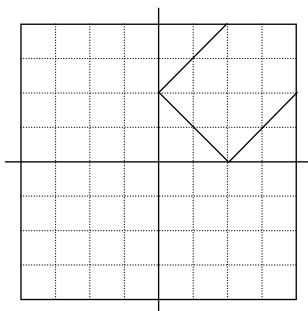
- f. Zie hiernaast.
 g. $-3t^3 + 9t$ wordt zo groot als je maar wilt als t kleiner wordt en zo negatief als je maar wil als t groter wordt.
 h. Zoals hiernaast: de x -coördinaat gaat harder naar $-\infty$ dan dat de y -coördinaat naar $-\infty$ gaat.
 i. Voor de x -coördinaat geldt dat omdat er alleen even machten van t in de formule voorkomen en voor de y -coördinaat omdat er alleen oneven machten van t in de formule voorkomen.
 j. De baan is symmetrisch in de x -as, want als (x, y) op de baan ligt, dan ligt ook $(x, -y)$ op de baan.

- 2 a. x -as
 b. Zie links

- 3 a,b.

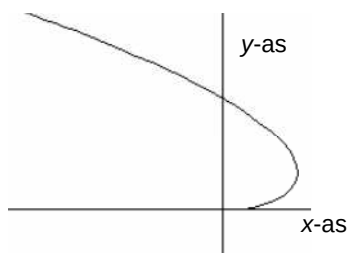


- c.



- d. $\sqrt{2}$ m/s

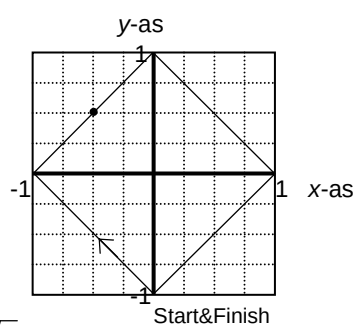
4 a.



b. $x=0 \Leftrightarrow t^3-3t=0 \Leftrightarrow t(t^2-3)=0 \Leftrightarrow t=0, \sqrt{3} \text{ of } -\sqrt{3}$.
 $t=\sqrt{3}$ geeft het gevraagde punt: $(0,3)$.

c. Voor $t=\sqrt{2}$ krijg je: $(-\sqrt{2}, 2)$ en voor $t=-\sqrt{2}$ krijg je: $(\sqrt{2}, 2)$.

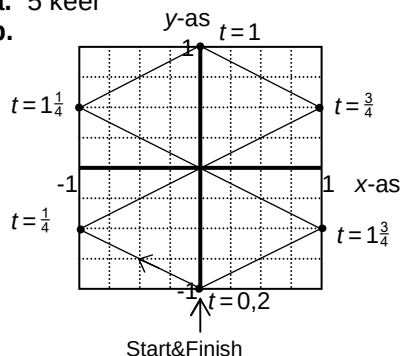
5 a,b.



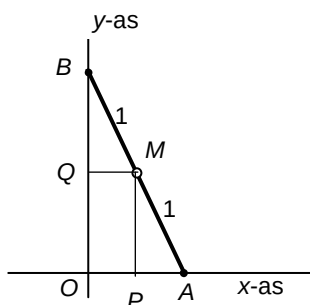
c. $2\sqrt{2}$

6 a. 5 keer

b.



c. $2\sqrt{5}$



7 P en Q zijn de projecties van M op de coördinaat-assen.

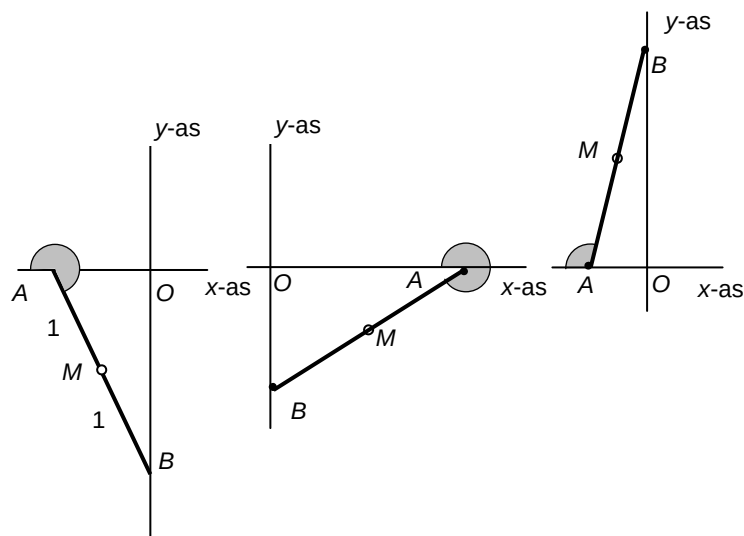
a. $MP = \sin t$, kijk in driehoek MAP.

$QM = \cos t$, kijk in driehoek MBQ, dus $M(\cos t, \sin t)$.

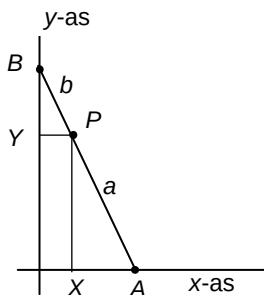
b. Een (deel van een) cirkel. (Standaard cirkelbeweging)

c. Stelling van Thales

d. Zie plaatje op de volgende bladzijde.



- 8 a.** 1 cm/s
b. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$
c. $x^2 + y^2 = 1$
- 9 a.** eenheidscirkel, (0,1), 1, wijzerrichting
b. eenheidscirkel, (0,-1), 1, wijzerrichting
c. eenheidscirkel, (-1,0), 1, tegenwijzerrichting
d. lijnstuk van (1,1) naar (-1,-1) en terug, snelheid $\sqrt{2} \sin t$
e. cirkel met straal 2 en middelpunt O, (0,2), 2, wijzerrichting
- 10 a.** Een cirkel met straal $\frac{1}{3}$ en middelpunt $(\frac{1}{3}, 0)$
b. $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{0} + \vec{a} + \vec{t})$, dus $Z = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos t, \frac{1}{3} \sin t)$
- 11 a.** Werk de haakjes weg in $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
b. $y = tx$
c. $x^2 - 2x + t^2 x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2 + t^2 x) = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 0$ of $x(1 + t^2) = 2 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \frac{2}{t^2 + 1}$.
 $y = tx = \frac{2t}{t^2 + 1}$.
d. De cirkel uit het vorige onderdeel moet 1 eenheid naar links geschoven worden, dus y blijft hetzelfde en
 $x = \frac{2}{t^2 + 1} - 1 = \frac{2}{t^2 + 1} - \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$.
e. Je krijgt het punt (-1,0) niet.



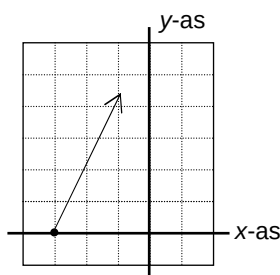
- 12 a.** X en Y zijn de projecties van P op de coördinaatassen, dan: $PX = a \sin t$ en $PY = b \cos t$.

Dus $P = (b \cos t, a \sin t)$.

b.

c. $\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$

- d.** De ladder heeft lengte 3 en $a = 1$ en $b = 2$



- 13 a.** Een halve lijn met beginpunt $(-3, 0)$ en richtingscoëfficiënt 2, zie plaatje.

- b.** $y = 2x + 6$ (en $y \geq 0$) of $y = 2x + 6$ (en $x \geq -3$).

- c.** Op $t = 0$ in $(-3, 0)$, op $t = 5$ en $t = -5$ in $(22, 50)$; de afstand tussen $(-3, 0)$ en $(22, 50)$ is: $25\sqrt{5}$. Dus er is $50\sqrt{5}$ afgelegd.

- 14 a.** $-3x + y = 1$, met $x < 0$

b.

- lijnstuk met grenspunten $(-2, 4)$ en $(2, -2)$.

vergelijking $3x + 2y = 2$ en $-2 \leq x \leq 2$

- De negatieve x -as en de positieve y -as, met $(0, 0)$.

$x = 0$ en $y \geq 0$ of $y = 0$ en $x \leq 0$

- vergelijking $y = x^2$, met $x > 0$; de halve standaardparabool

- vergelijking $x \cdot y = 1$, met $x > 0$; de tak van de standaardhyperbool met x en y positief

- vergelijking $y = -x^2 + 2$, met $x \geq 0$; het deel van een bergparabool met top $(0, 2)$, rechts van de x -as.

- vergelijking $x^2 + y^2 = 2$, met $x \geq 0$ en $y \geq 0$; het deel van de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal $\sqrt{2}$ dat in het eerste kwadrant ligt.

- 15 a.** $-1 \leq x \leq 1$ en $0 \leq y \leq 1$

- c.** $y = -x^2 + 1$

- d.** Ja, je krijgt: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

- e.** Het deel met $-1 \leq x \leq 1$, want x neemt alle waarden tussen -1 en 1 aan.

Paragraaf 4 Cycloïde en meer in formule

- 1 a.** $(3, -\sqrt{3})$, $(7, -\sqrt{3})$

- b.** Voor $0 \leq t \leq 2$: $(x, y) = (1\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t\sqrt{3})$ en

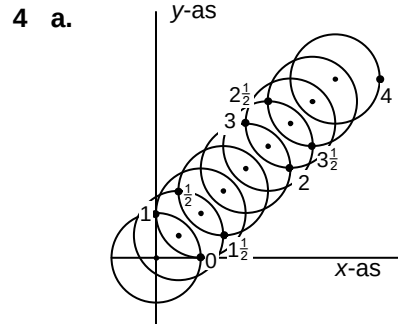
voor $2 \leq t \leq 4$: $(x, y) = (-1 + 2t, -\sqrt{3})$

- 2 a.** Zie opgave **9b** van paragraaf 3.

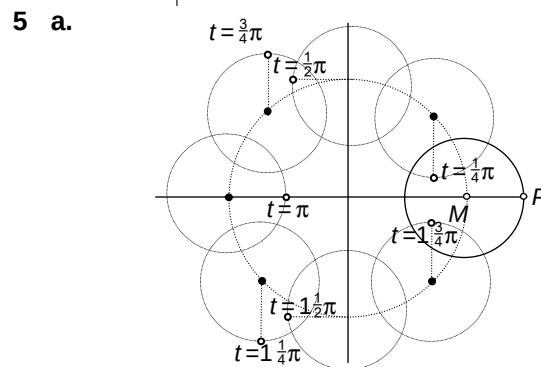
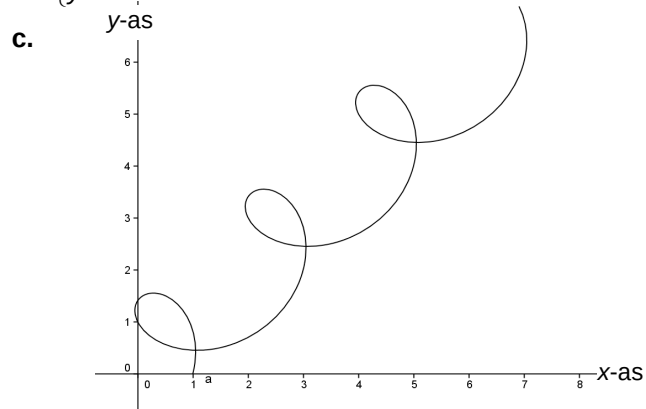
- b.** $(x, y) = (t, 1)$

c. $(x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

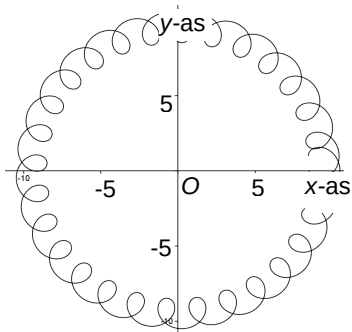
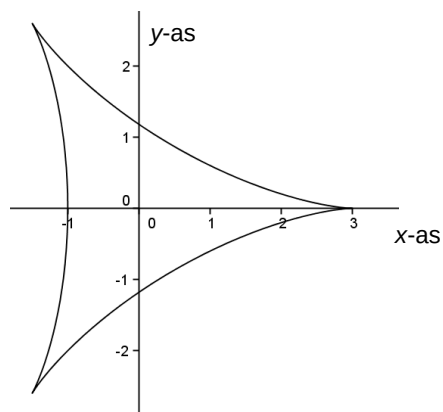
- 3 P draait om M volgens: $(x,y) = (-\cos 2t, -\sin 2t)$, M draait om O volgens $(x,y) = (2 \cos t, 2 \sin t)$.
Een pv van de limaçon is dus:
 $(x,y) = (-\cos 2t + 2 \cos t, -\sin 2t + 2 \sin t)$.



b.
$$\begin{cases} x = t + \cos \pi t \\ y = t + \sin \pi t \end{cases}$$

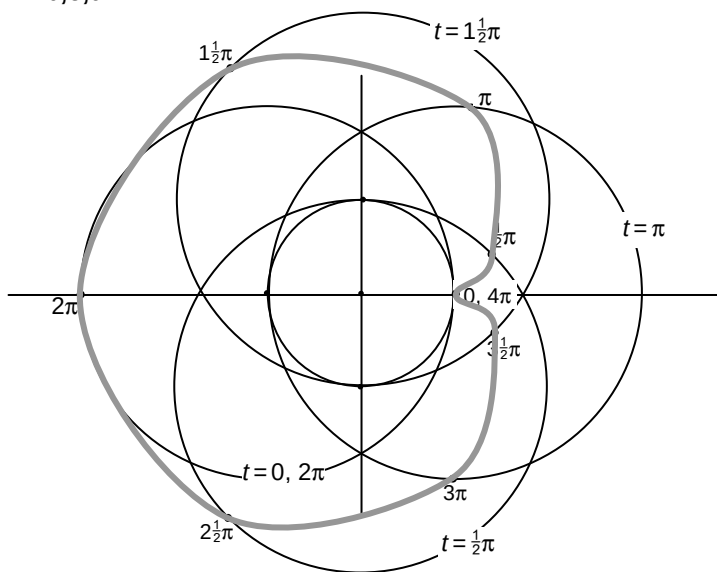
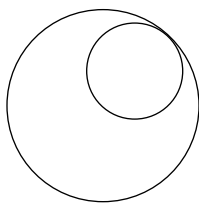


b.



- 6 a. jaar
b. 9,5 AE, 29,5 jaar
c. $(x,y) = (9,5 \cos \frac{2\pi}{29,5} t - \cos 2\pi t, 9,5 \sin \frac{2\pi}{29,5} t - \sin 2\pi t)$.
d. de afstand is 5,2 AE en de omlooptijd 11,9 jaar, dus:
 $(x,y) = (5,2 \cos \frac{2\pi}{11,9} t - \cos 2\pi t, 5,2 \sin \frac{2\pi}{11,9} t - \sin 2\pi t)$.

- 7 a. Omdat de grote en de kleine cirkel elkaar raken, liggen het raakpunt en de middelpunten van de cirkel op één lijn. Dus is het middelpunt van de grote cirkel de antipode van het raakpunt op de kleine cirkel.
b,c,d.



- e. In een bepaalde tijd wordt over de grote cirkel dezelfde afstand afgelegd als over de kleine. Dan is de hoeksnelheid half zo groot.

-
- 8 a.** P beweegt over de cirkel met middelpunt M volgens $(x,y) = (\cos \frac{1}{2}t, \sin \frac{1}{2}t)$
 M beweegt over de eenheidscirkel volgens $(x,y) = (-\cos t, -\sin t)$.
Dus P beweegt ten opzichte van O volgens:
 $(x,y) = (\cos \frac{1}{2}t - \cos t, \sin \frac{1}{2}t - \sin t)$
b. De beweging gaat half zo snel.

Paragraaf 5 Onderzoek aan Lissajousfiguren

- 1 a.** $0 ; 0$
b. $x = \cos pt, y = \sin pt$, met $p \neq 0$
c. $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$
d. $x = -3 + \cos t, y = 2 + \sin t$
- 2 a.** $a = b = 1, p = q = 1, \varphi = 0$
b. $x = \cos(t + \frac{1}{2}\pi), y = \sin t$
Omdat $\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = -\sin t$ is $y + x = 0$ en is de baan het lijnstuk met eindpunten $(1,-1)$ en $(-1,1)$.
c. $x = \cos(t - \frac{1}{2}\pi), y = \sin t$
Omdat $\cos(t - \frac{1}{2}\pi) = \sin t$ is $y = x$ en is de baan het lijnstuk met eindpunten $(1,1)$ en $(-1,-1)$
d. $x = \cos(t + \pi), y = \sin t$
Omdat $\cos(t + \pi) = -\cos t$ is de baan de eenheidscirkel met een ander startpunt, nl. $(-1,0)$ en omgekeerde looprichting.

Verder is dit een onderzoeksparagraaf; de docent verstrekt je de opdrachten.