6 Snelle vectoren

Dit is een onderdeel van
Meetkunde met coördinaten
ten behoeve van het nieuwe programma (2015) wiskunde B vwo.

⌘ Opgaven met dit merkteken kun je, zonder de opbouw aan te tasten, overslaan.

* Bij opgaven met dit merkteken hoort een werkblad.

Inhoudsopgave

Uitgave juni 2011

Colofon

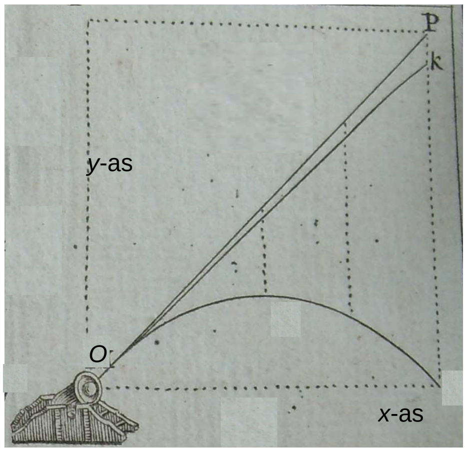
Auteurs Leon van den Broek, Dolf van den Hombergh,

Met medewerking van Theo van de Bogaart, Josephine Buskes, Gert Dankers,
Aad Goddijn, Dick Klingens

Illustraties

1 Beweging

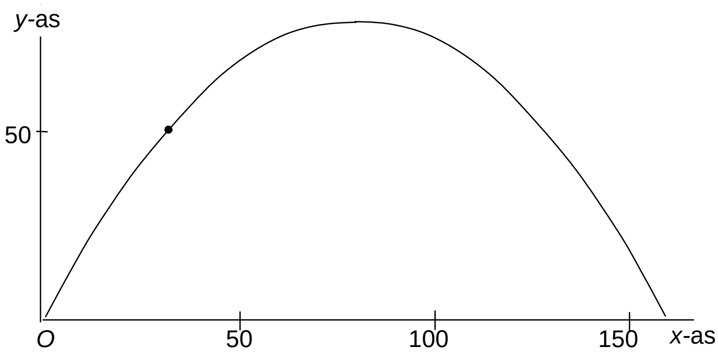
Snelheid



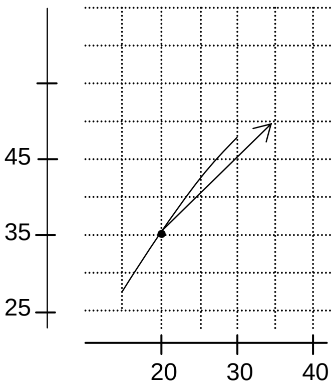
De baan van een kanonskogel, ligt vast op het moment dat die de loop verlaat. (We verwaarlozen de luchtwrijving en er staat geen wind.) Ook ligt de richting en de grootte van de snelheid op elk moment vast. Hoe je deze kunt berekenen is onderwerp van de volgende opgave.

* **1** Een kogel wordt afschoten. We brengen een assenstelsel aan: de *x*-as horizontaal en de *y*-as verticaal door het uiteinde van de loop. De snelheidsvector waarmee de kogel de loop verlaat is te ontbinden in zijn componenten langs de *x*- en *y*-as.

Neem aan dat de horizontale component grootte 20 m/s en de verticale component grootte 40 m/s heeft.
Na t seconden is de kogel in $(20t\,, 40t-5t^2)$; hierbij is de valversnelling afgerond op 10 m/s^2. Hieronder staat de baan.



a. Op welk moment komt de kogel op de grond?

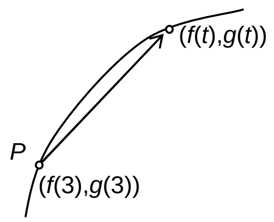


We gaan de snelheid van de kogel op tijdstip 1 bepalen.
Op tijdstip 1 is de pijl in (20,35) en op tijdstip 3 in (60,75)
De verplaatsing tussen deze tijdstippen is $\begin{pmatrix}40\\40\end{pmatrix}$ (in meters).

Dus $\frac{1}{3-1}\begin{pmatrix}40\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}$ (m/s) is de gemiddelde verplaatsing per seconde. Deze vector is hiernaast getekend.

b. Wat is de gemiddelde verplaatsing per seconde tussen de tijdstippen 1 en 2? En tussen 1 en 1,5? En tussen 1 en 1,01?
c. Teken de gemiddelde verplaatsingen per seconde uit vraag **b** op het werkblad, alle met beginpunt (20,35).

Deze verplaatsingen benaderen de snelheidvector op tijdstip 1.
d. Wat is, denk je, de snelheidsvector op tijdstip 1?
e. Bepaal op soortgelijke manier de snelheidvector op tijdstip 2. Teken die met beginpunt (40,60) op het werkblad.



Algemeen
Een punt P beschrijft een baan: $x = f(t)$, $y = g(t)$,
gevraagd de snelheidsvector op tijdstip 3 in ($f(3)$,$g(3)$).
De gemiddelde verplaatsing per seconde tussen 3 en t is

$$\frac{1}{t-3}\begin{pmatrix} f(t)-f(3) \\ g(t)-g(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f(t)-f(3)}{t-3} \\ \dfrac{g(t)-g(3)}{t-3} \end{pmatrix}.$$

Door t tot 3 te laten naderen, krijgen we de snelheidsvector op tijdstip 3. Dat is $\begin{pmatrix} f'(3) \\ g'(3) \end{pmatrix}$.

- $f'(3)$ is de horizontale component van de snelheidsvector.
- $g'(3)$ is de verticale component van de snelheidsvector.
- De snelheidsvector geeft de richting van de baan in P.

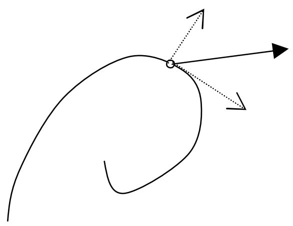
De lijn door P met richtingsvector $\begin{pmatrix} f'(3) \\ g'(3) \end{pmatrix}$ raakt de baan in P.

- De snelheid op tijdstip 3 is $\sqrt{f'(3)^2 + g'(3)^2}$; dat is de grootte van de snelheidsvector.

Een bewegend punt P bevindt zich op tijdstip t in ($f(t)$,$g(t)$).
De snelheidsvector van P op tijdstip t is: $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$.
De snelheid van P is dan: $\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$.
De lijn door P met de snelheidsvector als richtingsvector raakt in P aan de baan.

De “procedure” die hierboven gevolgd is om de snelheidsvector in een punt op een kromme te vinden is hetzelfde als de procedure om de helling van een gewone grafiek van een functie te vinden. Die procedure leverde bij een gewone grafiek de richtingscoëfficiënt van de raaklijn op. Bij een kromme levert zij een richtingsvector van de raaklijn op.

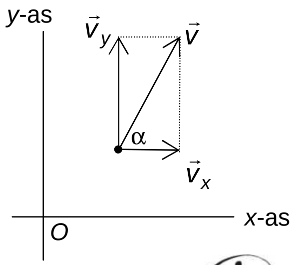
(Behalve als de snelheidsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ is; daaruit is de richting van de raaklijn niet direct te vinden.)



Het is fysisch duidelijk dat de snelheidsvector wijst in de richting van de baan: anders vliegt het punt uit de baan.
In het plaatje hiernaast wijst de snelheidsvector niet in de richting van de baan, maar heeft hij een component loodrecht op de baan. Die zou veroorzaken dat het punt niet zijn baan vervolgt.

* **2** We gaan verder met opgave 1
a. Bereken de snelheidsvector op tijdstip *t*.
b. Teken op het werkblad enkele snelheidsvectoren van het kogeltje; laat ze alle in *O* beginnen.

Als je alle snelheidsvectoren zou tekenen, met steeds hetzelfde beginpunt, zou een driehoek helemaal opgevuld worden.
c. Teken die driehoek.



3 Algemeen geeft een snelheidsvector $\vec{v}$ twee dingen aan:
- in welke richting de beweging plaatsvindt en
- hoe snel de beweging plaatsvindt.

$\vec{v}$ kun je in zijn componenten langs de coördinaatassen ontbinden: $\vec{v}_x$ en $\vec{v}_y$; zie de figuur hiernaast.

c. Ga na dat de volgende formules gelden.

$\vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{v}$

$|\vec{v}_x| = |\vec{v}|\cos\alpha$ en $|\vec{v}_y| = |\vec{v}|\sin\alpha$

$|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2 = |\vec{v}|^2$

(De verticale strepen | | geven de grootte van een vector aan, α is de hoek die de vector maakt met de positieve x-as.)

Opmerking
In de natuurkunde spreekt men van *snelheid* waar wij *snelheidsvector* gebruiken.
In het Engels is *velocity* de snelheidsvector en *speed* de *grootte* van de snelheidsvector.

4 Een punt P beweegt in een assenstelsel. P bevindt zich op tijdstip t in het punt $(x,y) = (1+3t^2, 2-4t^2)$.
We schrijven ook wel:

de bewegingsvergelijkingen van P zijn: $\begin{cases} x = 1+3t^2 \\ y = 2-4t^2 \end{cases}$.

a. Leg uit dat P over een halve lijn beweegt. Teken die halve lijn.

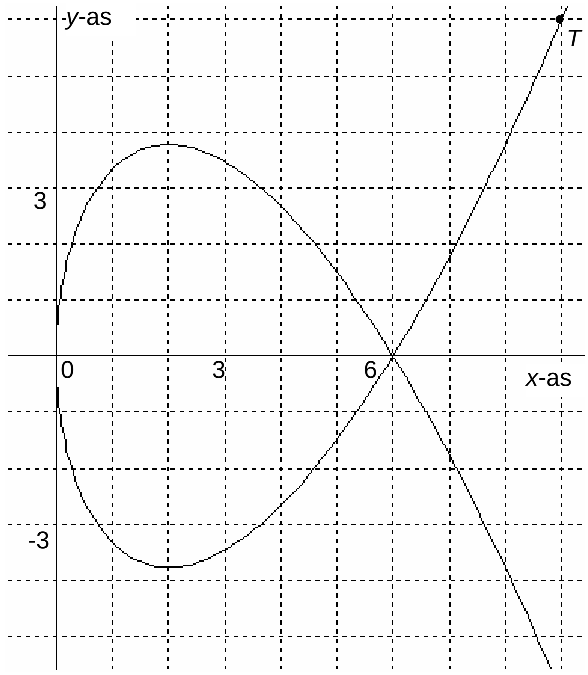
b. Beschrijf de halve lijn met een vergelijking en een ongelijkheid (zie hoofdstuk 5).

c. Bereken de snelheidsvector van P.
d. In welk punt heeft P snelheid 10?
e. Kun jij de bewegingsvergelijkingen van een punt geven dat op en neer over het lijnstuk AB beweegt, waarbij $A(-1,-1)$ en B $(1,1)$?

5 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn:
$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-4t \end{cases}$.
a. Teken de lijn waarover P beweegt.
b. Laat met een berekening zien dat de gemiddelde verplaatsing van P per seconde tussen de tijdstippen t_1 en t_2 niet van t_1 en t_2 afhangt.
c. Bereken de hoek die de snelheidsvector met de x-as maakt.

* **6** De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn:
$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{2}{3}t^3 - 4t \end{cases}$.
Op de volgende bladzijde staat de baan van P.

a. Geef op het werkblad aan in welke richting de baan wordt doorlopen.
b. Bereken de coördinaten van de snijpunten met de x- en y-as.
c. Bereken de snelheidsvector op tijdstip t.
d. In welke punten is de snelheidsvector horizontaal (evenwijdig met de x-as) en in welke punten verticaal? Schrijf je berekening op.
e. Wat is de snelheid op tijdstip t? (Hiermee wordt de grootte van de snelheidsvector bedoeld; dat is dus een getal, geen vector.)



Snelheid en raken

* **7** We gaan verder met opgave 6. Het punt (9,6) van de baan noemen we T.
a. Bereken de snelheidsvector in T.
Teken vervolgens de bijbehorende pijl vanuit T op het werkblad.
b. Bereken de hoek die de snelheidsvector maakt met de positieve x-richting in T.
c. Geef een vergelijking van de raaklijn in (9,6) aan de baan.
d. Bereken exact de tijdstippen bij de vier punten waarin de raaklijn een hoek van 45° met de x-as maakt.

Je kunt een gegeven baan met verschillende snelheden doorlopen. In de volgende opgave vergelijken we de snelheidsvectoren.

8 Bekijk de beweging: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}^{\,2} \\ y = \frac{2}{3}t - 4\sqrt[3]{t} \end{cases}$.
a. Laat langs algebraïsche weg zien dat de baan hetzelfde is als die van opgave 6.

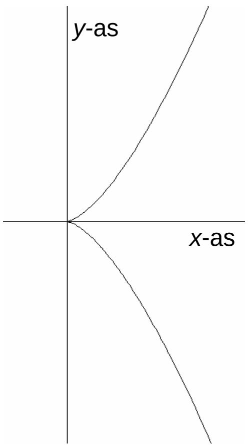
b. Bereken de snelheidsvector in $T(9,6)$. Ga na dat deze een veelvoud is van de snelheidsvector in (9,6) van opgave 7.

De grootte van de snelheidsvector in T is in opgave 7 anders dan in opgave 6. De richting van de snelheidsvectoren in T zijn in de opgaven hetzelfde. Dat spreekt eigenlijk vanzelf, beide wijzen in de richting van de baan.

Een deel van de kromme uit opgave 6 waarop T ligt is grafiek van een functie. Met een formule van de functie kun je ook een vergelijking van de raaklijn vinden. We gaan in opgave 9 na of je hetzelfde resultaat vindt.

* **9** Gegeven de functie f met $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$.

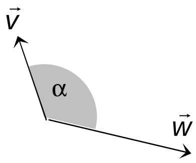
a. Laat langs algebraïsche weg zien dat de grafiek van f een deel van de baan van het bewegend punt P uit opgave 6 is.
Kleur op het werkblad het deel van de baan van P dat correspondeert met de grafiek van f.
b. Geef een vergelijking van de raaklijn in T aan de grafiek van f met behulp van f' .



10 Een punt A beweegt volgens: $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$.

Hiernaast staat de baan.
a. Bereken de snelheid van A op tijdstip t.
b. Waarom kun je de richting van de baan op $t = 0$ niet bepalen, met behulp van de snelheidsvector?

De baan bestaat uit twee 'takken'. Elk van de takken is grafiek van een functie.
c. Geef van beide functies een formule.
d. Wat is de richting van de baan in $O(0,0)$ aan de baan? Licht je antwoord toe.



Herhaling
Als α de hoek tussen twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ (beide niet $\overline{0}$) is, dan geldt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\alpha$.

$\vec{v} \cdot \vec{w}$ is het inproduct van $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

11 De baan in opgave 6 snijdt zichzelf in (6,0).
a. Bereken de exact de cosinus van de hoek waaronder dit gebeurt. (Dat is de hoek van de raaklijnen aan de twee stukken baan in (6,0).)

We rekken de baan in opgave 6 op in de x-richting met een positieve factor a.
b. Bereken exact voor welke a de baan zichzelf loodrecht snijdt.

2 Cirkelbewegingen

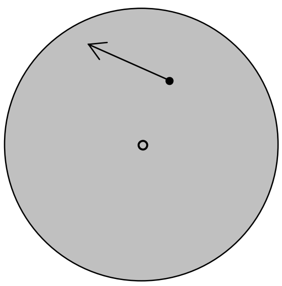
Eenparige cirkelbeweging

Een punt beweegt volgens de standaardcirkelbeweging:
$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.
Dat is de beweging over de eenheidscirkel in tegenwijzerrichting. We nemen de tijd in seconden en de afstanden in cm. De grootte van de snelheid is dan 1 cm/s.

In deze paragraaf variëren we op de standaardcirkelbeweging.

1 P beweegt volgens $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, met $R > 0$.

a. Beschrijf de beweging van P zoals hierboven voor de eenheidscirkel gedaan is.
Kun je de snelheid bepalen zonder te differentiëren? Licht je antwoord toe.
b. Bereken de snelheidsvector op tijdstip t.
c. Bereken de snelheid. Is je antwoord hetzelfde als in vraag **a**?
d. Gebruik het inproduct om te laten zien dat de snelheidsvector loodrecht staat op de straal.



***2** Hiernaast zie je een schijf met middelpunt en nog een punt. De schijf draait met constante snelheid om het middelpunt. De snelheidsvector van dat punt is aangegeven met een pijl.
Teken zonder te meten op het werkblad de pijl die hoort bij de snelheidsvector van een punt op de rand van de schijf.
Tip. Gebruik gelijkvormigheid.

3 We bekijken de cirkelbeweging $\begin{cases} x = R\cos(at) \\ y = R\sin(at) \end{cases}$.
met R positief en a willekeurig, ongelijk 0.
a. Neem $a = 2$ en beschrijf de beweging. Hoe lang duurt een rondje? Hoe groot is de snelheid (niet differentiëren)? Licht je antwoord toe.
b. Neem $a = -2$. Wat is het verschil met de beweging in het geval $a = 2$?
c. Druk de snelheidsvector op tijdstip t in a uit.
d. Bereken de snelheid. Klopt dat met je antwoord in vraag **a** en **b**?

Punt P beweegt volgens $\begin{cases} x = R\cos(at) \\ y = R\sin(at) \end{cases}$,
met $R > 0$ en $a \neq 0$.

De baan is een cirkel met middelpunt R. De beweging gaat in tegenwijzerrichting als $a > 0$, anders in wijzerrichting.
De tijd voor één rondgang is: $\frac{2\pi}{|a|}$.

Andere bewegingen over de cirkel

4 De bewegingsvergelijkingen van P zijn:
$\begin{cases} x = R\cos(t^2) \\ y = R\sin(t^2) \end{cases}$ met R positief.
a. Leg uit dat P over een cirkel beweegt, maar niet steeds dezelfde snelheid heeft.
b. Hoe vaak wordt het punt (0,1) gepasseerd op het tijdsinterval [0,10]?
c. Welke afstand legt P af op het tijdsinterval $[0,t]$?
Bepaal hoe groot de snelheid van P op tijdstip t is, zonder de snelheidsvector te bepalen. Licht je antwoord toe.
d. Bereken de snelheidsvector op tijdstip t, zowel met differentiëren als met behulp van **c**. Licht je antwoord toe.

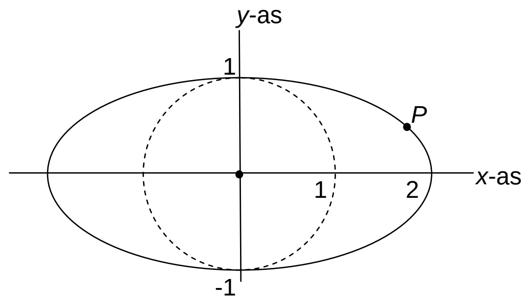
5 In een eerder hoofdstuk hebben we ook andere bewegingen over de eenheidscirkel bekeken, bijvoorbeeld de beweging:
$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}.$$
a. Ga langs algebraïsche weg na dat de beweging over de eenheidscirkel gaat.
b. Bereken de snelheidsvector op tijdstip t.
c. Toon met het inproduct aan dat de snelheidsvector loodrecht staat op de straal.

Buiten de cirkel

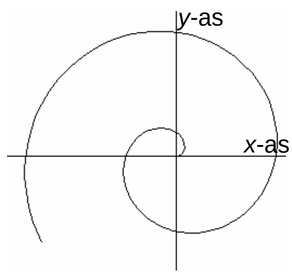
*** 6** Een punt P beweegt volgens: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

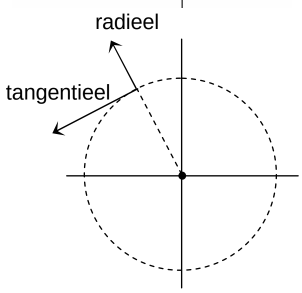
a. Beschrijf de baan.
b. Bereken de snelheidsvector op tijdstip t.

De baan krijg je door de eenheidscirkel ten opzichte van de y-as met de factor 2 te vermenigvuldigen.



Hierboven zie je de baan, met P in een bepaalde positie.
c. Construeer de snelheidsvector van P op dat moment met behulp van de eenheidscirkel. (Geef een snelheidsvector met grootte 1 aan met lengte 1.)
In welke punten van de baan is de snelheid van P het grootst?
d. Ga na met differentiëren na dat de snelheid van P op tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{3\sin^2 t + 1}$.
e. Ga met de formule in het vorige onderdeel na in welke punten P het snelst beweegt. Licht je antwoord toe. Geef je antwoord exact, zonder $\sqrt{3\sin^2 t + 1}$ te differentiëren.





*** 7** Een punt P beweegt volgens: $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$, met $t \geq 0$.

De baan is een zogenaamde *spiraal van Archimedes.*
a. Bereken de snelheidsvector.

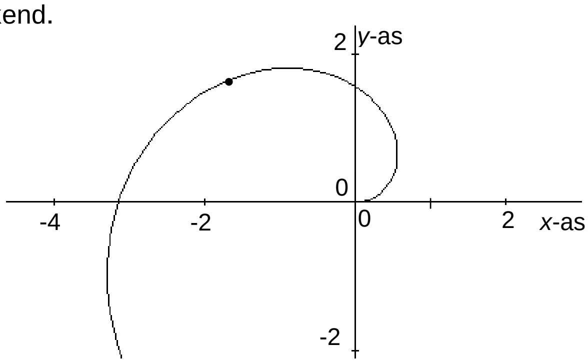
De beweging kun je opvatten als de beweging over een 'uitdijende' cirkel met straal t en met 'omlooptijd' 2π.

De snelheidsvector $\vec{v}(t)$ op tijdstip t is te schrijven als de resultante van een radiële component (in de richting van de straal) en een tangentiële component (in de raakrichting van de cirkel met straal t).

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}}_{\text{radieel}} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}}_{\text{tangentieel}}$$

b. Geef de radiële en tangentiële componenten en laat zien dat hun som gelijk is aan de vector die je in **a** berekend hebt.
c. Geef radiële en de tangentiële snelheden op tijdstip t.

Hieronder en op het werkblad is een stuk van de baan getekend.



d. Teken de radiële en tangentiële component van de snelheidsvector in het aangegeven punt. Geef een snelheidsvector van grootte 1 lengte 1.

Versnelling

Bij een eenparig rechtlijnige beweging is de versnelling 0. Omgekeerd: als de versnelling bij een beweging 0 is, dan is de beweging eenparig rechtlijnig. Verandert de snelheidsvector bij een beweging in richting of in grootte, dan is er sprake van een versnelling. De versnelling wordt gedefinieerd als de verandering van de snelheidsvector.

> P beweegt volgens $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$.
>
> De **versnellingsvector** $\vec{a}$ van P is dan: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

Als je een kogeltje aan een touw rond laat draaien, is er een kracht nodig in de richting van het middelpunt van de cirkel, de zogenaamde centripetale kracht $\vec{F}$. Er geldt (tweede wet van Newton) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. We noemen $\vec{a}$ de *centripetale* versnellingsvector.

8 **a.** Bekijk de standaardcirkelbeweging en ga na dat de versnellingsvector in de richting van het middelpunt wijst.
b. Bereken de grootte van de versnellingsvector van de beweging: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$.

Bekijk de beweging $\begin{cases} x = R\cos(at) \\ y = R\sin(at) \end{cases}$.
c. Wat is de grootte van de versnellingsvector?
d. Laat zien dat de centripetale versnelling gelijk is aan $\frac{v^2}{R}$, waarbij v de snelheid is.

9 Bereken de versnellingsvector van de kogelbaan van paragraaf 1, opgave 1.
Wat stelt deze versnelling voor?

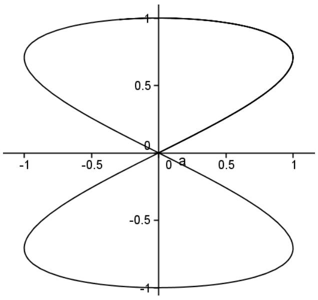
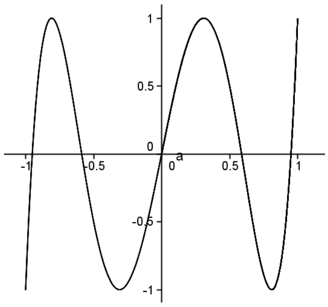
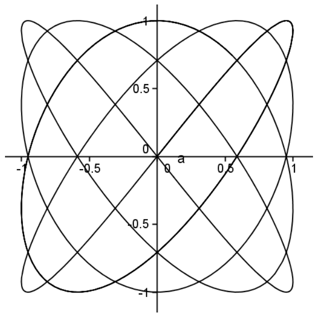
10 Stel dat $P = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ een beweging over de cirkel met middelpunt O en straal r beschrijft.
a. Waarom geldt: $(f(t))^2 + (g(t))^2 = r^2$?

b. Laat zien dat differentiëren van de uitdrukking in **a** geeft: $f(t) \cdot f'(t) + g(t) \cdot g'(t) = 0$.
c. Leg uit hoe uit **b** volgt dat de vectoren $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan.

Lissajousfiguren

11 We bekijken de beweging $\begin{cases} x = \sin(pt) \\ y = \cos(qt) \end{cases}$, voor alle mogelijke gehele waarden van p en q.
a. Teken enkele banen met GeoGebra.
Maak schuiven voor p en q, met $1 \le p \le 12$ en $1 \le q \le 12$ (met stapgrootte 1).
- Voer in: Kromme [sin(p t), cos(q t), t, 0, 2π] (Let op: geen spatie na *sin* en *cos*, wel spaties achter p en q).
- Vergroot voldoende om redelijk zicht te krijgen.

Hieronder zie je drie voorbeelden.

b. Als je een verticale of horizontale lijn bij zo'n figuur trekt, kom je meestal meerdere snijpunten tegen. Waarom is dat zo? Zijn er uitzonderingen?

Als je neemt: $p=2$, $q=1$ ontstaat de 8-figuur links.
c. Bereken langs algebraïsche weg met welke factor je in de y-richting moet vermenigvuldigen om een hoek van 90° het midden van de 8 te krijgen?
d. Neem $p=3$ en varieer q. Voor diverse waarden van q is er een zelfdoorsnijding van de figuur op de negatieve y-as. Bereken de hoek daarvan, in de gevallen dat $q=2$ en $q=4$.
e. Stel een formule op voor de grootte van de snelheid.

Door de grafiek van de snelheid als functie van t te maken, kun je snel zien bij welke p-q-combinaties er punten zijn met snelheid 0. Dat lijken precies de gevallen te zijn, waarbij de figuur geen vloeiende gesloten kromme is.
f. Onderbouw dit.

12 Gegeven de krommen $\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\cos(q\,t) \end{cases}$.
a. Voer in in GeoGebra: kromme [cos(t), cos(q t), t, 0, 2π].
b. Voor welke waarde(n) van q gaan de krommen door O? Laat langs algebraïsche weg zien dat je antwoord juist is.
c. De krommen zien er uit als gewone grafieken! Verticale lijnen snijden de kromme maar één keer.
Toon aan dat aan.
(Bij een gegeven waarde van $\cos t$, bijvoorbeeld $\cos t=\frac{1}{3}$, vind je twee waarden voor t. Waarom hoort daar ook maar één waarde van $\cos q\,t$ bij?)
d. Bereken voor de waarden die je in **b** gevonden hebt, de helling van de grafieken in het punt O.

Alle krommen gaan door het punt (1,1).
e. Bepaal voor elke kromme de helling van de raaklijn in (1,1).

Voor q = 2 is de figuur de grafiek van een kwadratische functie en voor $q = 3$ van een derdegraadsfunctie f met een formule van de vorm: $f(x) = a\,x^3 - b\,x^2$, voor zekere getallen a en b.

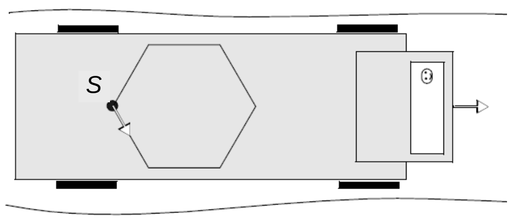
f. Geef de formules van die functies in de gevallen dat $q = 2$ en $q = 3$.
g. Geef de formule van de functie bij $q = 4$. Gebruik die in het geval dat $q = 2$.

3 Samengestelde bewegingen

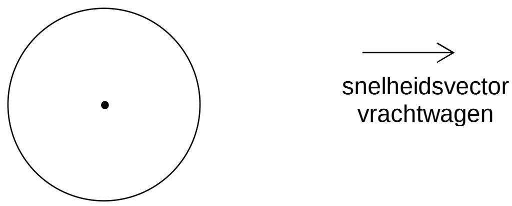
In deze paragraaf bekijken we de baan en de snelheid van een punt dat aan twee bewegingen tegelijkertijd deelneemt. Dit onderwerp is in paragraaf 2 van hoofdstuk 5 aan de orde geweest. Hier gaat het vooral om hoe de de snelheid van de resulterende beweging van de snelheden van de twee samengestelde delen afhangt.

Twee rechtlijnige bewegingen

1 Stel je staat op een open vrachtwagen en loopt langzaam met een snelheid van $\frac{1}{2}$ meter per seconde over een regelmatige zeshoek met zijden van 1 meter; je begint in punt S in de figuur. Een diagonaal van de zeshoek ligt in de richting waarin de vrachtwagen rijdt.

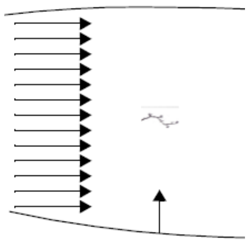


Je bent na 12 seconden weer op dezelfde plek van de vrachtwagen terug.
De vrachtwagen rijdt langzaam maar constant met een snelheid van $\frac{1}{2}$ meter per seconde.
De snelheidsvector van de vrachtwagen geven we aan met de pijl hieronder rechts (even lang als de straal van de cirkel).

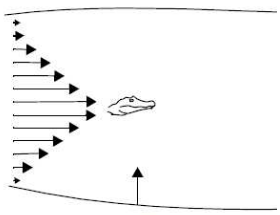


a. Teken in een cirkel zoals hierboven de zes snelheidsvectoren waarmee jij beweegt ten opzichte van de vrachtwagen gedurende 12 seconden.
b. Teken ook de zes snelheidsvectoren bij de beweging die jij maakt *ten opzichte van de straat.*
c. Bereken exact je maximale en minimale snelheid ten opzichte van de straat.
d. Teken de baan die je ten opzichte van de straat maakt. Geef ook de schaal van je tekening.

e. Herhaal het experiment, waarbij jij twee maal zo snel over de zeshoek loopt, dus al na 6 seconden in *S* terugkomt, en de vrachtwagen dezelfde snelheid houdt.
f. Een waarnemer op de stoep krijgt sterk de indruk dat je op zeker moment achteruit gaat. Klopt dat?

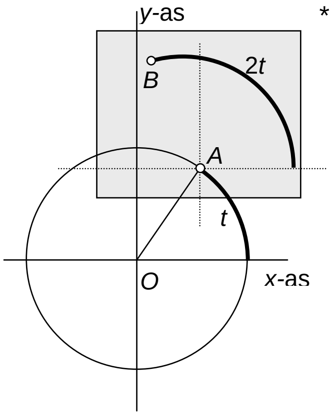


2 De rivier stroomt over de volle honderd meter breedte van west naar oost, op alle plekken met een snelheid van 2 meter per seconde. De zwemmer steekt over, met zwemsnelheid 1 meter per seconde, steeds gericht op de zon die in het zuiden staat.
a. Is de snelheidsvector van de zwemmer (ten opzichte van het land) constant? Volgt daaruit dat de zwemmer in rechte lijn beweegt?
b. Bereken grootte en richting van die snelheid ten opzichte van het land.
c. Bereken ook hoeveel tijd de zwemmer voor de oversteek nodig heeft.
d. Aan de overkant gaat de zwemmer meteen terug, met dezelfde snelheid, nu met de zon in de rug. Teken heen- en terugroute. Duren die even lang?
e. Bij de start drijft een takje in het midden van de rivier, recht voor het startpunt. Komt de zwemmer dat takje tegen, op de heen- of terugroute?

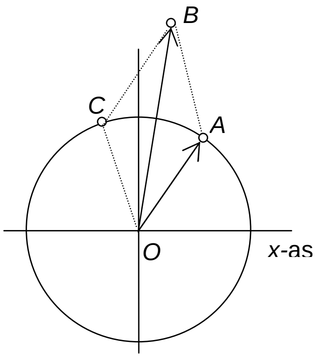


3 De rivier van dit voorbeeld stroomt over de volle honderd meter breedte van oost naar west, maar in het midden aanmerkelijk sneller dan aan de kant. De zwemmer steekt over, met zwemsnelheid 1 meter per seconde, steeds gericht op de zon die in het zuiden staat.
a. Is de snelheidsvector van de zwemmer (ten opzicht van het land) constant? Beweegt de zwemmer in een rechte lijn?
b. Bereken hoeveel tijd de zwemmer voor de oversteek nodig heeft.
c. Aan de overkant gaat de zwemmer meteen terug. Schets heen- en terugroute. Duren die even lang?
d. In het midden van de rivier, recht voor het startpunt drijft een kaaiman (slapend). Komt de zwemmer de kaaiman tegen? Zo ja, op de heen- of terugroute of beide, als de kaaiman niet gewekt wordt?

Twee cirkelbewegingen



* **4** In deze opgave bekijken we de zogenaamde *limaçon.*
A maakt de standaardcirkelbeweging. *A* voert het grijze plateau mee; daarop maakt *B* een cirkelbeweging met dezelfde straal, maar met dubbele snelheid. (Niet het hele plateau is getekend.) De baan van *B* heet limaçon.
Maak nauwkeurige tekeningen bij de volgende vragen. Dat maakt het onderzoek veel gemakkelijker.



Bij een gegeven punt *A*, kun je de positie van *B* vinden via het parallellogram *OABC* hiernaast.
a. Waar moet je *C* op de eenheidscirkel kiezen?
b. Construeer op het werkblad bij acht regelmatig verdeelde posities van *A* op de cirkel de bijhorende punten *B*. Licht je werkwijze toe.
c. Voltooi de baan van *B* met een vloeiende lichtgetekende potloodlijn. De baan begint in het punt (2,0) en keert daar weer terug.

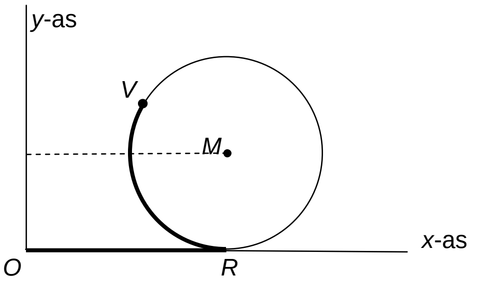
d. Teken op het werkblad de snelheidsvector bij *A*. En de snelheidsvector bij *C*.
Als je de snelheidsvector bij *A* grootte 1 geeft, hoe lang moet je de snelheidsvector bij *C* dan maken?
e. Teken de snelheidsvector bij *B*; deze raakt de limaçon in *B*.
f. De limaçon snijdt de y-as op het tijdstip $t = \frac{1}{3}\pi$.
Bereken de cosinus van de hoek waaronder dat gebeurt.
g. Bepaal met een constructie het punt van de limaçon bij $t = \frac{2}{3}\pi$ en de bijbehorende snelheidsvector.
Toon aan dat de snelheidsvector de horizontale as onder een hoek van 60° snijdt.

5 **a.** Geef de bewegingsvergelijkingen van *B* in de vorige opgave.
b. Bepaal de snijpunten van de baan van *B* met de coördinaat-assen en bereken langs algebraïsche weg de hoeken waaronder de baan de assen snijdt. Gebruik het inproduct.

6 Onderzoek in GeoGebra varianten van de limaçon door de stralen van de samenstellende bewegingen verschillend te kiezen en de frequenties of de draairichting te variëren.

Een cirkel- en een rechtlijnige beweging

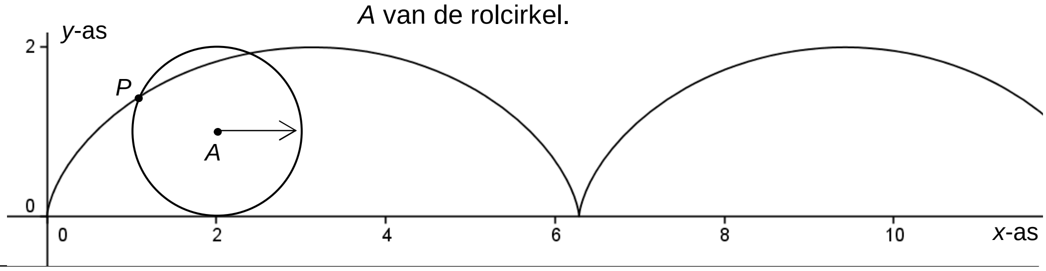
7 We bekijken nog eens de beweging van een vast gekozen punt *P* van een fietsband. We verwaarlozen de dikte van de band. Op een gegeven moment is *P* beneden op het wegdek; dat kiezen we als tijdstip 0. En die plek kiezen we als oorsprong *O,* brengen een assenstelsel aan zoals hiernaast en nemen de straal van het wiel als lengte-eenheid. Veronderstel dat de fietssnelheid 1 is.



Hierboven is de situatie op tijdstip t getekend. *R* is het contactpunt van het wiel met de grond, dus $OR = t$ (want de fietssnelheid is 1).
M is het middelpunt van de rolcirkel, die over de grondlijn rolt.
De bewegingsvergelijkingen van *P* worden gegeven door: $(x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Zie opgave 7, paragraaf 2 van hoofdstuk 5. De baan is een cycloïde.
a. Kun jij zeggen wat de snelheidsvector van *P* is op het moment dat het op de grondlijn komt?
Licht je antwoord toe.
b. Net als de grondpunten vormen de hoogste punten van de cycloïde-bogen een periodieke rij. Wat is de snelheid van *P* in de toppen?

Raaklijn aan de cycloïde

* **8** We gaan verder met de vorige opgave. We bekijken het punt *P* op de rolcirkel dat op $t = 0$ in $O(0,0)$ is.
a. De tekening hieronder staat ook op het werkblad. Construeer daarop de snelheidsvector bij *P* met behulp van de snelheidsvector bij de rechtlijnige beweging van het middelpunt van de rolcirkel en de snelheidsvector bij de cirkelbeweging van *P* ten opzichte van het middelpunt *A* van de rolcirkel.



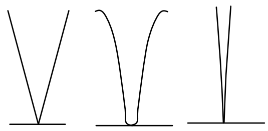
b. Teken ook de raaklijn in *P*.

c. In één van de punten van een 'opgaande' boog van de cycloïde heeft de snelheidsvector grootte 1 cm/s.
Bereken exact op welke hoogte dat punt ligt.

d. Teken een aantal snelheidsvectoren bij één cycloïde-boog vanuit de oorsprong.
De eindpunten van de snelheidsvectoren vormen weer een cirkel. Wat is het middelpunt en wat de straal? Licht je antwoord toe.

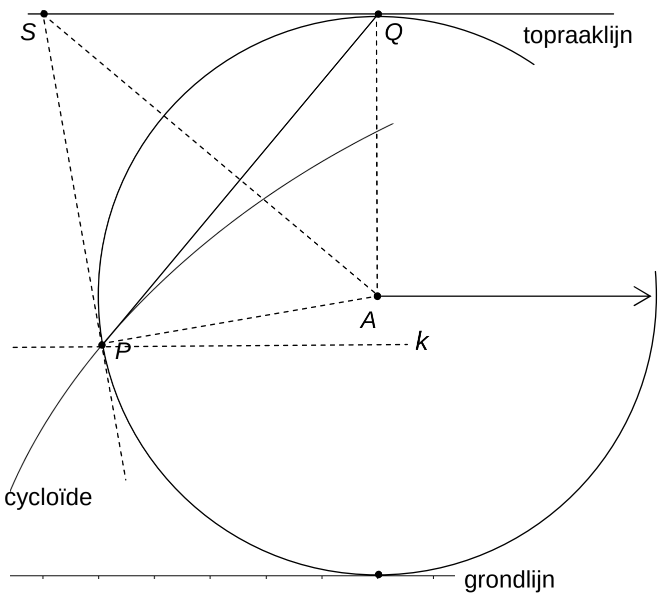
e. De richting van de snelheidsvector is vlak na de start nagenoeg verticaal omhoog.
Hoe is dat aan het eind van een boog van de cycloïde? En bij de overgang naar de volgende boog?

9 We gaan verder met de vorige opgave. Het punt *P* neemt tegelijk deel aan twee bewegingen: een voortgaande beweging langs een rechte lijn en een draaibeweging.
a. Geef de bewegingsvergelijkingen van de draaibeweging. Let op de draairichting en dat *P* op $t = 0$ in *O* is.
b. Geef de bewegingsvergelijkingen van *P* over de cycloide.
De cycloïde heeft snavelpunten.



c. Hoe ziet zo'n snavelpunt er uit, uitvergroot? Maak een keuze uit de drie mogelijkheden die hiernaast getekend zijn en onderbouw je keuze met de manier waarop het afrollen werkt en ook met de snelheidsvector.

* **10** In deze opgave construeren we de raaklijn aan de cycloïde op een andere manier. De tekening hieronder staat ook op het werkblad.



Bekijk de raaklijnen in het punt *P* en in de top *Q* aan de rolcirkel; die snijden elkaar in *S*. *k* is de lijn door *P* evenwijdig met de grondlijn. We gaan bewijzen de lijn *PQ* bissectrice is van de hoek tussen de lijnen *SP* en *k*.

a. Toon aan dat de driehoeken *SPA* en *SQA* congruent zijn.

b. Hoe volgt uit a dat $\angle SQP = \angle SPQ$?

c. Waarom is lijn *PQ* bissectrice van de lijnen *SP* en *k*?

d. Hoe volgt uit c dat lijn PQ raaklijn is aan de cycloïde?

Conclusie

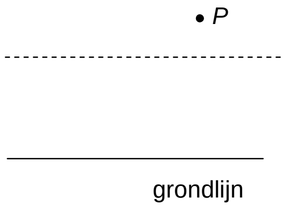
De raaklijn in een punt aan de cycloïde gaat door de top van de rolcirkel.

11 Er is nog een andere manier om in te zien dat elke raaklijn aan de cycloïde door de top van de rolcirkel gaat.
Bekijk de tekening van de vorige opgave. Die hoort bij een bepaald moment.

a. Welk punt van de rolcirkel staat op dat moment stil?

Dat punt noemen we *X*.
Op dat moment draait lijnstuk *PX* dus om *X*.

b. Hoe volgt hieruit dat de raaklijn in *P* aan de cycloïde door de top van de rolcirkel gaat?



* **12** De tekening hiernaast staat ook op het werkblad.
P is een punt van een cycloïde. De getrokken lijn is de grondlijn. Het middelpunt van de rolcirkel heeft de stippellijn als baan.

a. Teken de raaklijn in *P* aan de cycloïde als *P* op een opgaand stuk van de cycloïde ligt. Licht je antwoord toe.

b. Teken de raaklijn in *P* aan de cycloïde als *P* op een neergaand stuk van de cycloïde ligt. Licht je antwoord toe.

Hoe lang is de cycloïde?

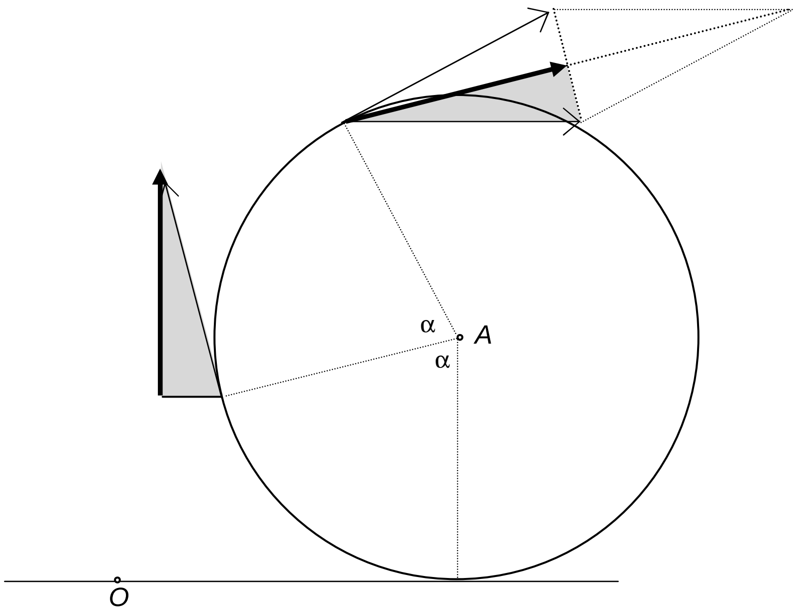
In deze sectie bepalen we op twee manieren de gemiddelde snelheid van een vastgekozen punt op het wiel om de lengte van de cycloïde te bepalen.

* **13** Neem aan dat de straal van het wiel 1 is en dat de snelheid van de fietser 1 is. We bekijken het vastgekozen punt *P* dat op $t = 0$ in *O* is.

We vergelijken de situatie als *P* over hoek α gedraaid is met de situatie dat *P* over hoek 2α gedraaid is.

Bij draaihoek α is de verticale component van de snelheidsvector getekend. De totale snelheidsvector in P = snelheidsvector van rotatie in P + snelheidsvector van A.
a. Waarom hebben de totale snelheidsvector en de snelheidvector van de rotatie dezelfde verticale component?

Bij draaihoek 2α is $\frac{1}{2}$ maal de snelheidsvector getekend.



b. Toon aan dat de grijze driehoeken congruent zijn.
Je kunt de tekening op het werkblad gebruiken.

De snelheid bij draaihoek 2α is dus 2 keer zo groot als de grootte van verticale component van de snelheidsvector bij draaihoek α.

We bekijken de periode van 0 tot π seconde. In die periode beweegt P van hoogte 0 naar hoogte 2.
c. Wat is dus zijn gemiddelde verticale snelheid in die periode?

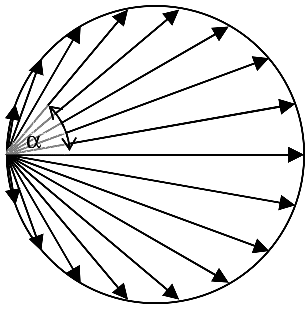
We verdelen de periode in twee gelijke stukken: van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ en van $\frac{1}{2}\pi$ tot π.
d. Ga na dat de verticale snelheden in beide stukken hetzelfde verloop hebben.

Uit **c** en **d** volgt dat de gemiddelde verticale snelheid van P op het eerste stuk ook $\frac{2}{\pi}$ is.

In de periode van π seconden beweegt P van het wegdek naar het hoogste punt. Op elk moment is zijn snelheid het dubbele van zijn verticale snelheid halverwege, die gemiddeld $\frac{2}{\pi}$ is. De gemiddelde snelheid van P is dus $\frac{4}{\pi}$.

e. Welke afstand legt P dus in die π seconden af? Wat is de lengte van de hele cycloïdeboog?

14 Je kunt ook met integreren de lengte van de cycloïdeboog berekenen. Dat gaan we in deze opgave doen.



Neem aan dat de fietssnelheid weer 1 is.
In opgave **9** heb je een aantal snelheidsvectoren bij één cycloïdeboog getekend, alle beginnend in de oorsprong. Je kreeg een diagram zoals hiernaast.; de eindpunten van de snelheidsvectoren liggen op een cirkel.

a. Wat is de diameter van die cirkel?

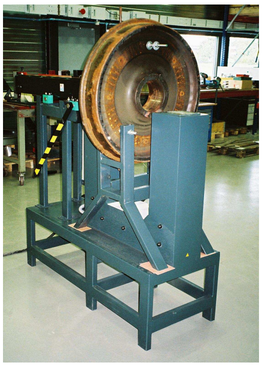
b. Wat is de grootte van de snelheidsvector die een hoek α met de horizontale richting maakt?

Om de lengte van een cycloïdeboog te bepalen, berekenen we weer de gemiddelde grootte van de snelheidsvectoren.

Die gemiddelde grootte is: $\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos\alpha \, d\alpha$.

c. Bereken deze integraal exact.

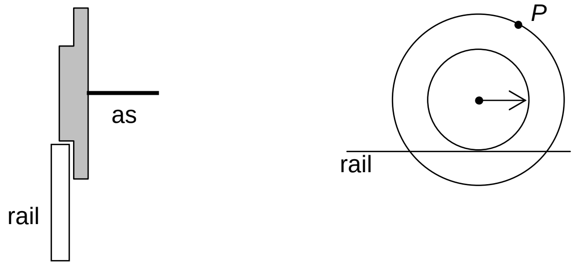
d. Hoe vind je nu de lengte van de cycloïdeboog?



4 Extra Opgaven

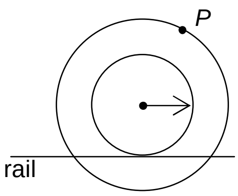
De trochoïde

In deze paragraaf bekijken we een wiel van een rijdende trein. Om ervoor te zorgen dat de trein niet uit de rails loopt, heeft de binnenkant van een wiel een grotere diameter. De buitenkant van het wiel loopt over de rails. De baan die een punt *P* op de omtrek van de binnenkant maakt, heet een **trochoïde**. De snelheid van de trein is met een pijl weergegeven.



* **1** Op het werkblad is een treinwiel op de rail weergegeven met de snelheidsvector van de trein. Als *P* op het laagste punt van zijn baan is gekomen, beweegt *P* achteruit.

a. Vind de snelheidsvector van *P* op die plek uit die van de trein.



Ook is een aantal punten op de omtrek van de buitenkant getekend.

b. Teken in elk van die punten de snelheidsvector waarmee dat punt beweegt.

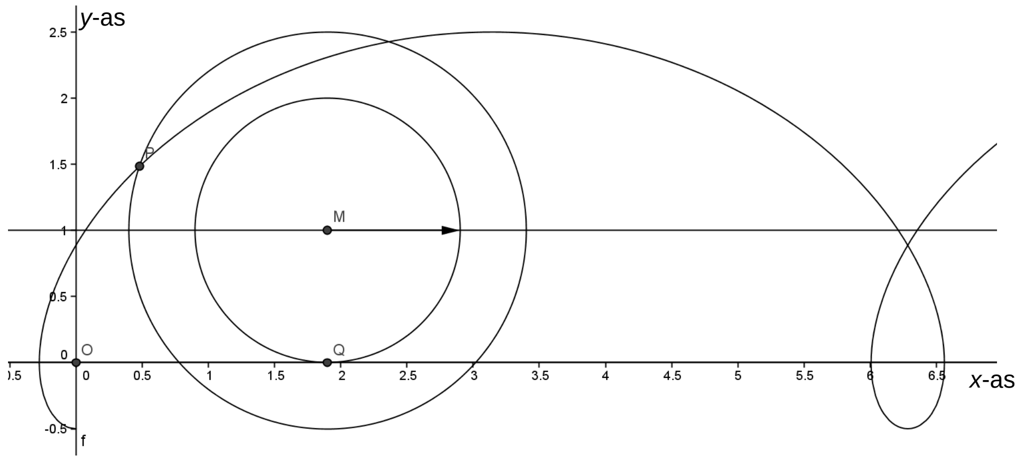
c. Geef nauwkeurig aan in welke punten de snelheidsvector verticaal (loodrecht op de rail) gericht is.

2 De rolcirkel (de buitenkant) op de volgende bladzijde heeft middelpunt *M* en straal 1, *P* is een vastgekozen punt op de binnenkant, $PM = 1\frac{1}{2}$.
De baan van *P* is in een assenstelsel getekend. Hierbij is de rail de *x*-as. De *y*-as gaat door een laagste punt van de baan van *P*. In dat punt is *P* op $t = 0$. *M* is op tijdstip *t* in $(t,1)$.

a. Geef de bewegingsvergelijkingen van *P*.

b. Bereken de snelheidsvector van *P* op tijdstip *t.*

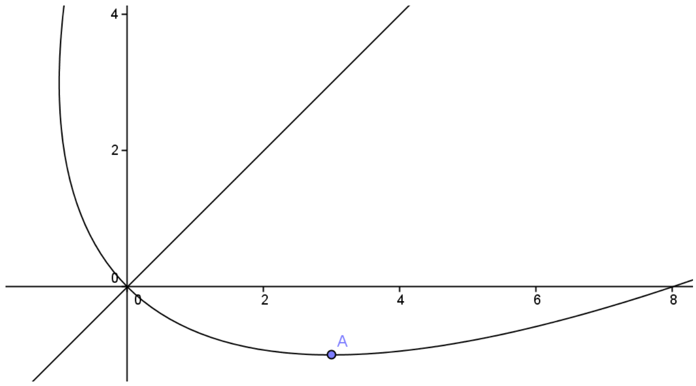
c. Hoe volgt algebraïsch dat de baan van *P* de *x*-as loodrecht snijdt?



* **3** Het plaatje bij de vorige opgave staat ook op het werkblad.
a. Teken de snelheidsvector van P als resultante van de snelheidsvector van de trein en de rotatie van het wiel.
Teken ook de raaklijn in P aan de trochoïde.
b. Het punt Q staat stil.
Wat volgt hieruit voor de raaklijn in P aan de trochoïde?

4 Gegeven de beweging $(x(t), y(t)) = (t^2 - 2t, t^2 + 2t)$.
Hieronder staat de baan. Die is symmetrisch in de lijn $y = x$.
a. Hoe kun je dit aan de formule zien?

In het punt A is de raaklijn horizontaal.
b. Bereken de coördinaten van A.



De baan is een parabool. Dat nemen we nu even aan; verderop krijgen we hier zekerheid over.
Uit de raaklijneigenschap volgt dat het brandpunt de loodrechte projectie van A op de lijn $y = x$ is.
c. Ga dat na. Geef ook een vergelijking van de richtlijn.

Als je het goed gedaan hebt, heb je voor het brandpunt $F(1,1)$ gevonden en voor de richtlijn de lijn r met vergelijking $x+y+2=0$.

d. Ga met een berekening na dat (t^2-2t, t^2+2t) even ver van F als van r ligt voor elke waarde van t . Dus de baan is inderdaad een parabool!

5 Het punt P beweegt volgens $x=t^2-4$, $y=2t$.

a. Ga na: $x(-t)=x(t)$ en $y(-t)=-y(t)$, voor alle t.
Wat betekent dit voor de baan?

b. Ga na dat de afstand van P tot O gelijk is aan:
$\sqrt{t^4-4t^2+16}$.

Er zijn twee punten van de baan die minimale afstand tot O hebben.

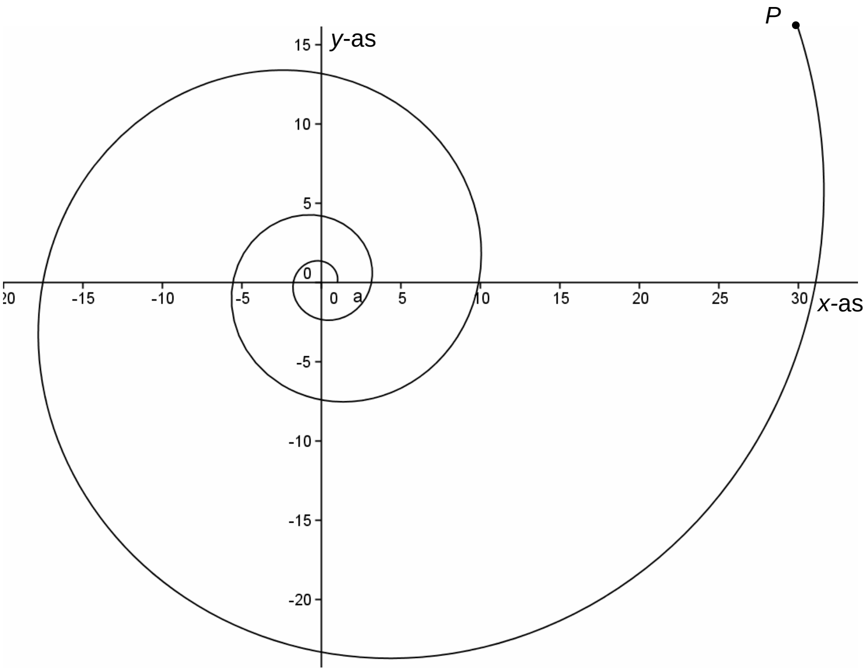
c. Bereken de coördinaten van die punten.

Het punt uit **c** dat boven de x-as ligt, noemen we A.

d. Laat zien dat de snelheidsvector in A loodrecht op lijn OA staat.

6 Hieronder is met GeoGebra een deel van de baan getekend die het punt T aflegt met bewegingsvergelijkingen $x=1{,}2^t\cos t$, $y=1{,}2^t\sin t$

a. Het punt dat het dichtst bij $O(0,0)$ ligt is $(1,0)$.
Welke waarde van t hoort hierbij?



Op een zekere plaats voor P op de spiraal maakt de lijn OP een hoek van 30° met de x-as.

b. Op welk tijdstip wordt die plaats bereikt?

c. Bereken de snelheidsvector bij die plaats.

We ontbinden de snelheidsvector in elk punt Q in een component langs lijn OQ en een component daar loodrecht op.

d. Toon aan dat de verhouding van de lengtes van die twee componenten niet van Q afhangt.

Hieruit volgt dat de raaklijn in elk punt Q van de spiraal dezelfde hoek maakt met lijn OQ.

7 De bewegingsvergelijkingen van P en Q zijn:

$$P: \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 2t - 6 \end{cases} \quad \text{en } Q: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t^2 - 9 \end{cases}$$

a. Teken de baan van P en van Q.

b. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de twee banen.

Tip. Geef van één van de banen een vergelijking.

c. Bereken de minimale afstand van de punten P en Q.

d. Geef bewegingsvergelijkingen van een punt R dat dezelfde baan als P doorloopt, waarbij de minimale afstand van Q en R nul is.

5 Antwoorden

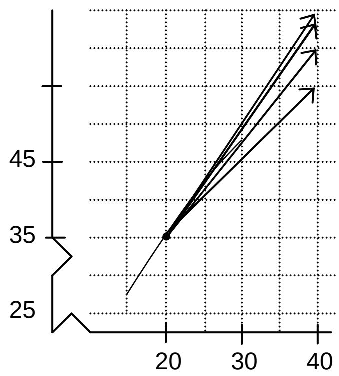
paragraaf 1 Beweging

1 **a.** Dan $y = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = 8$, dus op $t = 8$.

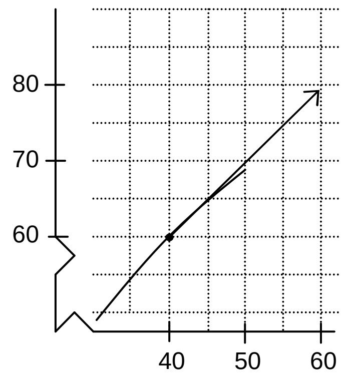
b. $\frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 40-20 \\ 60-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{1{,}5-1}\begin{pmatrix} 30-20 \\ 48{,}75-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 27{,}5 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{1{,}01-1}\begin{pmatrix} 20{,}2-20 \\ 35{,}2995-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29{,}95 \end{pmatrix}$

c.

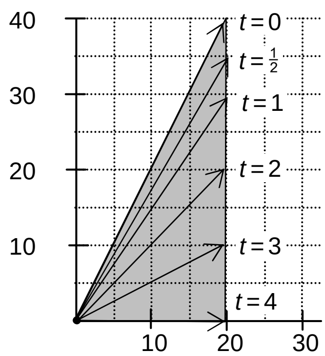


d. $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

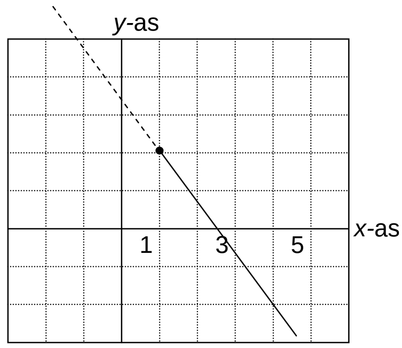


2 **a.** $\begin{pmatrix} 20 \\ 40-10t \end{pmatrix}$

b,c



4 **a.** P beweegt over de lijn $4x+3y=10$. De eerste coördinaat van P neemt alle waarden ≥ 1 aan en de tweede alle waarden ≤ 2.



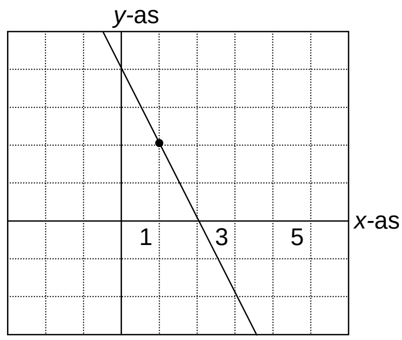
b. $4x+3y=10$ en $x \geq 1$ (of: $4x+3y=10$ en $y \leq 2$).

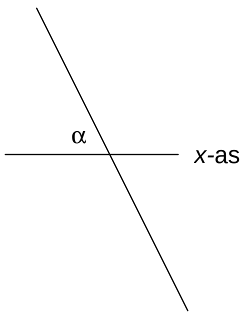
c. $\begin{pmatrix} 6t \\ -8t \end{pmatrix}$

d. De snelheid is $\sqrt{36t^2+64t^2}=10\,|\,t\,|$, dus op $t=1$ en $t=-1$. dus in (4,-2).

e. Bijvoorbeeld $(x,y)=(\sin t, \sin t)$ of $(x,y)=(\cos t, \cos t)$

5 **a.**





b. $\dfrac{1}{t_2-t_1}\begin{pmatrix} 1+2t_2-(1+2t_1) \\ 2-4t_2-(2-4t_1) \end{pmatrix}=\dfrac{1}{t_2-t_1}\begin{pmatrix} 2t_2-2t_1 \\ 4t_1-4t_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c. $\tan\alpha=2$, dus $\alpha \approx 63°$

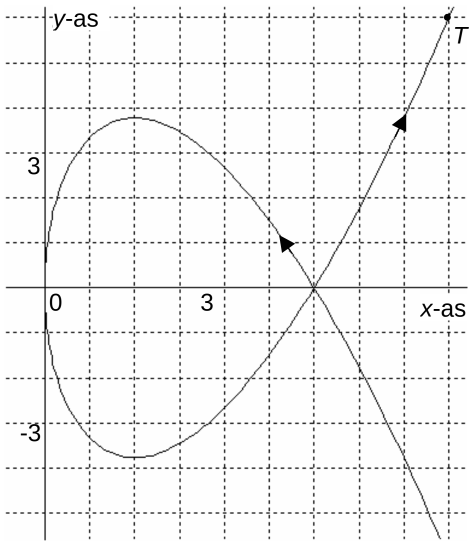
6 **a.** Zie volgende bladzijde.

b. Met de x-as: $y=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}t(t^2-6)=0 \Leftrightarrow t=0,\ \sqrt{6}$ of $-\sqrt{6}$, dit geeft de punten (0,0) en (6,0).
Met de y-as: $x=0 \Leftrightarrow t=0$. Dit geeft het punt (0,0).

c. $\begin{pmatrix} 2t \\ 2t^2-4 \end{pmatrix}$

d. Horizontaal als $2t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ of $t = -\sqrt{2}$.
Dit geeft de punten $(2, -2\tfrac{2}{3}\sqrt{2})$ en $(2, 2\tfrac{2}{3}\sqrt{2})$
Verticaal als $2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$, dus in (0,0).

e. $\sqrt{4t^2} = 2|t|$



7 **a.** Op $t = 6$ is het punt in (9,6), de snelheidsvector is dan $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

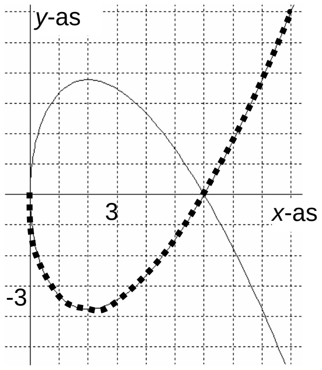
b. Noem die hoek α, dan $\tan \alpha = \frac{14}{6} = 2\tfrac{1}{3}$, dus $\alpha \approx 67°$.

c. $y = 2\tfrac{1}{3}x - 15$

d. Dan zijn de componenten van de snelheidsvector in absolute waarde aan elkaar gelijk, dus $2t^2 - 4 = 2t$ of $2t^2 - 4 = -2t$, dus $t^2 - t - 2 = 0$ of $t^2 + t - 2 = 0$, dus $t = 1, 2, -1, -2$.

8 **a.** Als je in de bewegingsvergelijkingen van opgave 6, t vervangt door $\sqrt[3]{t}$, krijg je de bewegingsvergelijkingen van opgave 8. Verder kan $\sqrt[3]{t}$ alle waarden aannemen.

b. De snelheidsvector op tijdstip t is: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} \\ \frac{2}{3} - \frac{4}{3\sqrt[3]{t^2}} \end{pmatrix}$. Op $t = 27$, is het punt in (9,6), de snelheidsvector is dan: $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{14}{27} \end{pmatrix}$. Als je deze met 27 vermenigvuldigt, krijg je $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.



9 **a.** Als $t=\sqrt{x}$, dan $t^2=x$ en $\frac{2}{3}t^3-4t=\frac{2}{3}\sqrt{x}^3-4\sqrt{x}$
$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}$

b. $f'(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, dus $f'(9)=2\frac{1}{3}$, je krijgt hetzelfde als in 7c.

10 **a.** $\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

b. Omdat die $\vec{0}$ is.

c. $y=x\sqrt{x}$ en $y=-x\sqrt{x}$

d. Van beide functies is de afgeleide in 0 gelijk aan 0, dus de richting is horizontaal.

11 **a.** Het punt (6,0) wordt bereikt op de tijdstippen $t=\sqrt{6}$ en $t=-\sqrt{6}$. De snelheidsvectoren zijn dan: $\begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$. Noem de gevraagde hoek α, dan $\cos\alpha=\frac{-2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}+8\cdot 8}{2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}+8\cdot 8}=\frac{40}{88}=\frac{5}{11}$.

b. De snelheidsvectoren zijn dan: $\begin{pmatrix} 2a\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2a\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$.

Het inproduct van deze twee vectoren moet 0 zijn:
$2a\sqrt{6}\cdot -2a\sqrt{6}+8\cdot 8=0 \Leftrightarrow a=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

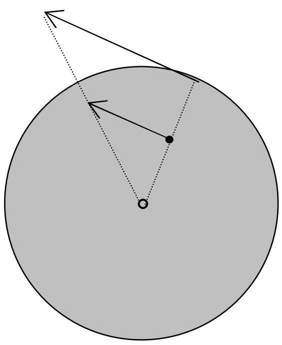
Paragraaf 2 Cirkelbewegingen

1 **a.** De baan is de cirkel met middelpunt *O* en straal *R*. Hij wordt in tegenwijzerrichting doorlopen in 2π seconden, dus de snelheid is *R*.

b. $\begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$

c. Ja

d. $-R^2\sin t\cdot\cos t+R^2\sin t\cdot\cos t=0$



2 Zie plaatje, de pijlen zijn evenwijdig.

3 **a.** De baan is de cirkel met middelpunt *O* en straal *R*. Hij wordt in tegenwijzerrichting doorlopen in π seconden, dus de snelheid is $2R$.

b. Het verschil is dat de baan in wijzerrichting doorlopen wordt.

c. $\begin{pmatrix} -aR\sin t \\ aR\cos t \end{pmatrix}$

d. $|aR|$, ja.

4 **a.** Bijvoorbeeld tussen de tijdstippen 0 en 1 wordt afstand R afgelegd en tussen de tijdstippen 1 en 2 wordt afstand $3R$.

b. Er wordt een afstand van $100R$ afgelegd, dat zijn $\frac{100}{2\pi} \approx 15{,}9\ldots$ rondjes, dus 16 keer.

c. Rt^2, de snelheid is (differentiëren): $2Rt$.

d. Met differentiëren: $\begin{pmatrix} -2Rt\sin t^2 \\ 2Rt\cos t^2 \end{pmatrix}$

Met behulp van **c**: de snelheidsvector staat loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}$, is dus een (positief) veelvoud van $\begin{pmatrix} -\sin t^2 \\ \cos t^2 \end{pmatrix}$**.** De lengte van $\begin{pmatrix} -\sin t^2 \\ \cos t^2 \end{pmatrix}$ is 1 en de grootte (volgens **c**): $2Rt$ dus de snelheidsvector is: $2Rt \cdot \begin{pmatrix} -\sin t^2 \\ \cos t^2 \end{pmatrix}$.

5 **a.** $\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} + \frac{t^4-2t^2+1}{(t^2+1)^2} =$

$\frac{t^4+2t^2+1}{(t^2+1)^2} = 1$

b. De x-component van de snelheidsvector is: $\frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2}$

en de y-component van de snelheidsvector is: $\frac{4t}{(t^2+1)^2}$.

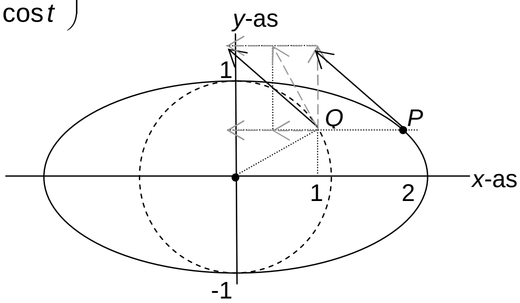
En: $\frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} + \frac{4t}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{t^2-1}{t^2+1} = 0$.

Het kan ook met minder gereken: in **a** hebben we gezien dat: $x^2 + y^2 = 1$. Differentiëren naar t geeft volgens de kettingregel: $2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 0$ **.**

6 **a.** Ellips met horizontale as het lijnstuk met eindpunten (2,0) en (-2,0) en verticale as het lijnstuk met eindpunten (0,1) en (0,-1).

b. $\begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

c.



Toelichting. Q is het punt op tijdstip t volgens de standaard cirkelbeweging. De snelheidsvector in Q is ontbonden in zijn horizontale en verticale component. De snelheidsvector in P heeft dezelfde verticale component en een horizontale component die twee keer zo groot is.
In het onderste en bovenste punt.

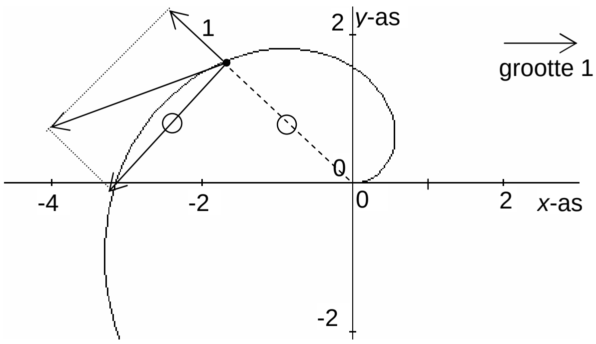
d. $v^2 = 4\sin^2 t + \cos^2 t = 4\sin^2 t + 1 - \sin^2 t = 1 + 3\sin^2 t$.
$1 + 3\sin^2 t$ is maximaal als $\sin^2 t = 1 \Leftrightarrow \sin t = 1$ of $\sin t = -1$, dus in de punten (0,1) en (0,-1).

7 **a.** $\begin{pmatrix} -t\sin t + \cos t \\ t\cos t + \sin t \end{pmatrix}$

b. radieel: $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, tangentieel: $t \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

c. Radiële snelheid is 1 en de tangentiële snelheid is t.

d.



8 **a.** De versnellingsvector is: $\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, is tegengesteld aan $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

b. De versnellingsvector is: $\begin{pmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \end{pmatrix}$, grootte: R.

c. Versnellingsvector $= \begin{pmatrix} -Ra^2 \cos at \\ -Ra^2 \sin at \end{pmatrix}$, de grootte is $|Ra^2|$

d. $v^2 = |Ra|^2 = |Ra|^2 \cdot R$, klopt dus.

9 (0,10t), valversnelling

10 a. Omdat punten (x,y) op de cirkel voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.
b. Volgt uit de somregel en de kettingregel.
c. Hun inproduct is 0.

11 a. Sinus en cosinus (dus $p = q = 1$) nemen tussen 0 en 2π de waarden tussen -1 en 1 twee keer aan. Als p en q groter zijn, nog vaker. Er zij uitzonderingen, zie bijvoorbeeld de eerste twee figuren.

b. De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin t \end{pmatrix}$. Het punt is in $O(0,0)$ als $t = \frac{1}{2}\pi$ en als $t = 1\frac{1}{2}\pi$. De snelheidsvectoren zijn dan $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Als er verticaal met a vermenigvuldigd wordt, krijg je de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -a \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ a \end{pmatrix}$. Deze vectoren moeten 45° met de x-as maken, dat gebeurt voor $a = 2$ (voor $a = -2$ vallen ze samen).

c. De gevraagde hoek noemen we α.
Als $q = 2$, gaat het punt door $(0,-\frac{1}{2})$ voor $t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = 1\frac{1}{3}\pi$.
De snelheidsvector op tijdstip t is: $\begin{pmatrix} 3\cos 3t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$. De snelheidsvectoren zijn dan $\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ als $t = \frac{2}{3}\pi$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ als $t = 1\frac{1}{3}\pi$. Dan $\cos\alpha = \frac{3 \cdot 3 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{9+3} = \frac{1}{2}$ en $\alpha = 60°$.
Als $q = 4$, is de snelheidsvector $\begin{pmatrix} 4\cos 4t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$. De snelheidsvectoren zijn dan $\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ als $t = \frac{2}{3}\pi$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ als $t = 1\frac{1}{3}\pi$.
Dan $\cos\alpha = \frac{-2 \cdot -2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4+3} = \frac{1}{7}$ en $\alpha \approx 82°$.

e. $v = \sqrt{p^2 \cos^2 pt + q^2 \sin^2 qt}$

f. In punten waar de kromme niet vloeiend gesloten is, is de snelheid 0.

12 b. Voor oneven waarden van q, want $\cos k \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$ als k oneven is.

c. Als $-1 \le x \le 1$, dan $\cos t = x$ voor precies twee waarden van t tussen 0 en 2π. Als de een, zeg maar α is, dan is de ander $2\pi - \alpha$ en $\cos q(2\pi - \alpha) = \cos q\alpha$.

d. De snelheidsvector is: $\begin{pmatrix} \sin t \\ q \sin q t \end{pmatrix}$. De helling op tijdstip t is: $\dfrac{q \sin q t}{\sin t}$. Dus de helling is $q \sin q \cdot \frac{1}{2}\pi$ als $t = \frac{1}{2}\pi$.

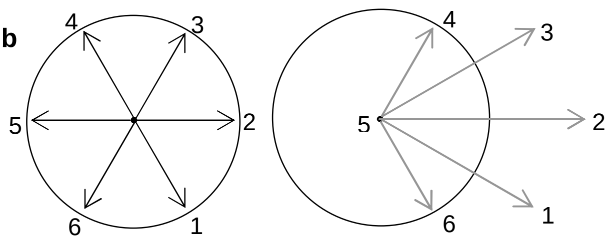
Dus q als $q =$ viervoud + 1 en $-q$ als $q =$ viervoud + 3.

f. Als $q = 2$: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, dus $f(x) = 2x^2 - 1$.
Als $q = 3$, dan $\cos 3t = \cos 2t \cdot \cos t - \sin 2t \cdot \sin t =$
$(2\cos^2 t - 1) \cdot \cos t - 2\sin t \cdot \cos t \cdot \sin t =$
$2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t \cdot (1 - \cos^2 t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$, dus $f(x) = 4x^3 - 3x$.

g. $\cos 4t = 2\cos^2 2t - 1 = 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1 =$
$8\cos^4 t - 8\cos^2 t - 3$, dus $f(x) = 8x^4 - 8x^2 - 3$

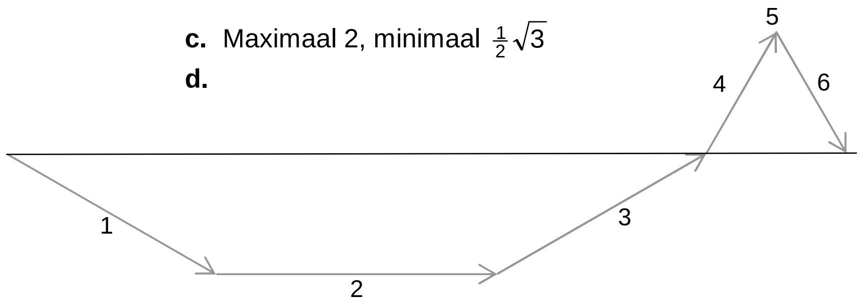
Paragraaf 3 Samengestelde bewegingen

1 **a, b**

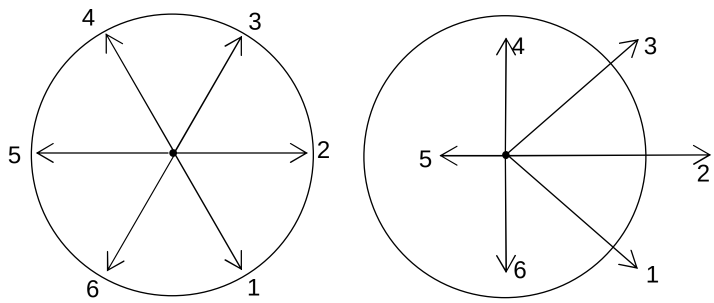


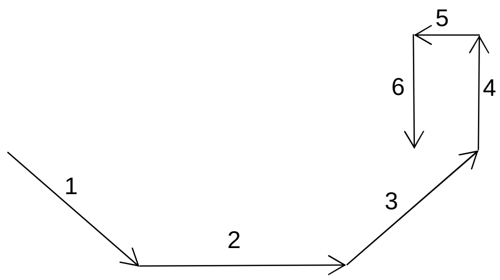
c. Maximaal 2, minimaal $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

d.



e. (Andere schaal dan in **a**)

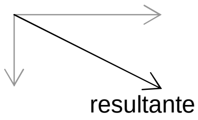




f. Ja, tijdens de 5de seconde, zie hierboven.

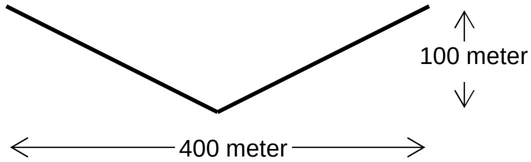
2 **a.** Ja, ja

b. Richting $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als je de positieve x-as in westelijke en de positieve y-as in noordelijke richting kiest. De snelheid is 5 m/s.



c. 100 sec

d.



e. Ja, als de zwemmer midden op de rivier is, heeft hij 100 meter in westelijke richting afgelegd en het takje ook. Op de terugweg komen ze elkaar ook weer tegen.

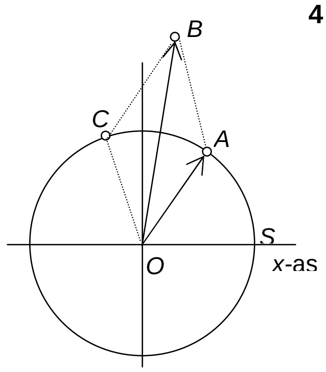
3 **a.** Nee, nee

b. 100 sec

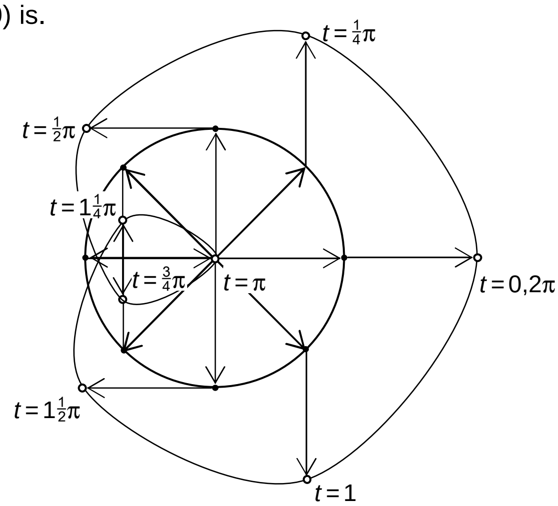
c.

d. Nee, op de heenweg heeft de kaaiman een ‘voorsprong’ op de zwemmer als die op het midden van de rivier komt. Op de terugweg is die voorsprong nog groter.

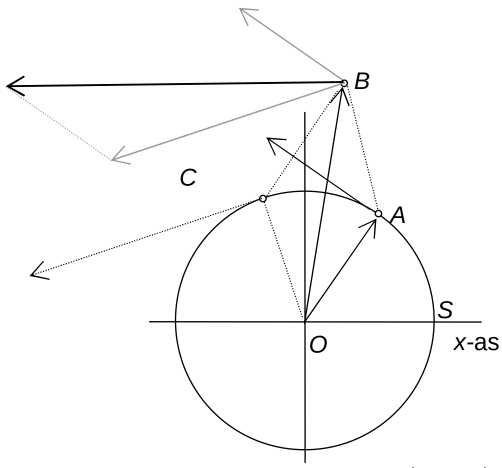
4 **a.** Boog CA moet even lang zijn als boog AS, waarbij $S(1,0)$ is.



b.



4 e.

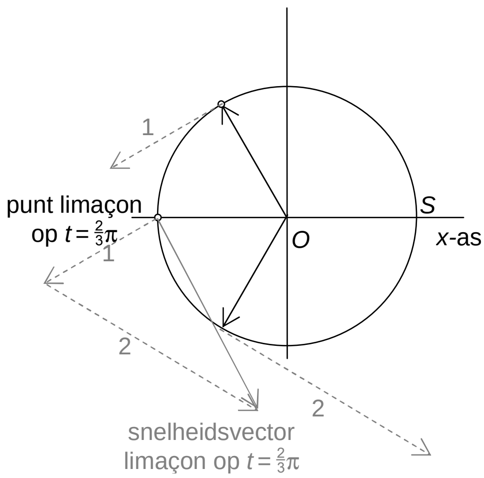


f. De snelheidsvector aan de eenheidscirkel is $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De andere is: $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, de somvector is dan $\begin{pmatrix} -1\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

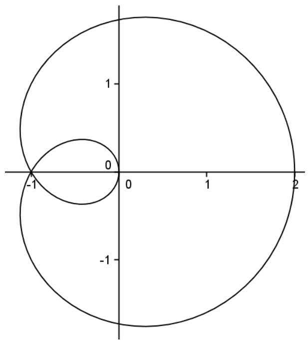
$\cos\alpha = \dfrac{-1\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1 + 0}{1\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{3}{14}\sqrt{3}$ als α de gevraagde hoek.

g.



snelheidsvector 1: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en snelheidsvector 2: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

De somvector is $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, deze vector is $\sqrt{3}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ maakt een hoek van 60° met de *x*-as.



5 **a.** $(x,y) = (\cos t + \cos 2t, \sin t + \sin 2t)$

b. Met de x-as: $\sin t + \sin 2t = 0 \Leftrightarrow \sin -t = \sin 2t \Leftrightarrow$
$-t = 2t + k \cdot 2\pi$ of $-t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of
$t = \pi + k \cdot 2\pi$.
$t = 0$ geeft: (2,0), $t = \frac{2}{3}\pi$ geeft: (-1,0), $t = 1\frac{1}{3}\pi$ geeft: (-1,0)
$t = \pi$ geeft: (0,0)
Met de y-as: $\cos t + \cos 2t = 0 \Leftrightarrow \cos(t + \pi) = \cos 2t \Leftrightarrow$
$t + \pi = 2t + k \cdot 2\pi$ of $t + \pi = -2t + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \pi + k \cdot 2\pi$ of
$t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
$t = \pi$ geeft: (0,0), $t = \frac{1}{3}\pi$ geeft: $(0, \sqrt{3})$, $t = 1\frac{2}{3}\pi$ geeft:
$(0, -\sqrt{3})$.

In O is de snelheidsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus in O snijdt hij de x-as loodrecht (raakt de y-as).

In (-1,0) is de snelheidsvector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, in beide gevallen is de hoek 60° want

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\left|\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}$, dus

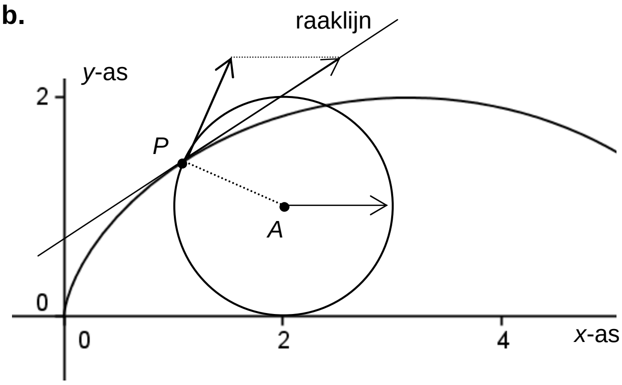
$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ en $\alpha = 60°$ (α de hoek met de x-as).

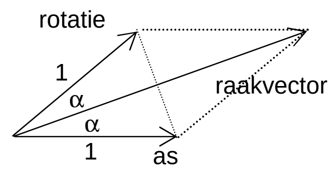
In (2,0) is de snelheidsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus in O snijdt hij de x-as loodrecht.

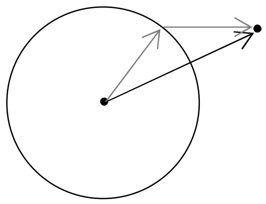
7 **a.** $\vec{0}$, want de snelheidsvector tgv de rotatie is $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en tgv de voortgang van de as $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, want de snelheidsvector tgv de rotatie is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8 **a,b.**







c. De snelheidsvectoren bij de voortbeweging van de as en de rotatie hebben beide lengte 1, dus het parallellogram bij de optelling van die vectoren is een ruit. Er geldt: de lengte van de raakvector is $2\cos\alpha = 1$, dus $\alpha = 60°$. Dus de lijn *AP* maakt een hoek van 30° met de lijn waarover de as beweegt en *P* ligt onder die lijn. De hoogte is $\frac{1}{2}$.

d. Elke vector vanuit *O* met lengte 1, kan optreden als snelheidsvector tgv rotatie. Bij deze vectoren moet de vector (1,0) opgeteld worden. Je krijgt dus alle mogelijke vectoren vanuit *O* met eindpunt op de over (1,0) verschoven eenheidscirkel, dus de eindpunten liggen op de cirkel met straal 1 en middelpunt (1,0).

e. Nagenoeg verticaal omlaag en weer nagenoeg verticaal omhoog.

9 **a.** $(x,y) = (\text{-}\sin t, \text{-}\cos t)$

b. $(x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

c. Rechter plaatje

10 **a.** $PA = QA$, $\angle SPA = \angle SQA$ en $SA = SA$ (ZZR)

b. Uit **a** volgt dat $SP = SQ$, dus driehoek *SPQ* is gelijkbenig.

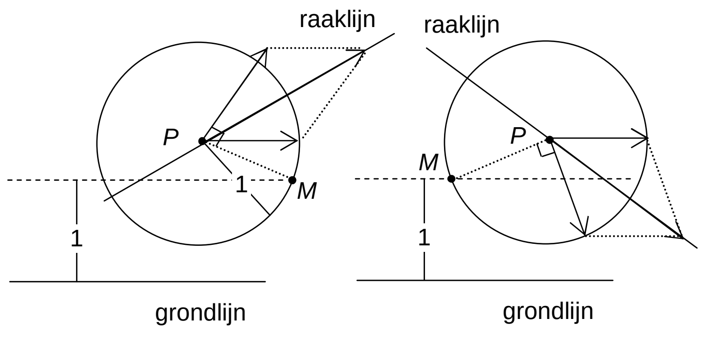
c. Dit volgt uit **b** en het feit dat $\angle SQP = \angle QPX$, waarbij *X* een punt op *k* is, ‘rechts’ van *P*, Z-hoeken.

d. Zie **8c**.

11 **a.** Het laagste punt

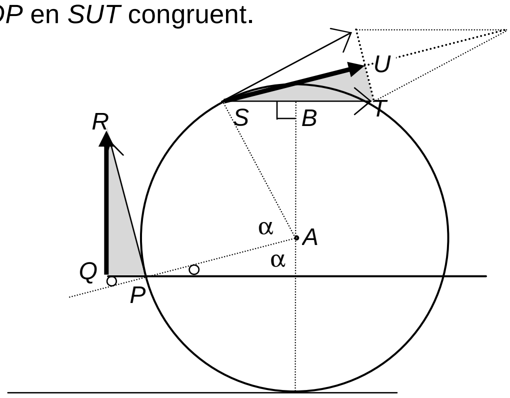
b. De raaklijn in *P* staat dan loodrecht op *PX*, dus hoek *XPQ* is recht, dus *P* ligt op de cirkel met *XQ* als middellijn (Thales).

12 **a,b.** De cirkel met straal 1 en middelpunt *P* snijdt de stippellijn in twee punten. Het snijpunt dat ‘links’ van *P* ligt is het middelpunt van de rolcirkel als *P* omhoog beweegt. Als *P* omlaag beweegt is het ‘rechtse’ snijpunt het middelpunt van de rolcirkel. Voor de rest, zie figuur



13 a. Omdat de snelheidsvector van *A* geen bijdrage levert aan de verticale component, die is nl horizontaal.

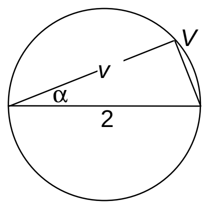
b. Zie plaatje. Vanwege de twee gelijke hoeken o, is $\angle RPQ = \alpha$. Verder $\angle BAS = 180 - 2\alpha$, dus $\angle ASB = 2\alpha - 90$ en dus $\angle UST = \alpha$. Omdat $SU = RQ$, zie **a**, zijn de driehoeken *RQP* en *SUT* congruent.



c. $\dfrac{2}{\pi}$

d. Vanwege symmetrie

e. 4, 8



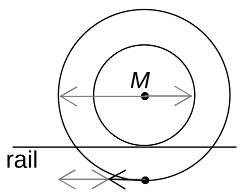
14 a. 2

b. De hoek in *V* is recht (stelling van Thales), dus $v = 2\cos\alpha$

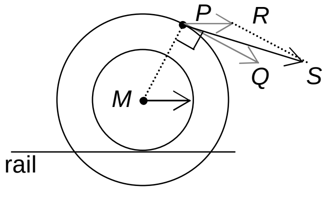
c. $\frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot 2\sin\alpha \Big|_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{\pi}$

d. $2\pi \cdot \dfrac{4}{\pi} = 8$

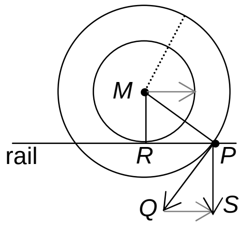
Paragraaf 4 Extra Opgaven



1 a. Twee horizontale vectoren, één in de rijrichting, met als grootte de straal van de kleine cirkel en één tegengesteld gericht met als grootte de straal van de grote cirkel.



b. Zie plaatje, $\overrightarrow{PR}$ is de snelheidsvector van de trein. *PQ* staat loodrecht op *PM* en is even lang. De snelheidsvector van *P* is $\overrightarrow{PS}$.



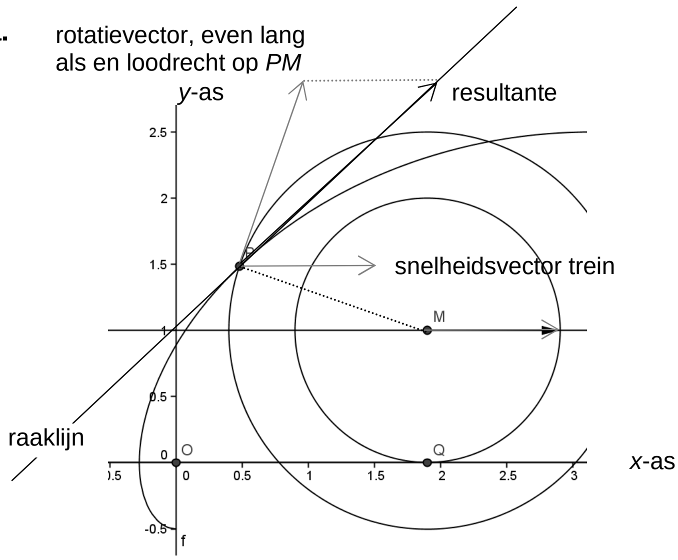
c. In de snijpunten met de rail. Als je de driehoek *MPR* een kwartslag draait, krijg je driehoek *QSP*.

2 **a.** $(x,y)=(t-1\frac{1}{2}\sin t, 1-1\frac{1}{2}\cos t)$

b. $\begin{pmatrix} 1-1\frac{1}{2}\cos t \\ 1\frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}$

c. Voor de tijdstippen *t* dat *P* op de *x*-as is geldt: $1-1\frac{1}{2}\cos t=0$ en dat is de *x*-component van de snelheidsvector, die is dus op die tijdstippen verticaal gericht.

3 **a.**

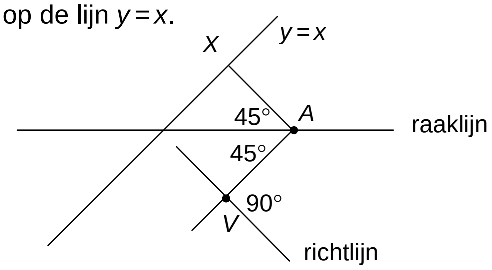


b. *PQ* staat loodrecht op de raaklijn.

4 **a.** Als je op tijdstip *t* in (*x*,*y*) bent, dan op tijdstip -*t* in (*y*,*x*).

b. De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$. De raaklijn is horizontaal als $2t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$, dus in (3,-1).

c. *V* is het voetpunt van *A* op de richtlijn en *X* de projectie van *A* op de lijn $y=x$.



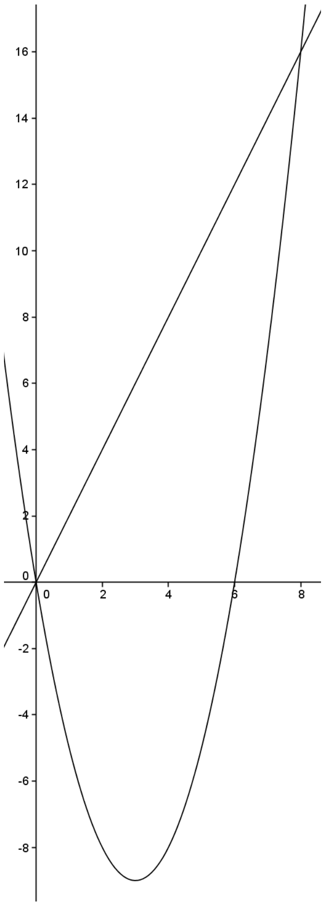
Dit is de symmetrieas van de parabool, dus daarop ligt het brandpunt. Maar het brandpunt ligt ook op de lijn die dezelfde hoek met raaklijn maakt als lijn AV, dus een hoek van 45° met de lijn $y = -1$, die dus loodrecht staat op de lijn staat op de lijn $y = x$. Dsu X is het brandpunt.
De lijn door (1,1) en (3,-1) heeft een richtingsvector die loodrecht op de lijn $y = x$ staat, dus het brandpunt is (1,1).
De richtlijn staat loodrecht op de lijn $y = x$ en gaat door (-1,-1) heeft dus vergelijking $x + y = -2$.
d. Lijn door $P(t^2 - 2t, t^2 + 2t)$ loodrecht op de lijn $x + y + 2 = 0$ heeft vergelijking $x - y = t^2 - 2t - (t^2 + 2t) = -4t$.
De lijn $x + y + 2 = 0$ snijden met $x - y = -4t$ geeft snijpunt $(-2t - 1, 2t - 1)$. Het kwadraat van de afstand van dit snijpunt tot P is $2(t^2 + 1)^2 = 2t^4 + 4t^2 + 2$
Het kwadraat van de afstand van A tot (1,1) is:
$(t^2 - 2t - 1)^2 + (t^2 + 2t - 1)^2 = 2t^4 + 4t^2 + 2$.
Klopt.

5 **a.** De x-as is symmetrie-as van de baan.
b. $\sqrt{(t^2-4)^2 + (4t)^2} = \sqrt{t^4 - 4t^2 + 16}$
c. Dan moet $t^4 - 4t^2 + 16 = (t^2 - 2)^2 + 12$ minmaal zijn, dat is zo als $t = \sqrt{2}$ of $t = -\sqrt{2}$. De bijbehorende punten zijn: $(-2, 2\sqrt{2})$ en $(-2, -2\sqrt{2})$.
d. De snelheidsvector is $\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$, in A dus $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ en het inproduct $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$.

6 **a.** $t = 0$
b. $3 \cdot 2\pi + \frac{1}{6}\pi$
c. De snelheidsvector op tijdstip t is:
$\begin{pmatrix} 1{,}2^t \cdot \ln 1{,}2 \cdot \cos t - 1{,}2^t \cdot \sin t \\ 1{,}2^t \cdot \ln 1{,}2 \cdot \sin t + 1{,}2^t \cdot \cos t \end{pmatrix}$
d. $1{,}2^t \cdot \ln 1{,}2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + 1{,}2^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ hebben lengte 1, dus de verhouding van de twee is $\dfrac{1{,}2^t \cdot \ln 1{,}2}{1{,}2^t} = \ln 1{,}2$.

7 **a.**

b. Een vergelijking van de baan van P is: $y = 2x$. Q komt op die baan als: $t^2 - 9 = 2(t+3) \Leftrightarrow t = -3$ of $t = 5$.
Op $t = -3$ is Q in (0,0) en op $t = 5$ in (8,16).



c. De afstand van P tot Q is:

$$\sqrt{(t-3-(t+3))^2 + (2t-6-(t^2-9))^2} = \sqrt{36 + ((t^2-2t-3))^2}$$

Dit is minimaal als $t^2 - 2t - 3$ minimaal si, dit is als $t = 1$.

De afstand is dan: $2\sqrt{13}$.

Dan moet R op bijvoorbeeld $t = -3$ in O zijn. Bijvoorbeeld: $(x,y) = (t+3, 2t+6)$.