Veranderingen van functies

'groei'snelheden

Deel 2

Inhoudsopgave

WB geeft aan dat er een werkblad bij die opgave hoort.

⌛ geeft aan welke centrale vraag in het komende stukje wordt behandeld.

✋ geeft aan dat de centrale vraag van het voorgaande wordt beantwoord.

✚ geeft aan dat dit een extra opgave is die niet noodzakelijk is voor de opbouw.

Experimentele uitgave voor Differentiëren, vwo, wiskunde A

versie 1 (juli 2011)

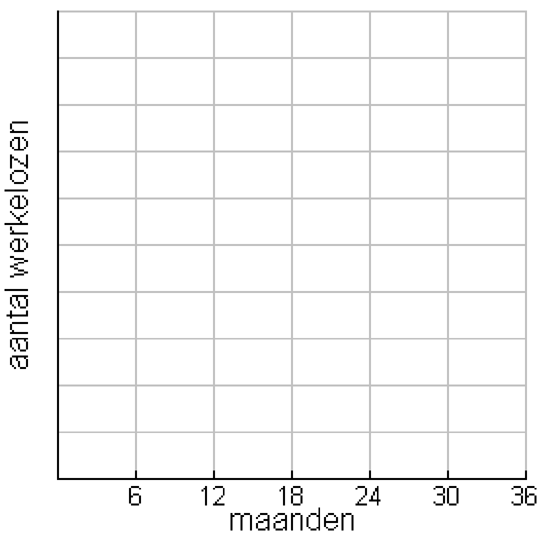
auteurs: Leon van den Broek, Peter Kop

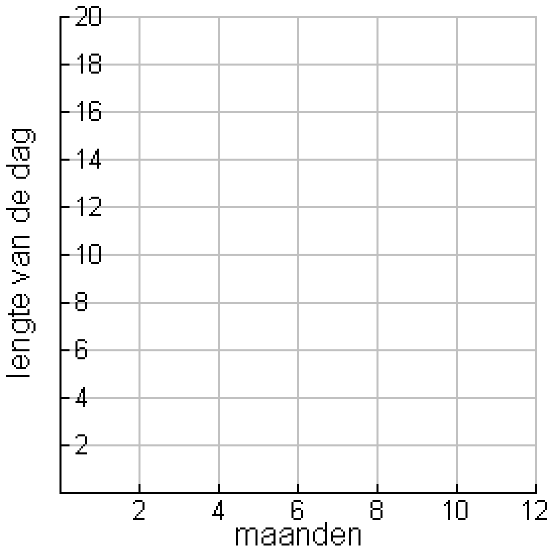
met medewerking van: Hielke Peereboom, Piet Versnel

9. Herhaling en uitbreiding van afgeleide van 2^e- en 3^egraadsfuncties

Een grootheid *B* is afhankelijk van *x*. Bijvoorbeeld is *B* het aantal bewoners van een zeker gebied, en stelt *x* de tijd voor in jaren. Of *B* is de opbrengst van een product, afhankelijk van het aantal geproduceerde exemplaren *x*.
Behalve de *grootte* van *B* bij gegeven waarden van *x*, is ook de *ontwikkeling* van *B* interessant. Hoe verandert *B* als *x* verandert? Neemt *B* toe of af? En is er sprake van toenemende stijging/daling of afnemende stijging/daling?

WB Opgave 1
Het aantal werklozen stijgt nu minder snel dan vorig jaar. Maar voor volgend jaar wordt weer een versterkte groei van het aantal werklozen voorzien.
a. Schets op grond van deze gegevens een mogelijke globale grafiek van het aantal werklozen gedurende deze 36 maanden (het tijdsbestek van vorig jaar, dit jaar en volgend jaar).





Op 21 december is de kortste dag van het jaar, op 21 juni de langste. Op 21 maart lengt de dag het sterkst, op 21 september krimpt de dag het sterkst.
b. Schets op grond van deze gegevens een grafiek van de daglengte in de loop van een jaar.

Bepaling van groeisnelheid (herhaling)

We gaan verder met een grootheid B, als functie van x. We hebben op verschillende manieren leren zien wat de *groeisnelheid* van B is, bijvoorbeeld op moment $x = 3$:

- De afgeleide van B *in* $x = 3$; met notatie $B'(3)$ of $\frac{dB}{dx}$ in $x = 3$
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van B in het punt met $x = 3$
- De helling van de grafiek in het punt met $x = 3$
- Via een rekenschema:

begin	$x = 3$	$\rightarrow$	$B(3)$
eind	$\underline{x = 3{,}01}$	$\rightarrow$	$\underline{B(3{,}01)}$
toename	$\Delta x = 0{,}01$		$\Delta B = B(3{,}01) - B(3)$
gemiddelde toename	$\frac{\Delta B}{\Delta x} = \frac{B(3{,}01) - B(3)}{0{,}01}$		

  Algemeen vinden we $\frac{\Delta B}{\Delta x} = \frac{B(3+\Delta x) - B(3)}{\Delta x}$; deze benadering is des te beter, naarmate Δx dichter bij 0 ligt. (Maar Δx kan niet gelijk aan 0 worden gekozen.)

- Hoeveel keer zo snel B toeneemt als x, op moment $x = 3$
- Door de formule van B te differentiëren
- Op de GR

Toelichting

Als je een grafiek hebt, kun je (zo goed mogelijk) de raaklijn tekenen en daarvan de richtingscoëfficiënt (weer zo goed mogelijk) meten.

Als je een formule voor B(x) hebt, kun je door voor Δx een kleine waarde te nemen, het differentiequotiënt $\frac{\Delta B}{\Delta x}$ berekenen; hoe kleiner Δx des te nauwkeuriger benader je de groeisnelheid.

We kennen de afgeleide van $y = cx+d$, van $y = x^2$ en van $y = x^3$.

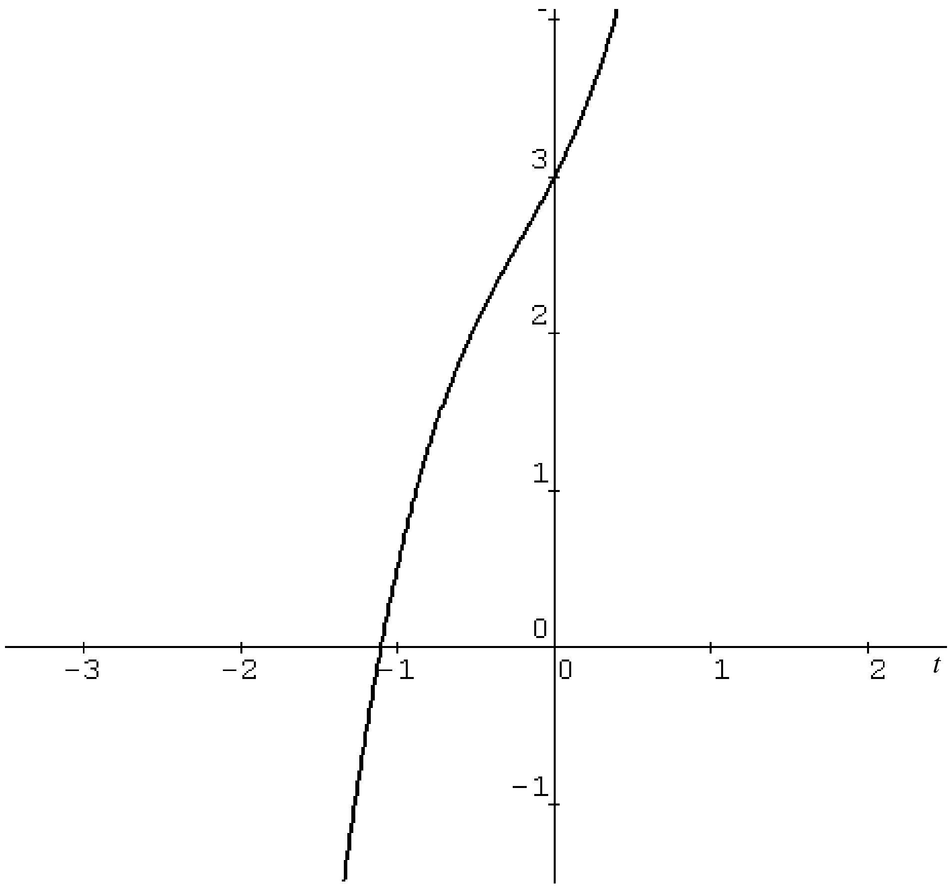
Bovendien weten we dat:

- als we bij een functie een constante optellen, de afgeleide hetzelfde blijft.
- als we een functie met een constante vermenigvuldigen, wordt de afgeleide ook met die constante vermenigvuldigd,
- als we twee functies optellen, worden hun afgeleides ook opgeteld.

Omdat een functie als $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$, *een combinatie is van* $y = cx+d$, $y = x^2$ en van $y = x^3$, kunnen we ook deze functie differentiëren. De afgeleide is: $y' = a \cdot 3x^2 + b \cdot 2x + c$.

⌛ *Centrale vraag: Op welke verschillende manieren kun je de groeisnelheid van de functie op een bepaald moment bepalen?*

Opgave 2
Hieronder staat de grafiek van $B(t) = 3 + 2t + t^2 + 1{,}5t^3$ in de buurt van $t = -1$.



a. Vind $B'(-1)$ door te meten in de figuur.
b. Vind $B'(-1)$ door een kleine waarde voor Δt te nemen en met de formule te rekenen.
c. Vind $B'(-1)$ door differentiëren.

Opgave 3
Gegeven is de functie $y(x) = x^3 \cdot 2^{-x}$.
Bepaal $y'(4)$ op drie verschillende manieren.

⌛ *Centrale vraag: Hoe benader je functiewaarden met behulp van een gegeven punt en de groeisnelheid in dat punt?*

Opgave 4

Om 10 uur 's ochtends is de luchttemperauur 15 °C en loopt hij snel op: per minuut komt er 0,05 °C bij. Om schattingen van de luchttemperatuur rond 10 uur te maken, nemen we aan dat de groeisnelheid niet verandert.

Bereken onder wat de luchttemperatuur om 10:30 uur zal zijn? En om 9:50 uur?

Opgave 5

$B(t)$ is de omvang van de Nederlandse bevolking op tijdstip t. We rekenen B in duizenden en t in jaren sinds 1 januari 2000.

$B(0) = 15864{,}0$ en $B'(0) = 103{,}8$.

a. Hoe groot was de Nederlandse bevolking ongeveer op 1 februari 2010?
b. Wanneer ongeveer telde de Nederlandse bevolking 15,900 miljoen mensen?
c. Maak een formule voor $B(t)$, als je aanneemt dat de groeisnelheid gelijk blijft.

Opgave 6

Stel dat je van een functie y weet: $y(5) = 90$ en $y'(5) = -2$.

a. Benader hiermee $y(5{,}4) = 90$. [Met $y(5{,}4)$ bedoelen we de y-waarde die hoort bij $x = 5{,}4$.]

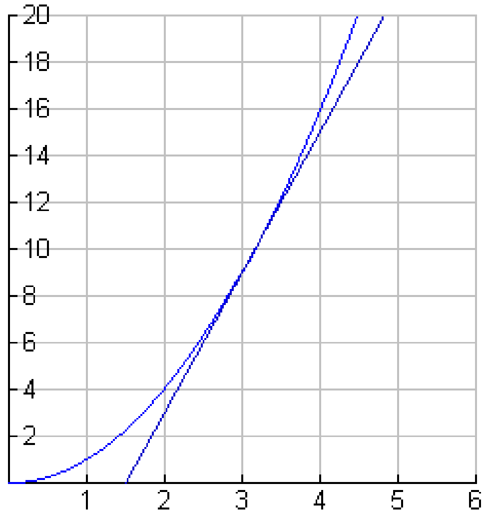
Als we aannemen dat de groeisnelheid constant blijft, kan de grafiek van y benaderd worden door een rechte lijn.

b. Stel een formule op voor deze lijn.

Opgave 7

Hiernaast zie je de raaklijn aan de grafiek van $y(x) = x^2$ getekend in $x = 3$

a. Toon met een berekening aan dat geldt:
   $y(3) = 9$ en $y'(3) = 6$.
b. Stel de formule van deze raaklijn op.



Opgave 8

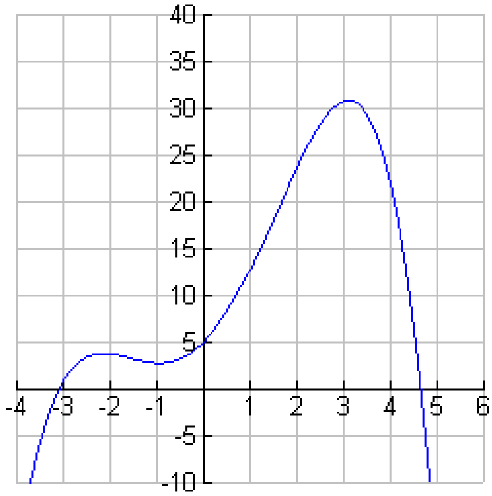
$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x$. Het punt (2,5) ligt op de grafiek van deze functie.

Demonstreer hoe je eerst de groeisnelheid in $x = 2$ berekent en vervolgens een formule van de raaklijn in het punt (2,5) kunt opstellen.

⌛ *Centrale vraag: welke informatie over een functie lees je af uit de grafiek van de afgeleide van die functie?*

Opgave 9

Hiernaast staat de grafiek van een functie $y(x)$.



a. Lees nauwkeurig af hoe groot $y'(-1{,}5)$ en $y'(1{,}5)$ zijn?

Een andere functie is gegeven door de formule $y(x) = 2{,}2x + 6$.

b. Wat is $y'(3)$? En wat is $y'(-3)$?

Van een functie $y(x)$ is gegeven:

$y'(2) = 0$ en $y'(4) = 0$.

c. Kan dat?

d. Wat weet je van $y'(3)$?

Opgave 10

Schets de grafiek van een functie f die voldoet aan de volgende eisen:

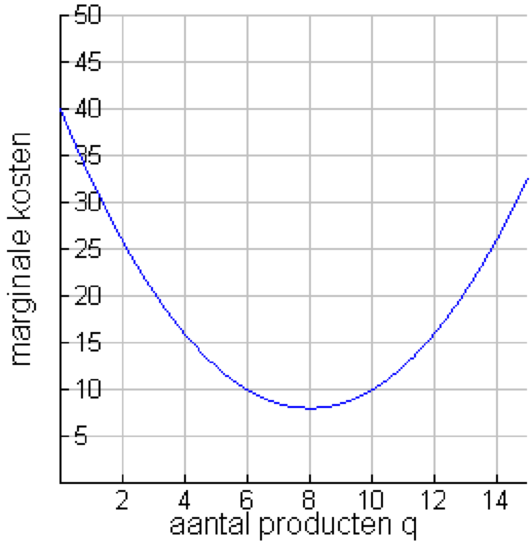
$x \leq 1: f'(x) < 0$

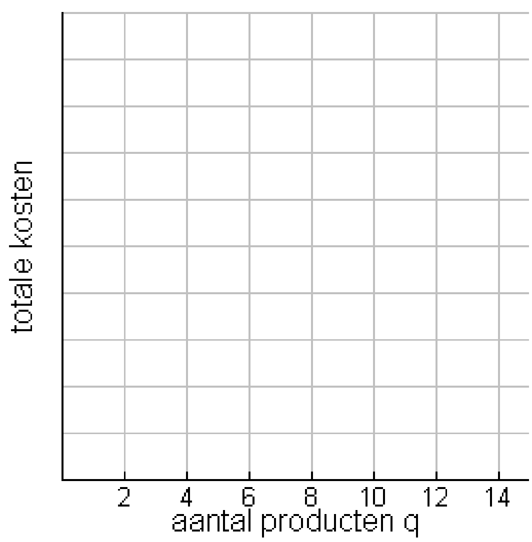
$1 \leq x \leq 3: f'(x) > 0$

$x \geq 3: f'(x) < 0$

WB Opgave 11

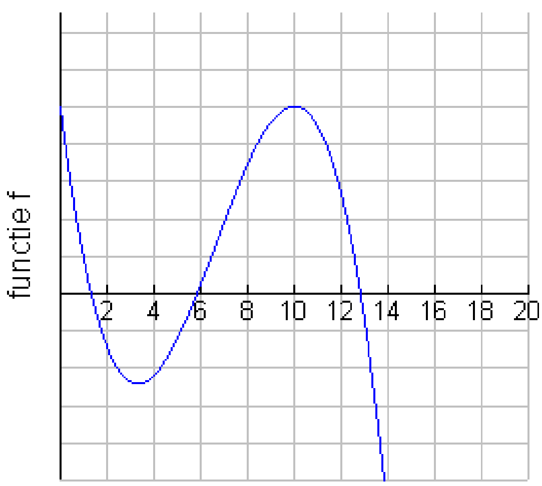
Zoals je je misschien herinnert gebruikt men in de economie het begrip marginale opbrengst, marginale kosten en marginale winst; deze worden berekend met de afgeleide van respectievelijk de totale opbrengst, de totale kosten en de winst. Anders gezegd: de marginale opbrengst is de groeisnelheid van de totale opbrengst. Evenzo de marginale kosten en de marginale winst. Hieronder zie je links de grafiek van de marginale kosten van een productie.

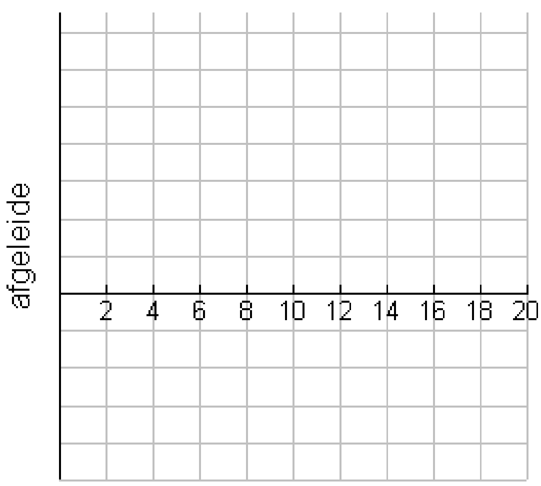


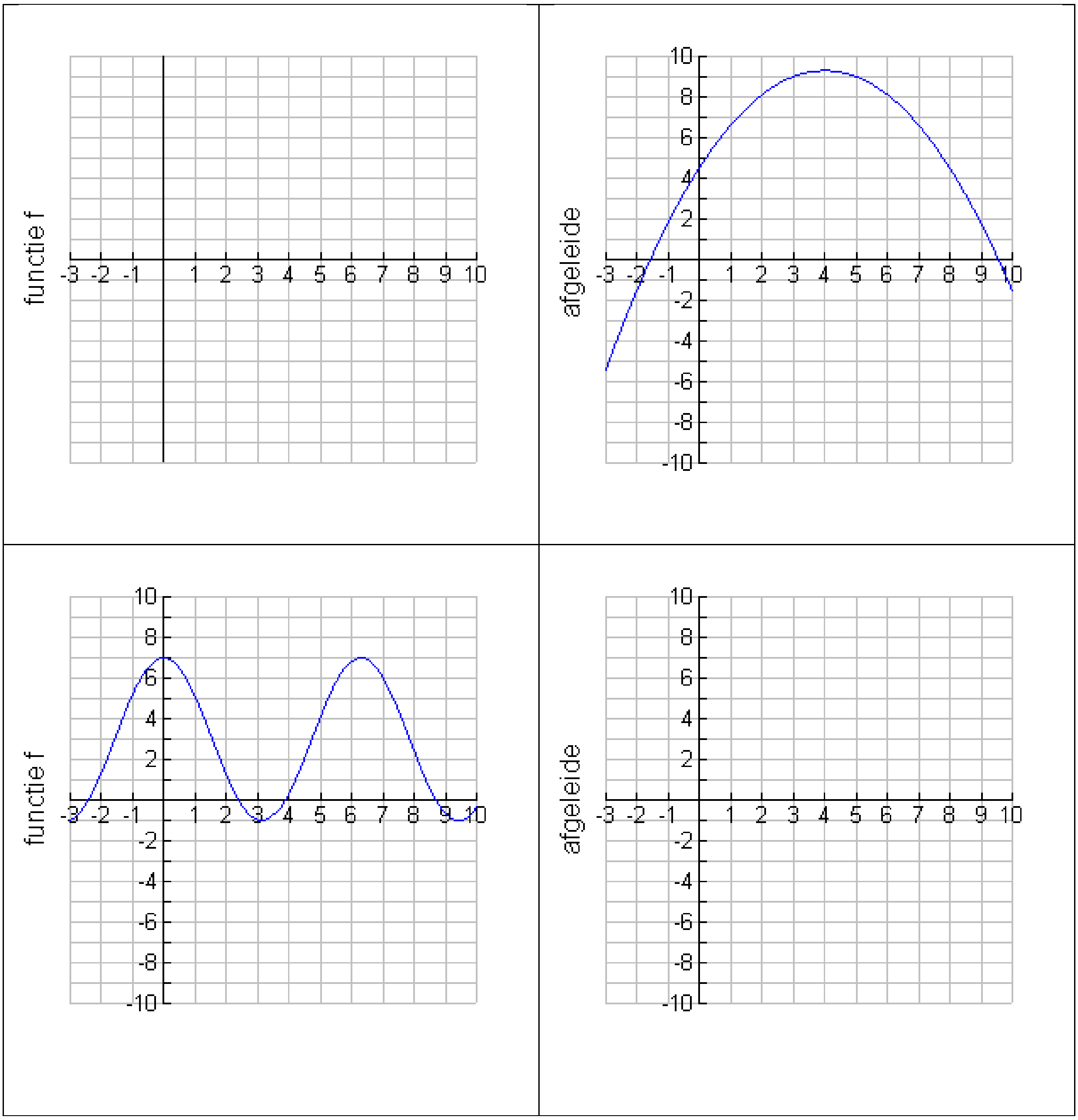


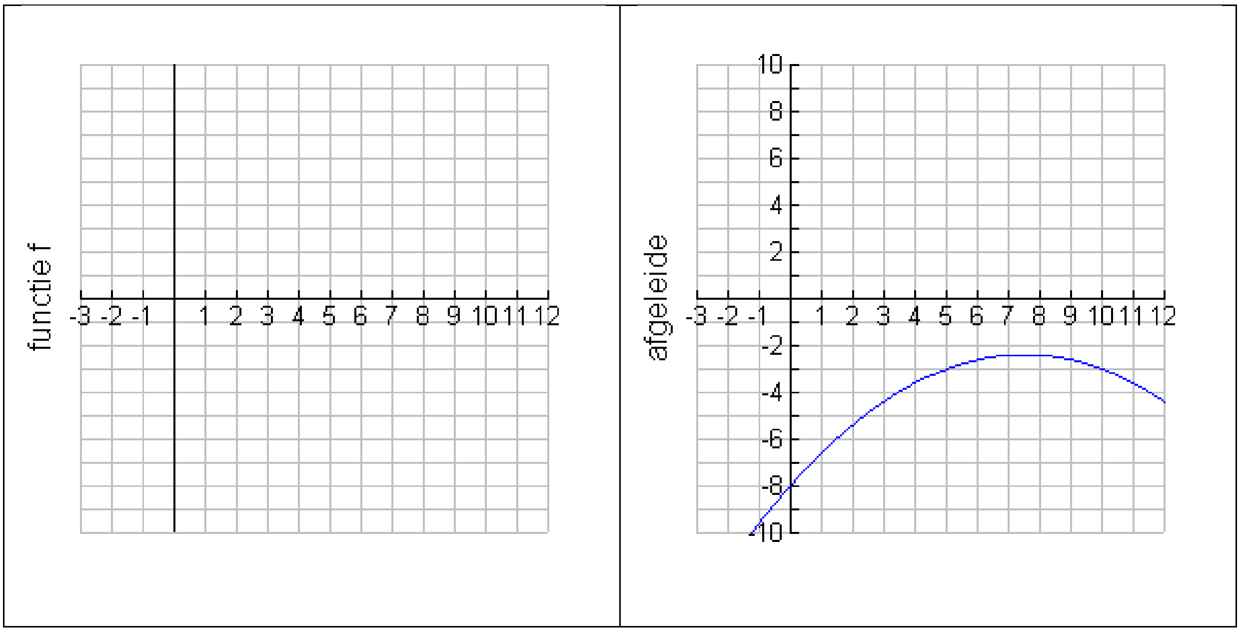
De vaste kosten (kosten bij $q = 0$) zijn 10.
Schets op het werkblad de grafiek van de totale kosten.

WB Opgave 12
Als de grafiek van de functie gegeven is, schets dan een grafiek van de afgeleide.
Als de grafiek van de afgeleide gegeven is, schets dan een grafiek van de functie (kies dan steeds $y(0) = 0$).






functie f
afgeleide
functie f
afgeleide



Opgave 13
Schets voor de volgende situaties een grafiek van de functie en een grafiek van de afgeleide in twee aparte figuren

a. De functie y is afnemend dalend.
b. De functie y is afnemend stijgend voor $x \leq 5$ en toenemend dalend voor $x > 5$

✚ Opgave 14

a. Differentieer de volgende functies
   $y = 6 - 3x$
   $y = x^2 + 2x$
   $y = (x+1)^2$
   $y = x^2(2x+5)$
b. Stel voor elk van deze functies een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in het punt met $x = 0$.

Terugblik

Centrale vraag: Op welke verschillende manieren kun je de groeisnelheid van de functie op een bepaald moment bepalen?

Antwoord:

1) Door de grafiek van de functie te tekenen, in het betreffende punt de raaklijn te tekenen en daarvan de helling te meten.

2) Door de betreffende waarde van x met een kleine Δx te laten toenemen, te berekenen hoeveel y dan toeneemt, en daarmee de gemiddelde toename $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit te rekenen.

3) Door te differentiëren en in de afgeleide functie de betreffende waarde van x in te vullen.

Centrale vraag: Hoe benader je functiewaarden met behulp van een gegeven punt en de groeisnelheid in dat punt?

Antwoord: Neem de functiewaarde in het gegeven punt. Tel daar bij op: de groeisnelheid maal de toename van x.

Centrale vraag: welke informatie over een functie lees je af uit de grafiek van de afgeleide van die functie?

Antwoord: Daar waar de afgeleide positief is, is de functie stijgend,
daar waar de afgeleide negatief is, is de functie dalend,
Daar waar de afgeleide functie overgaat van positief naar negatief, heeft de functie een maximum,
Daar waar de afgeleide functie overgaat van negatief naar positief, heeft de functie een minimum.
Daar waar de afgeleide erg groot (positief) is of erg klein (negatief), loopt de grafiek van de functie erg steil.
Daar waar de afgeleide erg dicht bij nul ligt, loopt de grafiek van de functie erg vlak.

Vooruitblik

Een functie met formule $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$, kunnen we differentiëren. En dat is de snelste en de precieze manier om de groeisnelheid op een willekeurig moment x te vinden. Dat willen we natuurlijk ook bij functies met andere formules kunnen. Bijvoorbeeld bij:

$y = 7x^5 - 2011$

$y = \sqrt{x^2 - x}$

$y = 5^x$

$y = \frac{x}{x^2+4}$

$y = \log(5-x)$

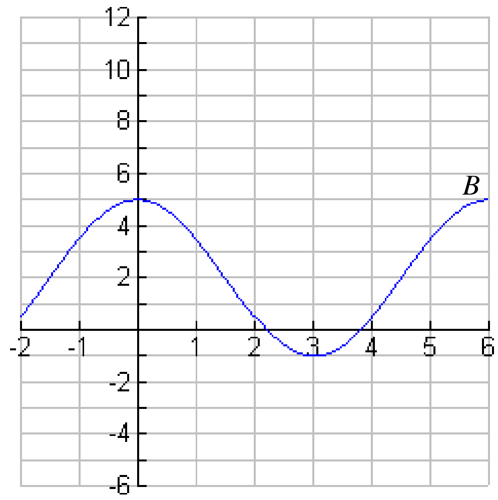
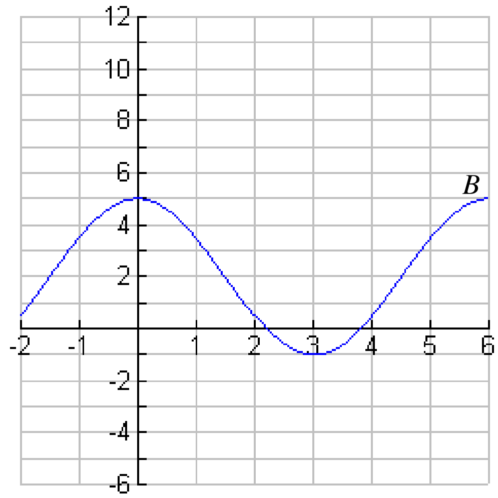
Na dit hoofdstuk kun je al deze functies differentiëren.

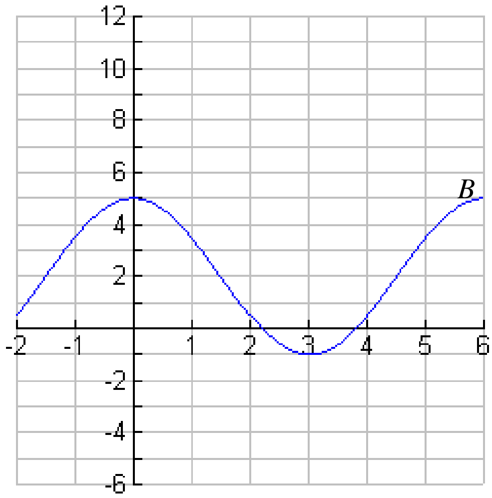
Transformaties en de afgeleide

Centrale vraag: Hoe verandert de afgeleide als je degrafiek van de functie transformeert?

WB Opgave 15

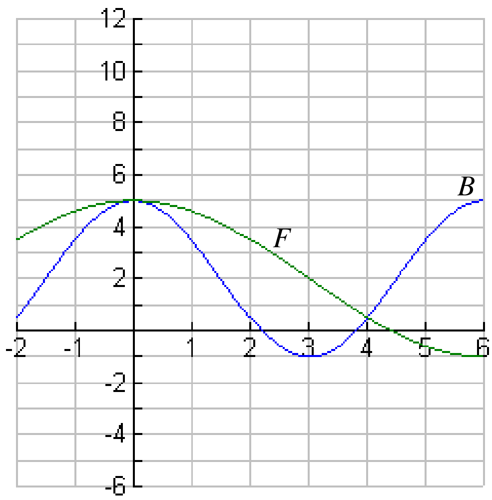
Gegeven is de grafiek van $B(x)$.

<table>
<tr>
<td>De grafiek van B wordt 2 omhoog geschoven: zo ontstaat de grafiek van C.
• Teken de grafiek van C.
• Wat kun je zeggen over $C'(x)$?
• In formuletaal: $C'(x) = \ldots$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>De grafiek van B wordt met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as: zo ontstaat de grafiek van D.
• Teken de grafiek van D.
• Wat kun je zeggen over $D'(x)$?
• In formuletaal: $D'(x) = \ldots$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

De grafiek van B wordt 2 naar rechts geschoven: zo ontstaat de grafiek van E. • Teken de grafiek van E. • Wat kun je zeggen over $E'(x)$? • In formuletaal: $E'(x) = \ldots$	

Nu wordt het lastiger.
De grafiek van B wordt met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as: zo ontstaat de grafiek van F. De grafiek van F is al getekend.

We kiezen het punt van de grafiek van B met $x = 1{,}6$ en bepalen het overeenkomstige punt op de grafiek van F ; dat heeft $x = 3{,}2$.
De groeisnelheid van B in $x = 1{,}6$ is gelijk aan -3,1. Ga dit na in de figuur.



Wat kun je zeggen over de groeisnelheid van F in het overeenkomstige punt met $x = 3{,}2$?

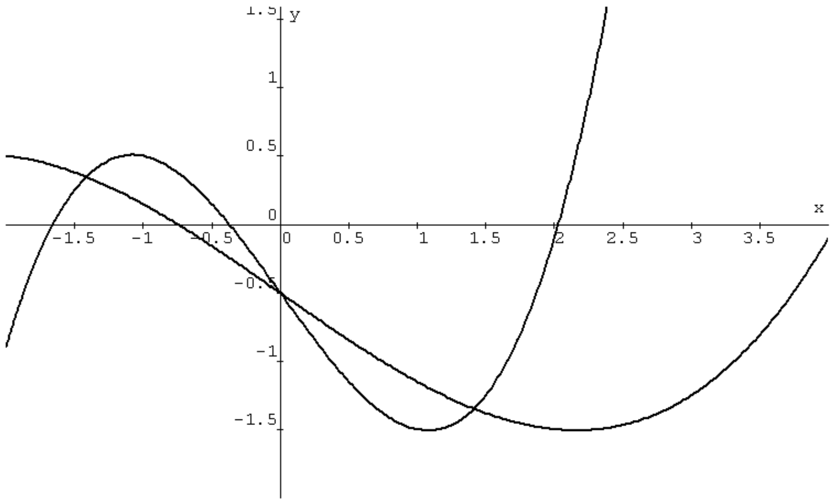
Lees de groeisnelheid van B af en vind daaruit de groeisnelheid van F in het overeenkomstige punt:

Groeisnelheid van B in	Groeisnelheid van F in overeen-komstige punt
$x = 1{,}6$: -3,1	$x = 3{,}2$:
$x = 2$:	$x = 4$:
$x = 2{,}5$:	$x = 5$:
$x = 1$:	$x = \ldots$:

- Wat kun je zeggen over $F'(x)$ ten opzichte van $B'(x)$?
- In formuletaal: $F'(x) = \ldots$

✚ Opgave 16

Hieronder staan de grafieken van $y_1(x)$ en $y_2 = y_1(2x)$.



a. Welke grafiek is die van $y_1(x)$?
b. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit de grafiek van y_1 ?
c. Wat is het verband tussen de hellingen van y_1 en y_2 in $x = 0$?

Op grafiek van y_1 ligt het punt (3 ; -2,5). De helling van de grafiek in dat punt is 1,3.
Het overeenkomstige punt op grafiek van y_2 is (1,5 ; -2,5).
d. Wat is helling van de grafiek van y_2 in dat punt?
e. Wat kun je zeggen over de afgeleide van y_2?

Opgave 17

Van een functie B is gegeven: $B(2) = -1$.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van B in het punt (2,-1) is 1,5.

Bekijk $C(x) = B(x) + 5$
a. Geef aan welke transformatie B overvoert in C; wat is het overeenkomstige punt van de grafiek van C en wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt?

Bekijk $D(x) = 6.B(x)$
b. Geef aan welke transformatie B overvoert in D; wat is het overeenkomstige punt van de grafiek van D en wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt?

Bekijk $E(x) = B(x\text{-}3)$
c. Geef aan welke transformatie B overvoert in E; wat is het overeenkomstige punt van de grafiek van E en wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt?

Bekijk $F(x) = B(3x)$
d. Geef aan welke transformatie B overvoert in F; wat is het overeenkomstige punt van de grafiek van F en wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt?

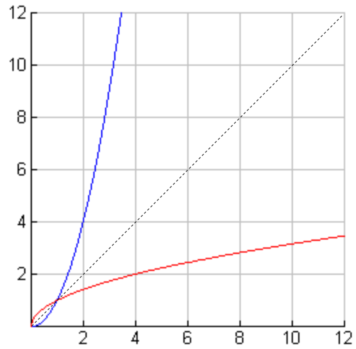
Centrale vraag : Wat is de afgeleide van $y = \sqrt{x}$ en wat is de afgeleide va n $y = \frac{1}{x}$?

WB Opgave 18

In deze opgave vinden we de afgeleide van de functie $y = \sqrt{x}$**.**

In de linkerkolom staan iedere keer uitspraken; in de rechterkolom moet je een argument geven waarom deze uitspraak waar is. Het is niet de bedoeling dat je deze bewijsstappen uit je hoofd leert, het gaat hier om de argumentatie.

We zoeken de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in $x = a$.

1. De functies $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ zijn elkaars inverse.	
2. De grafieken van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ zijn elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$ (45°-lijn) 	
3. We zoeken de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in $x = a$. We maken eerst een getallenvoorbeeld en kiezen voorlopig even $x = 9$. Het punt (9,3) ligt op de grafiek van $y = \sqrt{x}$ Het overeenkomstige punt op de grafiek van $y = x^2$ is (3,9).	
4. De groeisnelheid van $y = x^2$ in punt (3,9) is 6.	
5. De groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in punt (9,3) is $\frac{1}{6}$	
6. We kijken nu naar het algemene geval en zoeken de groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in $x = a$ Het punt $(a, \sqrt{a})$ ligt op de grafiek van $y = \sqrt{x}$ Het overeenkomstige punt op de grafiek van $y = x^2$ is $(\sqrt{a}, a)$	

7. De groeisnelheid van $y = x^2$ in het punt $(\sqrt{a}, a)$ is $2\sqrt{a}$	
8. De groeisnelheid van $y = \sqrt{x}$ in het punt $(a, \sqrt{a})$ is $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.	

Conclusie: de afgeleide van $y = \sqrt{x}$ is gelijk aan $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

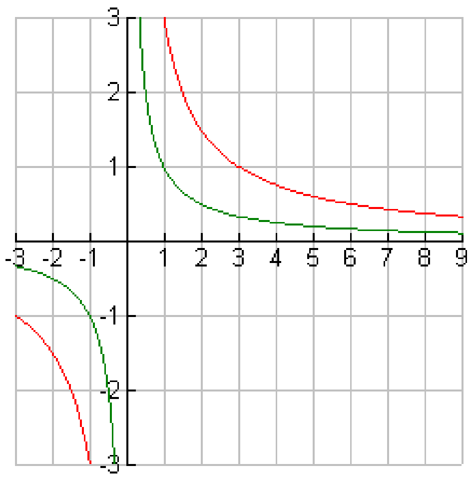
WB Opgave 19

In deze opgave vinden we de afgeleide van. $y = \frac{1}{x}$.

In de linkerkolom staan iedere keer uitspraken; in de rechterkolom moet je een argument geven waarom deze uitspraak waar is. Het is niet de bedoeling dat je deze bewijsstappen uit je hoofd leert, het gaat hier om de argumentatie.

We zoeken de groeisnelheid van $y = \frac{1}{x}$ in $x = a$.

We bekijken eerst een getallenvoorbeeld: we zoeken de groeisnelheid van $y = \frac{1}{x}$ in $x = 3$.

1. We bekijken de grafieken van de functies $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x}$, $y_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot x}$ Welke grafiek hieronder hoort bij elk van deze functies? 	
2. De grafiek van y_2 ontstaat uit die van y_1 door vermenigvuldiging t.o.v. y-as met 3; vervolgens	

wordt deze grafiek vermenigvuldigd t.o.v. x-as met $\frac{1}{3}$, waardoor y_3 ontstaat.	
3. y_1 en y_3 zijn gelijk (ze hebben bij elke x dezelfde y-waarde.)	
4. De groeisnelheid van $y = \frac{1}{x}$ in $x = 1$ is -1	
5. Het punt (1,1) ligt op y_1. Het overeenkomstige punt op y_2 is (3,1) en het overeenkomstige punt op y_3 is $(3, \frac{1}{3})$.	
6. De groeisnelheid van y_2 in (3,1) is $\frac{-1}{3}$ De groeisnelheid van y_3 in $(3, \frac{1}{3})$ is $\frac{-1}{9}$.	
7. De groeisnelheid van $y = \frac{1}{x}$ in punt $x = 3$ is $\frac{-1}{9}$	

Als je in het bewijs hierboven steeds 3 vervangt door a vind je:
de afgeleide van $y = \frac{1}{x}$ is gelijk aan $y' = \frac{-1}{x^2}$.

***Conclusie: de afgeleide* van $y = \frac{1}{x}$ is gelijk aan $y' = \frac{-1}{x^2}$.**

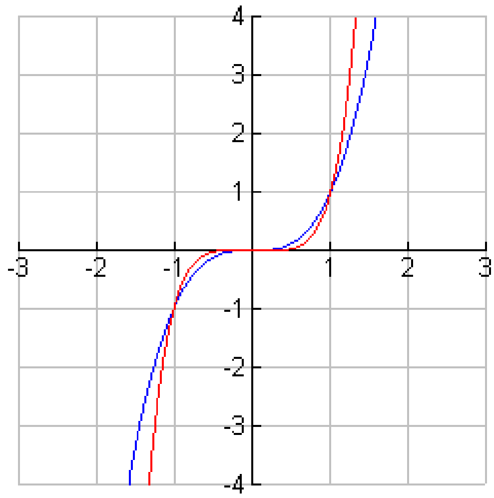
10. Machtsfuncties en hun afgeleide

Een **machtsfunctie** is een functie met formule $y = x^\alpha$. Hierin hoeft α niet per se geheel of positief te zijn.

⌛ *Centrale vraag: Hoe zien de grafieken van machtsfuncties $y = x^\alpha$ eruit als de exponenten α geheel en positief zijn?*

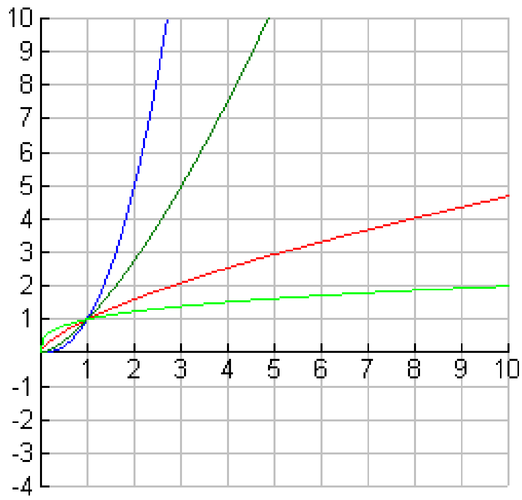
Opgave 20
a. Teken op de GR de grafieken van $y = x^\alpha$ op het venster $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 2$, voor α = 1, 2, 3, 4, 5 en 6.
b. Beschrijf het verschil tussen de gevallen dat α positief even of positief oneven is.
c. Wat zijn de gemeenschappelijke punten van de grafieken van deze machtsfuncties?

Opgave 21
Hier zie je de grafieken van $y = x^3$ en $y = x^5$.
Beredeneer, zonder GR, hoe de grafiek van $y = x^7$ loopt.



⌛ *Centrale vraag: Hoe zien de grafieken van machtsfuncties $y = x^\alpha$ eruit als de exponent een positieve breuk is?*

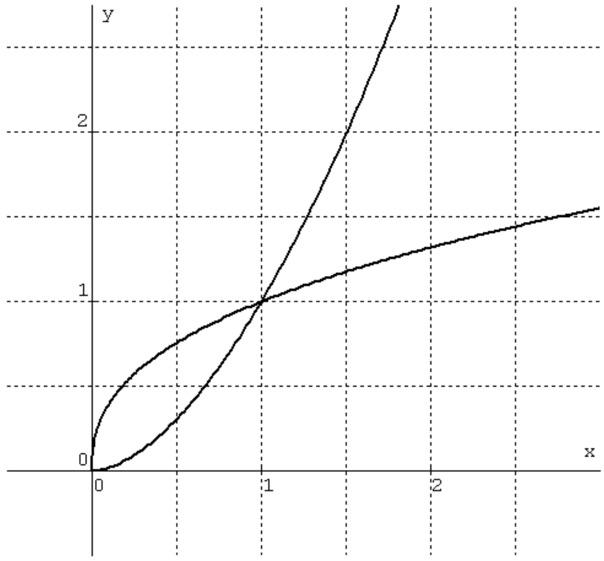
Opgave 22
Hiernaast zie je de grafieken van $y_1 = x^{0,67}$, $y_2 = x^{0,3}$, $y_3 = x^{2,3}$, $y_4 = x^{1,45}$.
a. Welke functie hoort bij welke grafiek?
b. Voor welke waarden van α heeft de functie $y = x^\alpha$ toenemende stijging en voor welke waarden afnemende stijging ?



Opgave 23

Hiernaast staan de grafieken van twee machtsfuncties $y = x^{\alpha}$

Zoek uit hoe groot de exponenten α ongeveer zijn.



⌛ *Centrale vraag: Hoe herken je een machtsfunctie in een tabel?*

Opgave 24

Bekijk de functie $y = x^5$. We kiezen twee waarden voor x, de tweede 2 keer zo groot als de eerste, bijvoorbeeld 1,3 en 2,6. We berekenen de bijbehorende y-waarden.

a. Vul in: de tweede y-waarde is dan … keer zo groot als de eerste y-waarde.

b. Onderzoek of dezelfde verhouding optreedt bij andere tweetallen x-waarden, waarbij de tweede 2 keer zo groot is als de eerste.

Als de tweede x-waarde 3 keer zo groot is als de eerste x-waarde, is er ook een vaste verhouding tussen de bijbehorende y-waarde.

c. Vul in: dan is de tweede y-waarde … keer zo groot als de eerste y-waarde.

We kunnen bovenstaande ook voor andere vermenigvuldigingen doen, bijvoorbeeld met 2,2.
Kies twee x-waarden, de tweede bijvoorbeeld 2,2 keer zo groot als de eerste. Daarbij horen twee y-waarden: $y_{\text{eerste}} = (x_{\text{eerste}})^5$ en $y_{\text{tweede}} = (2{,}2 \cdot x_{\text{eerste}})^5$

$y_{\text{tweede}} = 2{,}2^5 \cdot (x_{\text{eerste}})^5$ en dus is $y_{\text{tweede}} = 2{,}2^5$ keer zo groot als y_{eerste}.

Conclusie

Voor de functie $y = x^5$ geldt:

als je de x-waarde p keer zo groot maakt, wordt de y-waarde p^5 keer zo groot.

Voor de functie $y = x^{\alpha}$ geldt:

als je de x-waarde p keer zo groot maakt, wordt de y-waarde p^{α} keer zo groot.

Opgave 25
Hieronder staat de tabel van een machtsfunctie.

x	1	2	3	4	6
y	1	16	81	256	1296

a. Van welke machtsfunctie?
b. Controleer de voorgaande conclusie voor enkele waarden van x.

Hieronder staat een tabel van de machtsfunctie $y = x^{3,3219\ldots}$.

x	1	2	4	8	16
y	1	10	100		

c. Vul in: als de x-waarde 2 keer zo groot wordt, wordt de y-waarde …. keer zo groot.
d. Wat zijn de ontbrekende y-waarden?

Hieronder staat een tabel van een machtfunctie.

x	1	2	4	8	16
y	1	3			

e. Wat zijn de ontbrekende y-waarden?
f. Ga na dat de machtsfunctie is: $y = x^{1,465\ldots}$.

Opgave 26
Er is onderzoek gedaan naar de doorbuiging van een boekenplank. Deze hangt af van de lengte van de plank, maar ook van de breedte, dikte en natuurlijk van de belasting van de plank.
a. Voorspel hoe deze grootheden (lengte, belasting, breedte, dikte) de doorbuiging beïnvloeden.

Bij het onderzoek naar het verband tussen de doorbuiging van de plank en de lengte houden we de andere factoren constant. Bij onderzoek naar het verband tussen de doorbuiging van de plank en de breedte houden we weer de andere factoren constant. Enz.
De doorbuiging U is in mm; de lengte L is in mm; de belasting M in kg; de breedte B in mm; de dikte D in mm.
Hieronder zie je resultaten van een onderzoek:

Uit een onderzoek blijkt dat U evenredig is met L^3; dus U = constante $\cdot L^3$
b. Vul aan: als de plank 2 keer zo lang is, dan is de doorbuiging ……

Uit het onderzoek blijkt ook dat U evenredig is met M; dus $U = c \cdot M$
c. Vul aan: als de belasting 2 keer zo groot is, dan is de doorbuiging ……

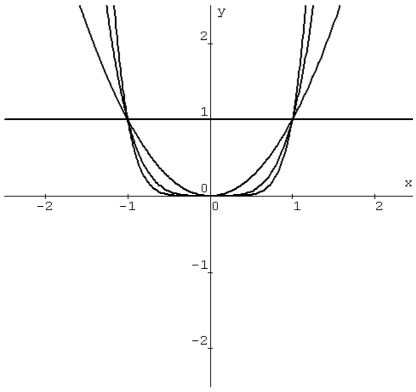
U is omgekeerd evenredig met de breedte B: U is evenredig met $\frac{1}{B}$, dus $U = c \cdot \frac{1}{B} = c \cdot B^{-1}$.
d. Vul aan: als de plank 2 keer zo breed is, dan is de doorbuiging ……

U is omgekeerd evenredig met derde macht van D: U is evenredig met $\frac{1}{D^3}$, dus $U = c \cdot \frac{1}{D^3} = c \cdot D^{-3}$
e. Vul aan: als de plank 2 keer zo dik is, dan is de doorbuiging ……..

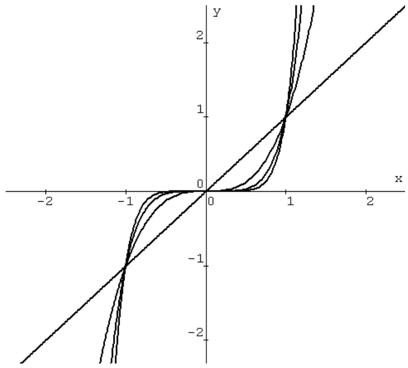
Terugblik

Centrale vraag: *Hoe zien de grafieken van machtsfuncties $y = x^{\alpha}$ eruit als de exponenten α geheel en positief zijn?*

Antwoord: *Als α even is:*

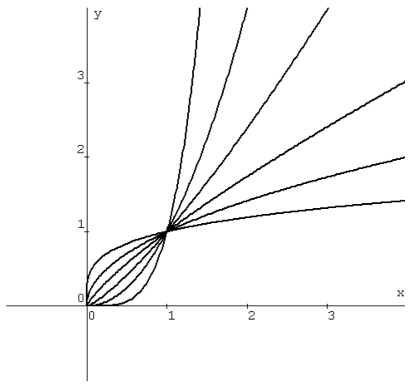


Als α oneven is:



Centrale vraag: *Hoe zien de grafieken van machtsfuncties $y = x^{\alpha}$ eruit als de exponent een positieve breuk is?*

Antwoord: *Dan is de functie alleen gedefinieerd voor $x \geq 0$.*
Voor $x = \frac{1}{2}$ is het de wortelfunctie,
voor $x = \frac{1}{3}$ is het de derdemachtswortel.



Centrale vraag: *Hoe herken je een machtsfunctie in een tabel?*

Antwoord: *Als de x-waarde 2 keer zo groot wordt, wordt de y-waarde een vast getal keer zo groot.*
Als de x-waarde 3 keer zo groot wordt, wordt de y-waarde een (ander) vast getal keer zo groot.
Als de x-waarde p keer zo groot wordt, wordt de y-waarde een (ander) vast getal keer zo groot.

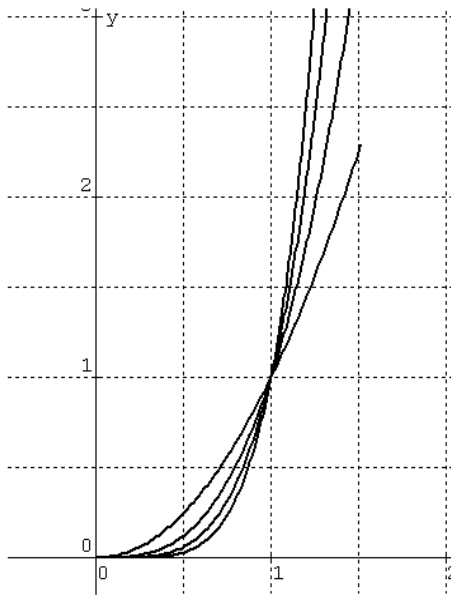
De afgeleide van machtsfuncties

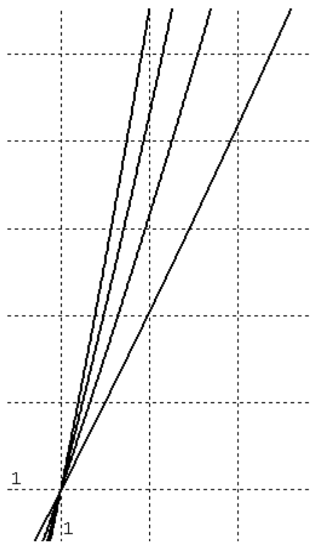
⌛ *Centrale vraag: Wat is de afgeleide van* $y = x^{\alpha}$ *?*

Opgave 27

Hieronder staan de grafieken van $y = x^{\alpha}$ voor $\alpha = 2, 3, 4$ en 5. We letten op de hellingen bij $x = 1$.

a. Bepaal de exacte hellingen als $\alpha = 2$ en als $\alpha = 3$, met differentiëren.





Het is duidelijk dat de hellingen voor $\alpha = 4$ en $\alpha = 5$ groter zijn. Rechts staan de grafieken, waarbij is ingezoomd op (1,1).

b. Lees zo goed mogelijk deze hellingen af.

c. Bepaal deze hellingen ook met je GR.

Je kunt deze hellingen ook zonder GR vinden. Bijvoorbeeld voor $y = x^5$. Kies $\Delta x = 0{,}01$.

c. Neem over en vul in:

begin: $x = 1 \rightarrow y =$ ___

eind: $x = 1{,}01 \rightarrow y \approx$ ___

toename: $\Delta x = 0{,}01$ $\quad \Delta y \approx$ ____

gemiddelde verandering: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx$ ____

Dus is de groeisnelheid van y in $x = 1$ ongeveer ___ .

We kunnen zo te werk gaan bij elke machtsfunctie $y = x^{\alpha}$. Steeds blijkt de afgeleide in $x = 1$ gelijk te zijn aan α.

Tussenresultaat: de afgeleide in $x = 1$

De helling van de grafiek van $y = x^{\alpha}$ in $x = 1$ is α.

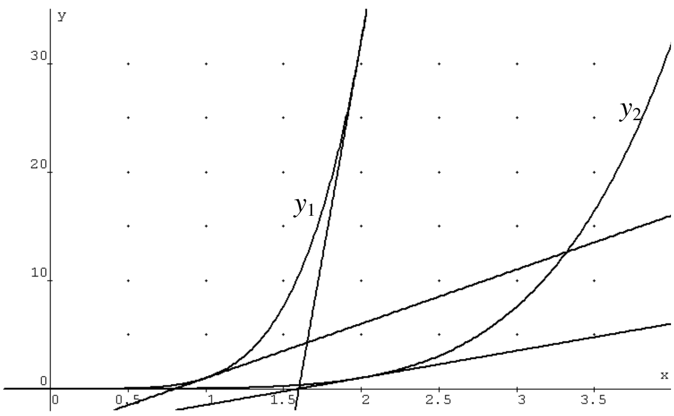
Je kunt ook *beredeneren* dat de afgeleide van $y = x^5$ in $x = 1$ exact gelijk is aan 5. Dat doen we in de volgende opgave.

WB Opgave 28
Links in de tabel staan uitspraken en rechts moet je een argument geven waarom deze uitspraak waar is.

1. $(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4) = x^5-1$	
2. Dus $\frac{x^5-1}{x-1} = 1+x+x^2+x^3+x^4$	
3. Als x bijna gelijk aan 1 is, is $\frac{x^5-1}{x-1}$ bijna gelijk aan 5	
4. Tussen 1 en x is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk aan $\frac{x^5-1}{x-1}$.	
5. De afgeleide van $y = x^5$ in $x = 1$ is 5	

Nu we de afgeleide van $y = x^5$ kennen in $x = 1$, kunnen we met twee handige transformaties de afgeleide te weten komen in elke andere x. Dat doen we in de volgende opgave. Je hoeft de hele redenering niet uit je hoofd te leren; het gaat erom dat je de verschillende stappen begrijpt.

WB Opgave 29
We zoeken eerst naar de groeisnelheid in $x = 2$.



a. Links staan beweringen. Schrijf rechts naast elke bewering waarom die juist is.

1. We bekijken daarvoor de grafieken van de functies $y_1 = x^5$, $y_2 = (\frac{1}{2}x)^5$, $y_3 = 32 \cdot (\frac{1}{2}x)^5$. De grafiek van y_2 ontstaat uit die van y_1 door vermenigvuldiging t.o.v. y-as met 2; vervolgens wordt deze grafiek vermenigvuldigd t.o.v. x-as met 32 , waardoor y_3 ontstaat.	
2. De functies y_1 en y_3 zijn gelijk.	
3. De groeisnelheid van $y_1 = x^5$ in $x = 1$ is 5.	
4. Het punt (1,1) ligt op de grafiek van y_1 . Het overeenkomstige punt op y_2 is (2,1) en het overeenkomstige punt op y_3 (2,32).	
5. De groeisnelheid van y_2 in (2,1) is 2,5. De groeisnelheid van y_3 in (2,32) is 80. De groeisnelheid van y_1 in (2,32) is 80.	

b. Wat moet je veranderen in deze redenering als je de helling van de grafiek van $y = x^5$ wilt weten in $x = 3$? Wat is die helling dus?

c. Wat is de helling van de grafiek van $y = x^5$ in $x = a$?

Wat in opgave 29 gebeurt met $y = x^5$, kunnen we ook doen voor $y = x^6$, voor $y = x^{-3}$, voor $y = x^{3,14}$, … . Zodoende vinden we volgende regel.

Differentieerregel: De afgeleide van $y = x^\alpha$ bij een willekeurige x is $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Opgave 30

We gaan deze regel controleren voor een aantal gevallen waarin we de afgeleide al kenden.

a. Kies α = 1. Beredeneer eerst wat de afgeleide van $y = x^1$ moet zijn en gebruik daarna de differentieerregel en laat zien dat beide methoden dezelfde afgeleide geven.

b. Kies α = 0. Beredeneer eerst wat de afgeleide van $\mathrm{y} = \mathrm{x}^0$ moet zijn en gebruik daarna de differentieerregel en laat zien dat beide methoden dezelfde afgeleide geven.

c. Kies α = $\frac{1}{2}$. Zoek op wat de afgeleide van $y = x^{\frac{1}{2}}$ moet zijn (zie opgave 18) en gebruik daarna de differentieerregel en laat zien dat beide methoden dezelfde afgeleide geven.

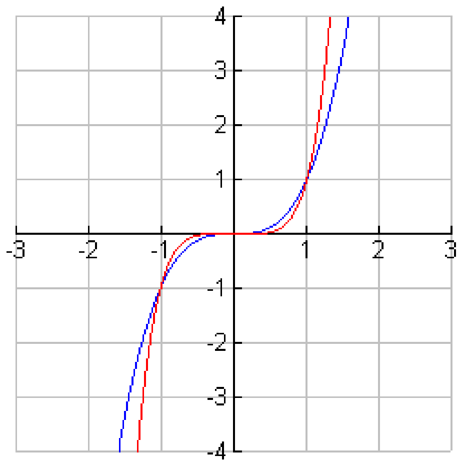
d. Kies α = -1. Zoek op wat de afgeleide van $y = x^{-1}$ moet zijn (zie opgave 19) en gebruik daarna de differentieerregel en laat zien dat beide methoden dezelfde afgeleide geven.

We gaan nu de differentieerregel gebruiken.

Opgave 31
a. Wat is de helling van de grafiek van $y = x^5$ in $x = \frac{1}{2}$ en in $x = -3$?
b. In welke punten is de helling van de grafiek van $y = x^5$ gelijk aan 10?
c. Welke waarden neemt de helling van de grafiek van $y = x^5$ aan?

Opgave 32
a. Wat is de helling van de grafiek van $y = x^4$ in $x = ½$ en in $x = -3$?
b. In welk punt is de helling van de grafiek van $y = x^4$ gelijk aan 10?
c. Welke waarden neemt de de helling van de grafiek van $y = x^4$ aan?

Opgave 33
Hier zie je de grafieken van $y = x^3$ en $y = x^5$.
Onderzoek met behulp van de afgeleide bij welke waarden van x de helling van de grafiek van $y = x^3$ groter is dan die van $y = x^5$.



Oefenen

Opgave 34
De bioloog Meeh heeft een formule opgesteld voor de huidoppervlakte H van een mens als functie van zijn lichaamsgewicht G. Die formule luidt: $H = 11{,}1\ G^{2/3}$, H in dm^2, G in kg.
a. Wat is jouw huidoppervlakte volgens de formule van Meeh?

Als je zwaarder wordt, rekt je huid op. Iemand van 60 kg wordt 100 gram zwaarder.
b. Bereken met hoeveel dm^2 zijn huidoppervlakte dan volgens de formule groter wordt.

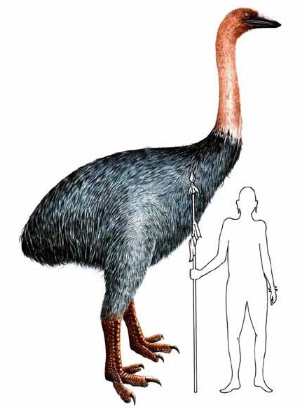
Je kunt ook met de afgeleide vinden hoeveel de huidoppervlakte (ongeveer) toeneemt.
Immers $\frac{\Delta H}{\Delta G} \approx H'$.
b. Bereken $H'(60)$ en vind daarmee hoeveel de huidoppervlakte toeneemt.

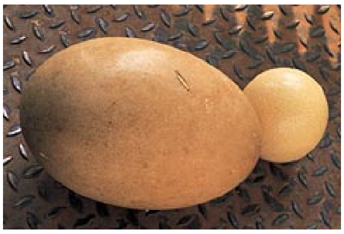
Opgave 35
Hoe groter de vogelsoort, hoe groter de eieren. Na een onderzoek van 800 vogelsoorten kwam de ornitholoog Rahn tot een formule die het verband legt tussen het gewicht van een ei en het gewicht van de moedervogel: $E = 0{,}3\,G^{\frac{3}{4}}$. Hierin is E het eigewicht en G het lichaamsgewicht, beide in grammen.

In binas kun je vinden dat een grauwe gans 2,5 kilogram weegt.
a. Hoe zwaar zijn de eieren van de grauwe gans volgens de formule?
b. Bereken de afgeleide van E als functie van G voor $G = 2500$.

Een andere gans is 100 gram zwaarder dan de grauwe gans.
c. Gebruik b om te bepalen hoe zwaar de eieren van deze gans zijn.

Van de uitgestorven Olifantsvogel die op Madagascar leefde heeft men een fossiel ei gevonden. Men schat dat het ei 10 kg heeft gewogen.
c. Hoe zwaar moet de Olifantsvogel volgens de formule geweest zijn ?
d. Geef een formule voor G, uitgedrukt in E.
e. Als het eigewicht van de Olifantsvogel met 10 gram toeneemt, hoeveel wordt de Olifantsvogel dan
volgens de formule zwaarder? Gebruik de afgeleide.





Links het Olifantsvogelei, rechts een struisvogel-ei. Het Olifantsvogelei is 29,7 cm lang, 20,5 cm breed en heeft een schaal van 3 mm dikte.

Omdat we de afgeleide van $y = x^{\alpha}$ kennen, kunnen we elke veeltermfunctie differentiëren. In het eerste deel hebben we dit al beredeneerd.

Opgave 36
Differentieer:
a. $y = 8 + 7x + 6x^2 + 5x^3 + 4x^4$
b. $y = 3x^{3/4} + 5x^{-2}$
c. $y = -0{,}25x^{-4} + 4x^{-0{,}25}$

Soms ziet een formule er niet direct uit als een combinatie van machten van de invoer x.
Bijvoorbeeld $y = = \frac{3}{x} + 3{,}14\sqrt{x}$. Maar bedenk dat $\frac{1}{x} = x^{-1}$ en $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Opgave 37
Differentieer:
a. $y = \frac{3}{x} + 3{,}14\sqrt{x}$
b. $y = 2013 - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1{,}5}{x}$
c. $y = x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + x\sqrt{3}$
d. $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$

Omdat de functies $y = \frac{1}{x}$ en $y = \sqrt{x}$ veel voorkomende machtsfuncties zijn, geven we hun afgeleiden nog even extra aandacht.

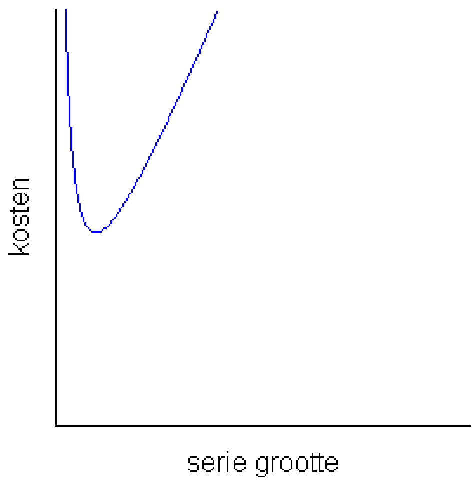
$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\textit{differentiëren}} \quad \rightarrow \quad y' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \rightarrow \quad \boxed{\textit{differentiëren}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opgave 38
Een fietsenfabrikant maakt 5000 fietsen per jaar. Hij maakt niet alle fietsen in een keer, maar maakt ze in series.
a. Wat is het voordeel voor de fabrikant als hij de foetsen in series maakt en niet allemaal in één keer?

Bij iedere serie zijn er opnieuw instelkosten van de machines: 2000 euro.
Om een fiets in voorraad te houden gedurende een jaar rekent hij 50 euro per fiets.

Stel dat hij vijf series (ieder van 1000 fietsen) maakt per jaar. Hij rekent er dan op dat hij gemiddeld de helft van een serie fietsen in voorraad heeft: dus 500 fietsen.
b. Toon aan dat hij dan in een jaar 35000 euro kwijt is aan kosten voor instellen en voorraad.



De kosten zijn dus afhankelijk van de seriegrootte. Hiernaast staat de grafiek van de kosten als functie van de seriegrootte. Zoals je in de figuur ziet zijn bij een hele kleine seriegrootte de kosten heel hoog en ook bij een hele grote seriegrootte.
b. Leg uit waarom dat zo is.

Bij seriegrootte x zijn de kosten $\frac{10.000.000}{x} + 25x$.

Ook met deze formule kun je beredeneren dat bij hele kleine seriegrootte en bij hele grote seriegrootte de kosten hoog zijn.
c. Doe dit.

d. Bereken met behulp van de afgeleide bij welke seriegrootte de kosten minimaal zijn.

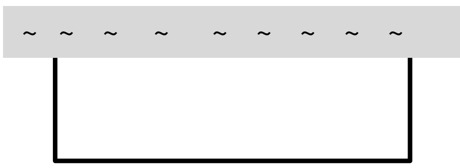
Opgave 39
Als het druk is in een tunnel, is de loopsnelheid van de mensen laag. Als er maar weinig mensen in de tunnel zijn, kunnen ze veel sneller lopen. De loopsnelheid hangt namelijk af van de ruimte die er per mens beschikbaar is. Er geldt de volgende formule: $V = 87 - \frac{26}{R}$.
Hierin is V de loopsnelheid in m/min en R de ruimte in m^2 die een voetganger gemiddeld in de tunnel heeft.

a. Beredeneer aan de hand van de formule dat, als de voetgangers meer ruimte hebben, ze ook harder lopen.

Ook met behulp van de afgeleide kun je beredeneren dat mensen harder lopen als ze meer ruimte hebben.
b. Doe dat.

Natuurlijk zullen mensen niet onbeperkt harder gaan lopen als ze meer ruimte hebben. Dat kun je ook in de formule zien.
c. Bereken met welke snelheid in km/u mensen maximaal volgens deze formule kunnen lopen.

Opgave 40
Met een stuk touw kan een rechthoekig stuk land, dat aan een kant grenst aan water, afgezet worden.
De oppervlakte van zo'n stuk land hangt natuurlijk af van de lengte van het stuk touw, maar ook van de lengte en breedte van het stuk land die gekozen worden.



Stel je hebt een stuk touw van 80 meter.
a. Toon aan dat je de oppervlakte van het afgezette stuk land kunt berekenen met de formule: $opp = 80x - 2x^2$, waarbij x de lengte van het afgezette stuk land is.
b. Bereken met de afgeleide de maximale oppervlakte van het stuk land dat kan worden afgezet.

We kijken nu naar een stuk touw van a meter lang.

c. Maak een formule voor de oppervlakte van het afgezette stuk land en bereken met de afgeleide bij welke waarde van x (die afhankelijk van a zal zijn) de oppervlakte maximaal zal zijn.

Opgave 41

De gemeente wil een feest geven en heeft berekend dat daarvoor een ruimte nodig is van 1600 m^2. De vraag is hoeveel hekwerk men minstens nodig heeft om dit gebied af te zetten.
We gaan uit van een rechthoekig gebied dat geheel van afrastering wordt voorzien. De lengte van het gebied noemen we x (meter).

a. Druk de breedte van het gebied uit in x.

b. Toon aan dat de totale lengte van de afrastering gelijk is aan $2x + \frac{3200}{x}$.

c. Bereken met behulp van differentieren bij welke afmetingen de lengte van de afrastering minimaal is.

Opgave 42

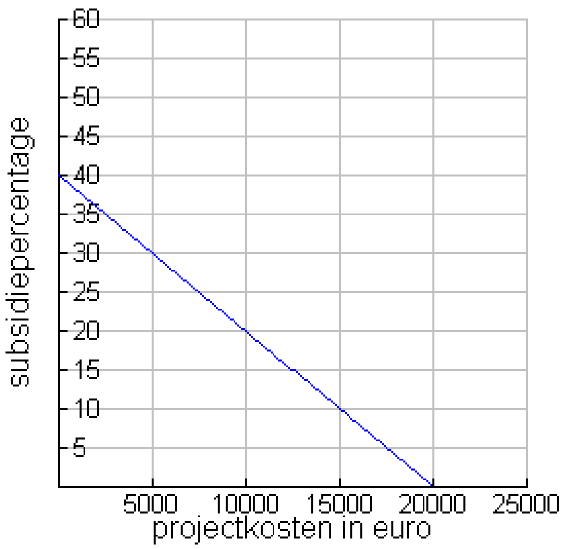
We bekijken een subsidieregeling van de gemeente voor sportverenigingen. De gemeente wil subsidie geven voor eenmalige projecten. Afhankelijk van de projectkosten subsidieert de gemeente een bepaald percentage. Voor dure projecten is het subsidiepercentage lager dan voor goedkopere projecten.

Het verband tussen de projectkosten en het subsidiepercentage zie je in de figuur hiernaast.
Zo lees je bijvoorbeeld af dat bij een project dat 5000 euro kost de gemeente 30% subsidie geeft.

a. Bereken de subsidie die een sportvereniging kan krijgen als de projectkosten 18000 euro zijn.

b. Toon aan dat als de projectkosten x euro zijn, de subsidie bedraagt: $0{,}4x - 0{,}00002\,x^2$ euro.

c. Bereken met behulp van de afgeleide de maximale subsidie die een sportvereniging kan krijgen.



Door de subsidie ontstaan de zogenaamde netto projectkosten (de kosten voor het project minus het subsidiebedrag van de gemeente).

d. Maak een formule voor de netto projectkosten en toon aan dat geldt:
als de projectkosten x stijgen, dan stijgen ook de netto projectkosten.

Opgave 43
Om iets gedaan te krijgen in Nederland hoef je niet de meerderheid van de bevolking achter je te hebben. Als je een relatief klein deel van een gemeenschap achter je hebt staan, kun je je ideeën realiseren. Dit betoogt Harrie Sormanie in zijn column *Wiskunde van de straat* in Volgens Bartjens (nr. 3, jrg.30) .
Harrie gebruikt de formule $y = \sqrt{x}$ waarbij x de grootte van de gemeenschap is en y het aantal aanhangers dat je moet hebben om succesvol je ideeen door te kunnen drukken.
We gaan ervan uit dat Harries model juist is.

het kwaad

els vliegt voor het vertrek
iuten naar alle kanten in het
kwartiertje met z'n allen
vindstreek. Dit komt omdat
maal een eigen richting
lfde kant uitgaan als een
ls gezamenlijk een richting
e voldoende groot is,
gels deze voortrekkers.

ne groot zijn als de wortel
l vogels.

nders willen in principe een
elkaar omgaan en slechts
gefrustreerd en vindt dat
schuld van zijn. Zodra
len heeft, willen alle
slims het land uit hebben.

t door deze wet oppassen
n. Als vijf ettertjes tegen
erkracht ingaan, rennen de
n ook naar buiten.

Het lerarencorps van een school telt 88 docenten. 10 van hen willen dat de schoolleiding spijbelen strenger gaat bestraffen.

a. Is dit aantal voldoende om spijbelen strenger te gaan bestraffen?

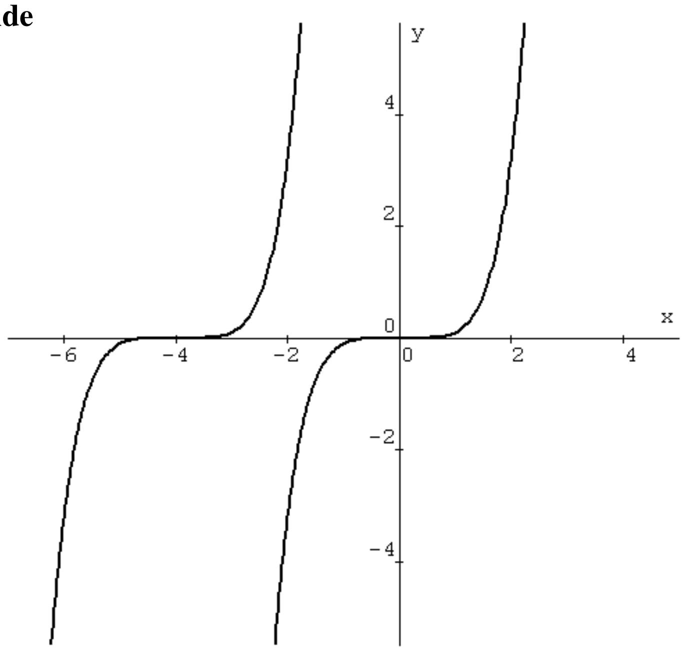
Hoe groter de groep belanghebbenden, des te groter het benodige aantal voorstanders.

b. Is hier sprake van afnemende of van toenemende stijging?
c. Toon dit ook aan met behulp van een grafiek van de afgeleide.

Nogmaals transformaties en de afgeleide

✚ Opgave 44
Hiernaast staan de grafieken van $y_1 = 0{,}1\ x^5$ en $y_2 = 0{,}1\ (x+4)^5$.

a. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van y_1?

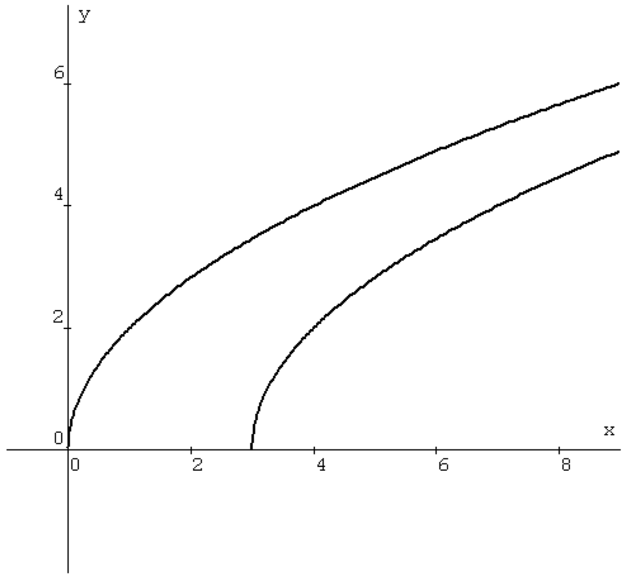


We willen de helling van de grafiek van y_2 weten bij x = -3. Die is gelijk aan de helling van de grafiek van y_1 bij x = 1. In formule: $y_2'(-3) = y_1'(1)$.

b. Hoe groot is die helling?
c. Bereken zo ook:
   $y_2'(-2) = y_1'(\ldots) = \ldots$
   $y_2'(1) = y_1'(\ldots) = \ldots$
   $y_2'(1{,}6) = y_1'(\ldots) = \ldots$
   $y_2'(a) = y_1'(\ldots) = \ldots$

✚ Opgave 45

Hiernaast staan de grafieken van $y_1 = 2\sqrt{x}$ en $y_2 = 2\sqrt{x-3}$.



a. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van y_1?

We willen de helling van de grafiek van y_2 weten bij $x = 5$. Die is gelijk aan de helling van de grafiek van y_1 bij $x = 2$. In formule: $y_2'(5) = y_1'(2)$.

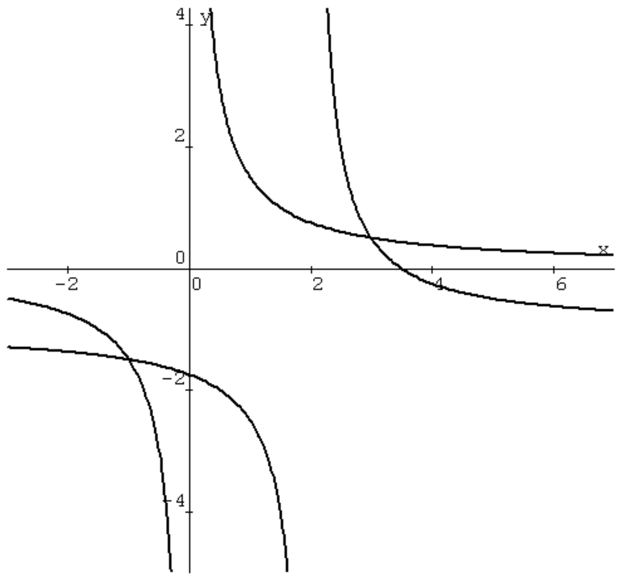
b. Hoe groot is die helling?

c. Bereken zo ook:

$y_2'(4) \quad = y_1'(\ldots) = \ldots$
$y_2'(3{,}5) = y_1'(\ldots) = \ldots$
$y_2'(6) \quad = y_1'(\ldots) = \ldots$
$y_2'(a) \quad = y_1'(\ldots) = \ldots$

✚ Opgave 46

Hiernaast staan de grafieken van $y_1 = \frac{-1{,}5}{x}$ en $y_2 = \frac{-1{,}5}{x-2} - 1$.



a. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van y_1?

We willen de helling van de grafiek van y_2 weten bij $x = 3$. Die is gelijk aan de helling van de grafiek van y_1 bij $x = 1$. In formule: $y_2'(3) = y_1'(1)$.

b. Hoe groot is die helling?

c. Bereken zo ook:

$y_2'(6) = y_1'(\ldots) = \ldots$
$y_2'(0) = y_1'(\ldots) = \ldots$
$y_2'(1) = y_1'(\ldots) = \ldots$
$y_2'(a) = y_1'(\ldots) = \ldots$

11 Exponentiële functies en een bijzonder getal

Herhaling

Opgave 47
Jan verdient met zijn werk 9 euro per uur. Hij bezit op dit moment 1234 euro.
a. Hoeveel heeft Jan na t werkuren? Hoe ziet de grafiek eruit van Jans bedrag als functie van de tijd?

Joep heeft een spaarrekening met 1234 euro. Daarop krijgt hij 10% rente per jaar, die hij niet opneemt maar laat bijschrijven op de rekening.
b. Hoeveel geld heeft Joep na t jaren? Hoe ziet de grafiek eruit van Joeps bedrag als functie van de tijd?

Jan en Joep zijn beide geinteresseerd na hoeveel werkuren zij 3000 euro bij elkaar hebben.
c. Hoe vinden ze deze aantallen uren?

Op tijdstip 0 is er een zekere hoeveelheid; noem die b.

Stel: Elk uur wordt de hoeveelheid met een vaste hoeveelheid vermeerderd, zeg met a. Dan is de hoeveelheid na t uur: $b + a \cdot t$. We spreken in dit geval van **lineaire groei**, omdat de grafiek een rechte lijn is. Hierbij mag t elk getal zijn; ook negatief, een breuk, of zelfs een irrationaal getal. Als a negatief is, is de “groei” in feite een afname.

Stel: Elk uur wordt de hoeveelheid met een vaste factor vergroot, zeg met g. Dan is de hoeveelheid na t uur: $b.\ g^t$. We spreken in dit geval van **exponentiële groei** (omdat de tijd t in de exponent staat). Hierbij mag t elk getal zijn; ook negatief, een breuk, of zelfs een irrationaal getal.
Als g kleiner dan 1 is, is de “groei” in feite een afname.

Voorbeelden van lineaire groei
- Een auto rijdt met constante snelheid. De afgelegde afstand neemt lineair toe in de tijd.
- De leden van een club betalen elk jaar contributie. De inkomsten nemen lineair toe met het aantal leden.
- Een tankwagen levert benzine af bij een pompstation. Het totale gewicht van de tankwagen neemt lineair af met het aantal geleverde liters benzine.
- Er staat kwik in de buis van een thermometer. De hoogte van het kwik varieert lineair met de temperatuur.

Voorbeelden van exponentiële groei
- Iemand heeft een spaarrekening, waarop jaarlijks de rente wordt bijgestort, zodat die het volgende jaar ook weer rente oplevert (men spreekt dan van samengesteld interest). Het bedrag op de spaar-rekening groeit exponentieel in de tijd.

- Bacteriën splitsen zich, bijvoorbeeld gemiddeld een keer per half uur. Het aantal bacteriën groeit exponentieel in de tijd.
- Als een duiker dieper komt, wordt zijn omgeving donkerder. De hoeveelheid licht neemt exponentieel af met de diepte.
- Een ballon stijgt tot grote hoogten. De luchtdruk neemt exponentieel af met de hoogte.

Een bijzonder getal: e

⌛ *Centrale vraag: Wat is het getal e ?*

Opgave 46
Stel je zet 1000 euro op een spaarrekening en je mag kiezen tussen de volgende opties:
een jaar lang tegen 10% per jaar

- 5% per half jaar
- 2,5% per eenvierde jaar (per 3 mnd)
- 1% per eentiende jaar
- 0,5% per eentwintigste jaar
- 0,01% per eenduizendste jaar
- 10/10000% per 10000^{ste} jaar

Misschien niet verwacht, maar het maakt uit.

Kun je uitleggen dat het wel degelijk uitmaakt of je 10% rente per jaar krijgt of 5% rente per halfjaar?

Om de rente te berekenen die je in elk van de zes bovenstaande opties in een jaar tijd ontvangt, heb je te maken met de volgende machten:
$1{,}1^{10} = \dots$
$1{,}05^{20} = \dots$
$1{,}025^{40} = \dots$
$1{,}01^{100} = \dots$
$1{,}005^{200} = \dots$
$1{,}001^{1000} = \dots$
$1{,}00001^{100000} = \dots$

De getallen in de rij naderen tot een zeker getal: dit getal heeft een speciale naam: e
Definitie: $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; hoe groter *n*, des te nauwkeuriger de benadering.
$e \approx 2{,}718\dots$

Historisch (van wikipedia):

Het getal e wordt ook de constante van Neper (Napier) genoemd, naar de uitvinder van de logaritme, de Schotse wiskundige John Napier, die e omstreeks 1600 tegenkwam bij zijn werk aan een van de eerste rekenlinialen. Het getal e werd door de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler het exponentiële getal genoemd, vandaar vermoedelijk de naam.

e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525
166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763233829880 7
531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424 3
7107539077744992

Dit zijn de eerste 297 decimalen van e. Op http://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.2mil vind je twee miljoen decimalen.

Opgave 48

$e = 1{,}0001^{10000}$. Dus geldt ook: $e^{0{,}0001} - 1 \approx 0{,}0001$.

Leg dit uit. Dit gaan we verderop nog gebruiken.

Voor $y = e^x$ geldt dat $y' = e^x$.

In woorden:

de afgeleide van e^x is e^x (op ieder moment) is de groeisnelheid van e^x gelijk aan de *y*-waarde; anders gezegd: de groeisnelheid is op ieder moment gelijk aan de aanwezige hoeveelheid.

Opgave 49

Controleer op de GR dat de afgeleide van e^x gelijk is aan e^x.

Intermezzo

We gaan in een aantal stappen inzien dat dit geldt.

Bedenk steeds in de rechter kolom een argument waarom de uitspraak in de linkerkolom juist is.

Voor alle exponentiële functies geldt: de groeisnelheid is evenredig met de aanwezige hoeveelheid.	*Bij een exponentiële functie is een vaste groeifactor aanwezig, dus als de hoeveelheid y 2 keer zo groot wordt, wordt de groeisnelheid 2 keer zo groot.*
De afgeleide van $y = e^x$ *is* $y' = c \cdot e^x$	
c is de groeisnelheid van $y = e^x$ bij $x = 0$	
De groeisnelheid bij $x = 0$ van $y = e^x$ is $\frac{e^{0{,}0001}-1}{0{,}0001}$	
$\frac{e^{0{,}0001}-1}{0{,}0001}$ en $e^{0{,}0001} - 1 \approx 0{,}0001$, dus $c \approx 1$	

We werkten hier met e $\approx 1{,}0001^{10000}$; we werken nauwkeuriger als we nemen e $\approx 1{,}00001^{100000}$, en nog nauwkeuriger als we nemen e $\approx 1{,}000001^{1000000}$, enz.
Vandaar dat we mogen concluderen dat *c* (precies) gelijk is aan 1.

Centrale vraag: Wat is het getal e?

Antwoord: *Het getal e wordt benaderd door* $(1 + \frac{1}{n})^n$ *voor grote getallen n.*
Zo vinden we bijvoorbeeld: $e \approx 1{,}0001^{10000} \approx 2{,}718\ldots$.
Het bijzondere van e is dat de afgeleide functie van $y = e^x$ *gelijk is aan* $y' = e^x$.

De natuurlijke logaritme

Omdat we het getal e kennen (dat is het getal 2,718…), weten we ook wat ${}^{e}\log(x)$ is (dit is dus ongeveer gelijk aan ${}^{2.718}\log(x)$).
De logaritme met dit speciale grondtal noemen we de **natuurlijke logaritme**. Deze wordt genoteerd als $\ln(x)$ en is de inverse van $y = e^x$ (net zoals $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ elkaars inverse zijn en $y = 2^x$ en $y = {}^{2}\log(x)$ ekaars inverse zijn). Er zit een knop voor op de GR.
Dus kunnen we nu vergelijkingen oplossen: $e^x = 5$ heeft als oplossing $x = \ln(5) \approx 1{,}609$
En omgekeerd: $\ln(x) = 4$ heeft als oplossing $x = e^4 \approx 54{,}60$.

Als je twee functies die elkaars inverse zijn na elkaar toepast op een getal, is het eindresultaat weer hetzelfde getal als waarmee je begon. Schematisch:

begingetal → $\boxed{\text{functie}}$ → $\boxed{\text{inverse functie}}$ → *begingetal*

Opgave 50
a. Bereken: $(\sqrt{25}\,)^2$, $(\sqrt{144}\,)^2$, $(\sqrt{12345}\,)^2$, $(\sqrt{\pi}\,)^2$
$\sqrt{5^2}$, $\sqrt{144^2}$, $\sqrt{12345^2}$, $\sqrt{\pi^2}$
b. Bereken: ${}^{2}\log(2^5)$, ${}^{2}\log(2^{13})$, ${}^{2}\log(2^{1{,}2345})$, ${}^{2}\log(2^{\pi})$
$2^{\,{}^{2}\log(32)}$, $2^{\,{}^{2}\log(1/2)}$, $2^{\,{}^{2}\log(12345)}$, $2^{\,{}^{2}\log(\pi)}$
c. Bereken: $\ln(e^5)$, $\ln(e^{13})$, $\ln(e^{1{,}2345})$, $\ln(e^{\pi})$
$e^{\ln(32)}$, $e^{\ln(1/2)}$, $e^{\ln(12345)}$, $e^{\ln(\pi)}$,

$\ln(e^a) = a$	$e^{\ln(a)} = a$

Voor de natuurlijke logaritme gelden, omdat het een logaritme is, weer alle eigenschappen en rekenregels van de logaritme.

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
$\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$	$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
$n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$	$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$

In het vervolg oefenen we met de natuurlijke logaritme. Het zal wennen zijn dat de letter e niet staat voor een variabele maar voor een vast getal. Eigenlijk geheel vergelijkbaar met het getal π.

Opgave 51

a. Vergelijkingen oplossen

Los op, eerst zonder GR (met getal e of ln in de uitkomst) en daarna een benadering in twee decimalen.

$e^x = 3$	$\ln(x) = 3$
$e^{2x+1} = 15$	$\ln(3x+4) = 5$
$2\ e^x + 1 = 15$	$2\ln(x) - 6 = 2$

b. Grafieken schetsen

Schets zonder GR de grafieken van de volgende functies en controleer het antwoord met de GR

$y = e^x$	$y = \ln(x)$
$y = e^{x-3}$	$y = \ln(x-3)$
$y = -2\ e^x + 3$	$y = -2\ln(x) + 3$
$y = e^{2x}$	$y = \ln(2x)$

c. Herschrijven van formules

$e^x \cdot e^3 = e^{\cdots}$	$\ln(x) + \ln(3) = \ln(\ldots)$
$e^x \cdot e^{x-3} = e^{\cdots}$	$\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(\ldots)$
$(e^x)^2 \cdot e^{3x} = e^{\cdots}$	$\ln(x) + 1 = \ln(\ldots)$
$e^x \cdot e^x = e^{\cdots}$	$2\ln(x) = \ln(\ldots)$

14 De afgeleide van exponentiële en logaritmische functies

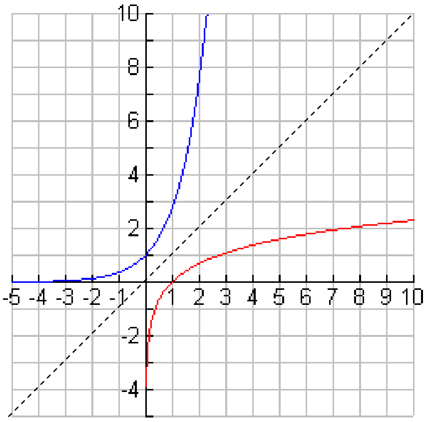
⌛ *Centrale vraag: Wat is de afgeleide van $y = \ln(x)$?*

We zoeken dus naar de groeisnelheid van $y = \ln(x)$ *in* $x = a$.

We nemen dezelfde stappen als in opgave 18.

WB Opgave 52

In de linkerkolom staan iedere keer uitspraken; in de rechterkolom moet je een argument geven waarom deze uitspraak waar is. Het is niet de bedoeling dat je deze denkstappen uit je hoofd leert, het gaat hier om de argumentatie.

1. De functies $y = e^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars inverse.	
2. De grafieken van $y = e^x$ en $y = \ln(x)$ zijn elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$ (45°-lijn) 	
3. We zoeken de groeisnelheid van $y = \ln(x)$ in $x = a$. We maken eerst een getallenvoorbeeld en kiezen eerst $x = 9$. Het punt $(9,\ln(9))$ ligt op de grafiek van $y = \ln(x)$. Het overeenkomstige punt op de grafiek van $y = e^x$ is $(\ln(9),9)$.	
4. De groeisnelheid van $y = e^x$ in punt $(\ln(9),9)$ is 9.	
5. De groeisnelheid van $y = \ln(x)$ in punt $(9,\ln(9))$ is $\frac{1}{9}$.	

6. We kijken nu naar het algemene geval en zoeken de groeisnelheid van $y = \ln(x)$ in $x = a$. Het punt $(a,\ln(a))$ ligt op de grafiek van $y = \ln(x)$. Het overeenkomstige punt op de grafiek van $y = e^x$ is $(\ln(a),a)$.	
7. De groeisnelheid van $y = e^x$ in het punt $(\ln(a),a)$ is a.	
8. De groeisnelheid van $y = \ln(x)$ in het punt $(a,\ln(a))$ is $\frac{1}{a}$	

Conclusie om te onthouden: de afgeleide van $y = \ln(x)$ ***is gelijk aan*** $y' = \dfrac{1}{x}$

Opgave 53

Bereken de afgeleide van:

$y = 3\ e^x$ $\qquad$ $y = 3 \ln(x)$

$y = 4\ e^x - 7x$ $\qquad$ $y = 4 \ln(x) - 7x$

$y = -\ e^x + 2^e$ $\qquad$ $y = -\ln(x) + \ln(2)$

Opgave 51 en 53 geven een goed beeld van wat je op dit moment moet weten van en kunnen met de functies $y = e^x$ en $y = \ln(x)$: vergelijkingen oplossen, grafieken schetsen, formules herleiden en afgeleiden berekenen. Het zijn “gewone” functies, vergelijkbaar met $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ en met $y = 2^x$ en $y = {}^2\log(x)$.
Bij deze laatste twee functies kun je wel vergelijkingen oplossen, grafieken schetsen en formules herleiden, maar we moeten nog de afgeleide onderzoeken.
Dat gaan we in de volgende opgaven doen. Daarvoor hebben we eerst de afgeleide van $y = e^{ax}$ nodig.

Centrale vraag: Wat is de afgeleide van $y = e^{ax}$ *(waarbij a een vast getal is)?*

WB Opgave 54

a. Zoek met behulp van de GR een mogelijke formule voor de afgeleide van $y = e^{2x}$: $y' = \ldots$

b. We gaan deze afgeleide vinden. Bedenk steeds in de rechter kolom een argument waarom de denkstap juist is.

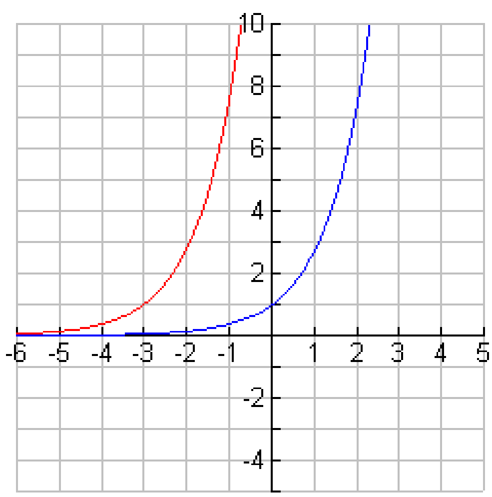
Bekijk de grafiek van $y = e^x$ en vermenigvuldig deze ten opzichte van de y-as met $\frac{1}{2}$. Je krijgt dan de grafiek van $y = e^{2x}$.	
We zoeken als voorbeeld de groeisnelheid van $y = e^{2x}$ in $x = 3$. Het overeenkomstige punt op de grafiek van $y = e^x$ heeft $x = 6$.	
De groeisnelheid van $y = e^x$ in $x = 6$ is e^6	
De groeisnelheid van $y = e^{2x}$ in $x = 3$ is $2e^6$.	
Algemeen geldt dat de groeisnelheid van $y = e^{2x}$ in $x = a$ is $2e^{2a}$.	

Conclusie om te onthouden: de afgeleide van $y = e^{2x}$ ***is*** $y' = 2e^{2x}$

de afgeleide van $y = e^{ax}$ ***is*** $y = ae^{ax}$

Opgave 55

a. Onderzoek met de GR wat de afgeleide van $y = e^{x+3}$ is en geef daarna een redenering met behulp van onderstaande figuur waarom je antwoord goed is.



b. Wat is de afgeleide van $y = e^{x+b}$?

Centrale vraag: Wat is de afgeleide van $y = 2^x$?

We onderzoeken deze centrale vraag in twee stappen. Eerst doen we onderzoek met de GR en daarna beredeneren we wat de exacte afgeleide van $y = 2^x$ is.

WB Opgave 56

a. Maak met de GR de tabel hiernaast en maak met behulp van deze tabel een formule voor y'.

x	y	Groeisnelheid y'
0	1	
1	2	
2	4	
3	8	
4	16	
5	32	

Merk op dat je ook in de tabel ziet dat de groeisnelheid van $y = 2^x$ evenredig is met de functiewaarde (de aanwezige hoeveelheid): als y twee keer zo groot wordt, dan is y' ook twee keer zo groot. Dit komt door de vaste groeifactor. Voor iedere exponentiële functie geldt dat de afgeleide evenredig is met de functiewaarde.
In formuletaal: $y' = c \cdot y$, waarbij c de groeisnelheid in $x = 0$ is.

b. Kies een aantal exponentiële functies en ga dit na.

De waarde van c (de groeisnelheid in $x = 0$) hangt af van de groeifactor en is bij $y = e^x$ gelijk aan 1.
Bij $y = 2^x$ is $c = 0{,}69\ldots$. Dat zie je in de bovenstaande tabel: $y' = 0{,}69\ldots \cdot 2^x$.

We berekenen nu de exacte afgeleide van $y = 2^x$

c. Links staan weer de uitspraken; schrijf rechts de argumeten waarom de uitspraak waar is.

$2 = e^{\ln(2)}$ $(\approx e^{0{,}69})$	
$2^x = e^{\ln(2)\,.\,x}$ $(\approx e^{0{,}69\,.\,x})$	
$y' = \ln(2) \cdot e^{\ln(2)\,.\,x}$ $(\approx 0{,}69 \cdot e^{0{,}69\,.\,x})$	
$y' = \ln(2) \cdot 2^x$	

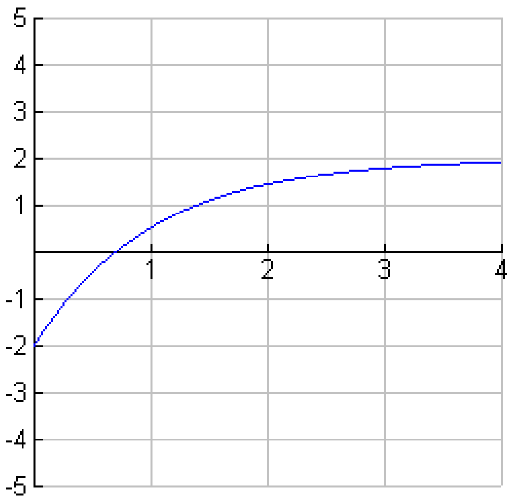
***Conclusie om te onthouden: de afgeleide van** $y = 2^x$ **is** $y' = \ln(2) \cdot 2^x$*

***de afgeleide van** $y = g^x$ **is** $y' = \ln(g) \cdot g^x$*

Opgave 56
Iemand zet 1000 euro op een spaarrekening tegen 4% rente per jaar. $B(t)$ is het bedrag op de spaarrekening na t jaar.
Bereken met behulp van de afgeleide $B'(0)$, controleer dit met de GR en zeg in eigen woorden wat de uitkomst betekent in deze context.

Opgave 57
Bereken de afgeleide van:
$y = 100 \cdot 0{,}9^x$
$B(t) = 3^t$
$y = e^{x+4}$
$A = 31{,}5 \cdot 1{,}12^p$
$y = 4\,e^{2x+1} + 3^{2x}$

Opgave 58
In de figuur zie je de grafiek van de afgeleide van een functie $y(x)$.



Een formule vuur de afgeleide functie is $y' = -4\,e^{-x} + 2$
Schets de grafiek van functie y als je weet dat $y(0) = 4$.

In de volgende opgave gaan we de afgeleide zoeken van de functies $y = \ln(ax)$, $y = \ln(x+b)$ en $y = \ln(ax+b)$.

Opgave 59
a. Onderzoek wat de afgeleide is van $y = \ln(ax)$, met behulp van bijvoorbeeld de GR). Kies verschillende waarden van a.
b. Vind de afgeleide van $y = \ln(ax)$ door gebruik te maken van een rekenregel voor logaritme.
c. Wat is de afgeleide van $y = \ln(x+b)$?
d. Wat is de afgeleide van $y = \ln(ax+b)$?

Opgave 60

Als we een pak melk uit de koelkast halen, dat zal de temperatuur van het pak langzaam oplopen, van de temperatuur in de koelkast naar de kamertemperatuur.
Bij een zekere instelling van de koelkasttemperatuur en een bepaalde kamertemperatuur geldt de volgende formule: $T = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$, waarbij T de temperatuur in graden Celsius is en t de tijd in minuten die verstreken is sinds het pak uit de koelkast is gehaald.

a. Wat zijn de koelkasttemperatuur en de kamertemperatuur?
b. Schets de grafiek van T.
c. Bereken $T\,'$ en toon met behulp hiervan aan dat T steeds stijgt, maar dat die stijging steeds minder sterk is (afnemende stijging).

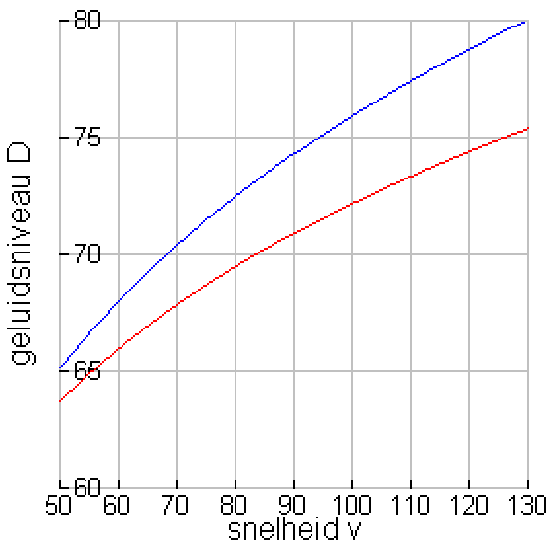
De formule van T is opgesteld naar aanleiding van een natuurkundige wet. Deze zegt dat de afnamesnelheid van de temperatuur op ieder moment evenredig is met het verschil tussen de temperatuur T en de kamertemperatuur. Anders gezegd:
$T\,'$ is evenredig met *T min kamertemperatuur.*

d. Toon aan dat dit het geval is bij de formule $T = 19 - 13 \cdot 0{,}78^t$

Opgave 61

De snelwegen in Nederland zijn voornamelijk asfaltbetonwegen. De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen).

In onderstaande figuur zie je het verband tussen de snelheid van het verkeer v (in km/u) en het geluidsniveau D (in dB) van het verkeer op beide wegen.



Bij een DAB-weg geldt de formule $D = 15{,}6\ \ln(v) + 4{,}1$.

Bij een ZOAB-weg geldt de formule $D = 12{,}2\ \ln(v) + 16{,}0$.

Het verschil tussen het geluidsniveau van DAB-weg en ZOAB-weg bedraagt vanaf een zekere snelheid meer dan 4 dB.

a. Vanaf welke snelheid is dat het geval?
b. Toon met behulp van de afgeleide aan dat het geluidsniveau bij een DAB-weg bij iedere snelheid sneller toeneemt dan bij een ZOAB-weg.
c. Schrijf beide formules om zodat v uitgedrukt wordt in het geluidsniveau D.

Stel dat bij een nieuw soort asfaltbeton ook een formule geldt van de vorm: $D = a \ln(v) + b$.
Met twee meetgegevens kunnen de waarde van a en van b berekend worden.
Stel dat bij een snelheid van 50 km/u het geluidsniveau 65 dB is en bij een snelheid van 95 km/u het geluidsniveau 75 dB is.

d. Bereken met deze gegevens de waarde van a en van b.

Opgave 62

In een ander onderzoek kijkt men hoe het verkeerslawaai L (in dB) op een plaats afhangt van de snelheid (v in km/u) van het verkeer en de afstand tot een weg a (in meters).
Bij een bepaalde weg vindt men de volgende formule: $L = 89{,}5 - 2{,}1 \ln(av) + 0{,}16v - 0{,}03a$.
Vermoeden 1: Je mag verwachten dat, bij constante snelheid, geldt: als de de afstand tot de weg groter wordt, wordt het verkeerslawaai minder.

a. Toon aan dat, voor een vaste waarde van v, volgens deze formule geldt: als a groter wordt dan L kleiner.

Vermoeden 2: Misschien zou je ook verwachten dat, op een vaste afstand tot de weg, geldt: als de snelheid groter wordt, neemt het verkeerslawaai toe.
Een woning staat op 100 meter afstand van de snelweg.

b. Bereken met de afgeleide bij welke snelheid het verkeerslawaai minimaal is.

We bekijken woningen op een vaste afstand a tot de weg.

c. Onderzoek vermoeden 2.

Opgave 63

Bij het ontwerpen van een weg moet er rekening gehouden worden met het schoonregenen van de weg. Tijdens regenbuien wordt het vuil van de weg gespoeld. Het percentage vuil dat weggespoeld wordt (P) is afhankelijk van de tijd dat het regent (t in uren): $P = 100\,(1 - e^{-ct})$.
In deze formule hangt c af van het type weg. Voor betonwegen is $c = 0{,}05$, terwijl voor asfaltwegen is $c = 0{,}025$.

a. Teken de grafieken van het verband tussen P en t voor beide wegen en zeg welke weg sneller schoongespoeld wordt.
b. Onderzoek met behulp van de afgeleide welke van de twee wegen bij een hele korte regenbui het snelste schoonspoelt.

Voor elke vaste, positieve waarde van c geldt: P is een stijgend functie van t (als t groter wordt, wordt ook P groter).

c. Toon dit aan met een redenering aan de hand van de formule $P = 100\,(1 - e^{-ct})$.
d. Toon dit aan met behulp van de afgeleide.

15 Combineren van functies

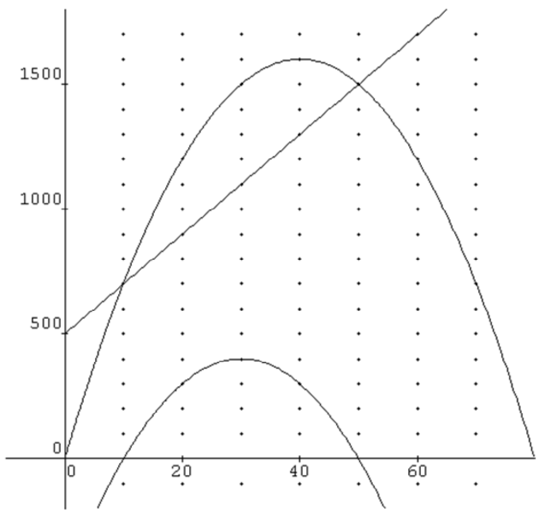
> De schuld van de USA is opgelopen tot 14.387.832.970.675 US dollar.
>
> Hoeveel is de schuld per Amerikaan?
>
> Stel dat we de Amerikanen een handje willen helpen en als Nederlanders aan de schuld gaan meebetalen.
> Hoeveel US dollar scheelt dat dan per Amerikaan?
>
> En wat moeten we met zijn allen betalen als we de schuld verdelen over de hele wereldbevolking?
> De USA telt 300 miljoen personen. Omvang bevolking Nederland: 16 miljoen. Omvang wereldbevolking: 7 miljard.
> *Bron: NRC, 20 mei 2011*

⌛ *Centrale vraag: hoe kun je op basis van de grafieken van twee gegeven functies de grafieken van de verschil-, van de product- en van de quotiëntfunctie schetsen?*

Verschilfunctie *f* − *g*

Opgave 64

TO is totale opbrengst en *TK* zijn de totale kosten van een *productie.* Hiernaast staan grafieken van deze twee functies.



a. Welke is de grafiek van *TO* en welke van *TK*, denk je?

Er is nog een derde grafiek in het plaatje

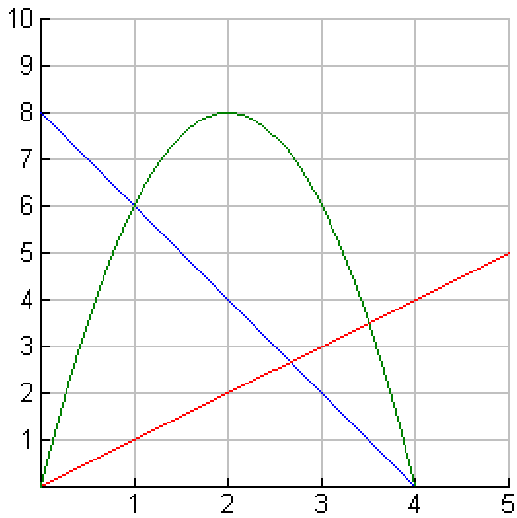
b. Ga na dat dat de grafiek van de verschilfunctie van *TO* en *TK* is.
c. Wat stelt de derde grafiek voor, denk je?
   $TO = -q^2 + 80q$ en $TK = 20q + 500$.
d. Ga voor enkele punten na hoe je die vindt uit de bijbehorende punten van de grafieken van *TO* en *TK*.
e. Geef een formule voor de winst.

Productfunctie $f \cdot g$

Opgave 65

Hiernaast staan de grafieken van drie functies. Een van de functies is het product van de andere twee.

a. Ga dat na.



Een vraagfunctie in de economie vertelt hoe de prijs van een product afhangt van de gevraagde hoeveelheid.

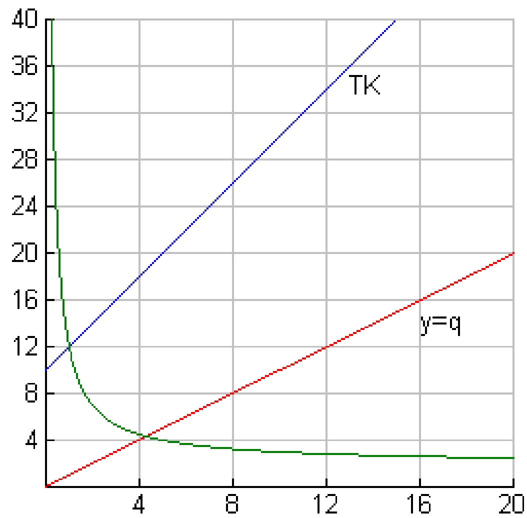
Stel dat geldt: $p = -2q + 8$, waarbij q de gevraagde hoeveelheid is en p de prijs.

De totale opbrengst TO *is* $p \cdot q$. We vinden dan $TO = -2q^2 + 8q$.

b. Laat zien dat de formule $TO = -2q^2 + 8q$ klopt.

c. Geef voor enkele punten aan hoe de grafiek van TO volgt uit de andere twee.

Quotientfunctie $\frac{f}{g}$



Opgave 66

Hiernaast staan drie grafieken, van $y = q$, van de totale kosten zijn $TK = 2q+10$. Hierbij is q een geproduceerde hoeveelheid. De derde grafiek is die van de gemiddelde kosten: $\frac{TK}{q}$.

a. Geef een formule voor de gemiddelde kosten, uitgedrukt in q.

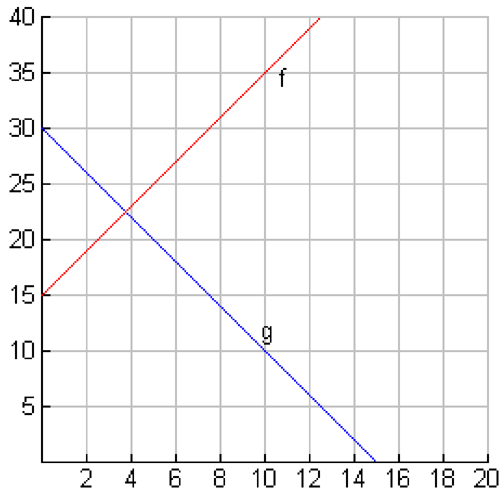
b. Geef voor enkele punten aan hoe de grafiek van de gemiddelde kosten volgt uit de andere twee.

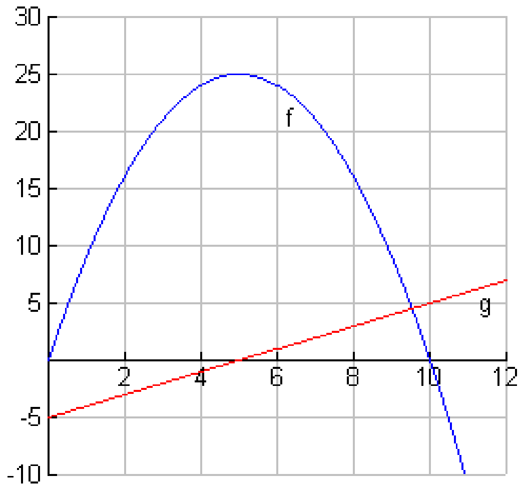
WB Opgave 67

a. Schets op het werkblad zo goed mogelijk de grafiek van de verschilfuncties $f - g$.

Op basis van de grafieken van f en g kun je enkele punten van de verschilfunctie eenvoudig vinden.

b. Welke?



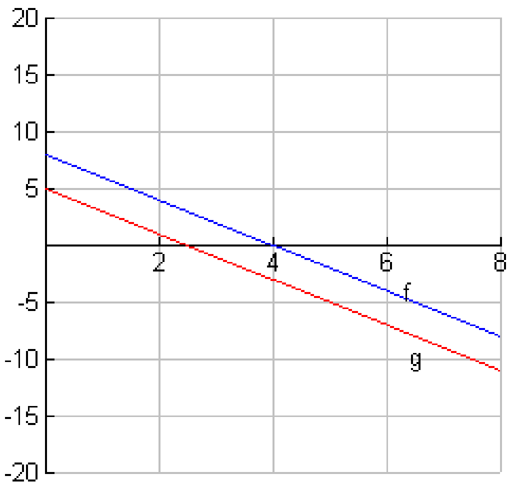


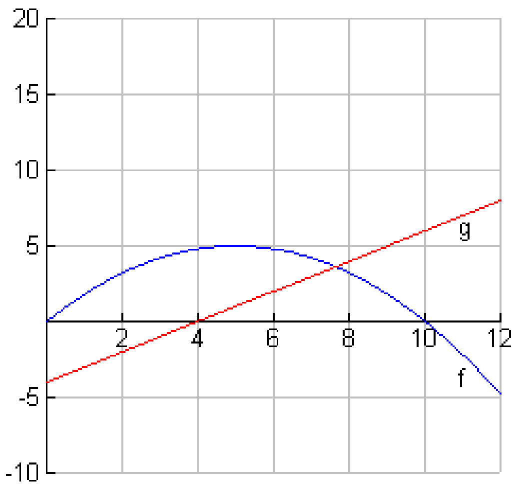
WB Opgave 68

a. Schets op het werkblad zo goed mogelijk de grafiek van de productfuncties $f \cdot g$.

Op basis van de grafieken van f en g kun je enkele punten van de productfunctie eenvoudig vinden.

b. Welke?



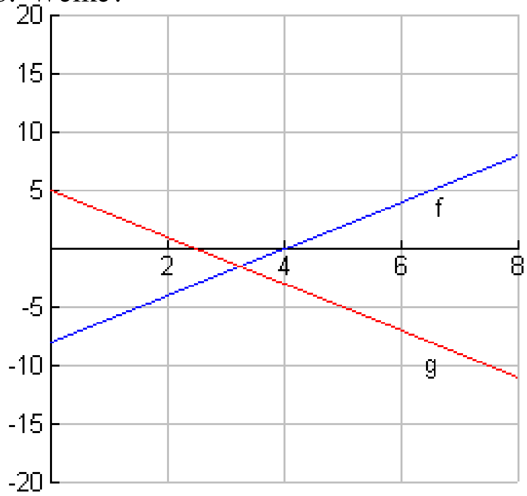


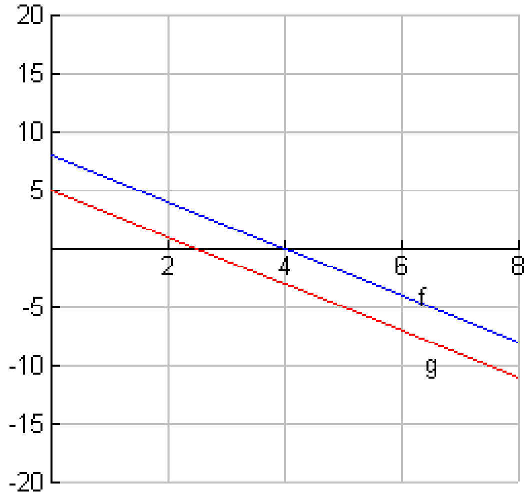
WB Opgave 69

a, Schets op het werkblad zo goed mogelijk de grafiek van de quotiëntfuncties $\frac{f}{g}$.

Op basis van de grafieken van f en g kun je enkele punten van de quotiëntfunctie eenvoudig vinden.

b. Welke?





Centrale vraag: wat is het "oneindig gedrag" van een functie?

We kijken nu naar het "oneindig gedrag" van functies, dat wil zeggen: we kijken hoe de y-waarden worden als x willekeurig groot (positief) of willekeurig klein (negatief) wordt.

We schrijven: $x \to \infty$ (x wordt willekeurig groot; x nadert naar oneindig),

$x \to -\infty$ (x wordt willekeurig klein; x nadert naar min-oneindig).

Het *oneindig gedrag* zien we terug in de 'staarten' van de grafiek. Een voorbeeld om dit toe te lichten.
We nemen de functie $y = 30 - 5 \cdot 0{,}8^x$; hiernaast zie je de grafiek.

Aan de hand van de formule kun je beredeneren dat, als x naar oneindig nadert, de y-waarde naar een vaste waarde nadert. Immers als x heel groot wordt, nadert $0{,}8^x$ naar 0 en y dus naar $30 - 5 \cdot 0 = 30$.

Ook aan de hand van de formule kun je beredeneren dat, als x nadert naar min-oneindig, de y-waarde willekeurig klein (negatief) wordt. Immers als $x \to -\infty$, dan zal $0{,}8^x$ willekeurig groot worden en dat moet je aftrekken van 30.

Dit oneindig gedrag zie je in de staarten van de grafiek, dus als we over de x-as naar rechts of naar links lopen. Het gaat niet over het tussenliggende deel van de grafiek.

Opgave 70

Onderzoek het oneindig gedrag van de volgende functies.
Geef eerst een redenering aan de hand van de formule en controleer je antwoord eventueel met een grafiek op de GR.

$y = \frac{50}{x^2+2}$

$y = \frac{100}{2+3 \cdot 0{,}95^x}$

$y = -3x^5 + 400x^2$

$y = \frac{4}{x} + 3$

$y = 100 \cdot 0{,}97^x + 6$

$y = 3\,(e^{-x} + e^x)$

$y = -3x^4 + 9x^2$

$y = 2x + \frac{3}{x+5}$

Opgave 71

We bekijken in deze opgave alleen zogenaamde veeltermfuncties of polynoomfuncties. Dat zijn functies van de vorm: $y = a\,x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + \ldots$

Enkele voorbeelden zijn:

$y = 2x^2 + 6x - 19$

$y = -0{,}2x^2 + 6x - 19$

$y = x^4\,(4x^3 - 5)$

$y = \frac{3x^4-15x^2-36}{3}$

In eerste instantie zien de derde en vierde functie er niet als polynoomfunctie uit.

a. Leg uit dat het toch polynoomfuncties zijn.

b. Beschrijf het oneindig gedrag van deze vier polynoomfuncties.
c. Kun je algemene regels formuleren met betrekking tot het oneindig gedrag van polynoomfuncties.

Opgave 72

We gaan het oneindig gedrag van productfuncties bekijken. Steeds zijn f en g gegeven en bekijken we de productfunctie $f \cdot g$.

Onderzoek het oneindig gedrag aan de hand van de formules.

$f(x) = 2x - 3$	$g(x) = -4x + 10$
$f(x) = 3x + 6$	$g(x) = x^3 - 10$
$f(x) = 10x + 5$	$g(x) = \frac{4}{x^2}$
$f(x) = 20 \cdot 0{,}95^x$	$g(x) = 5 + 2{,}5^x$

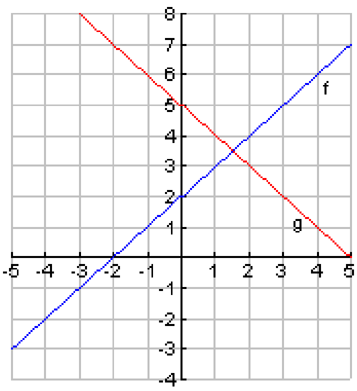
Opgave 73
We gaan het oneindig gedrag van quotiëntfuncties bekijken.
We nemen dezelfde functies als bij opgave 9.

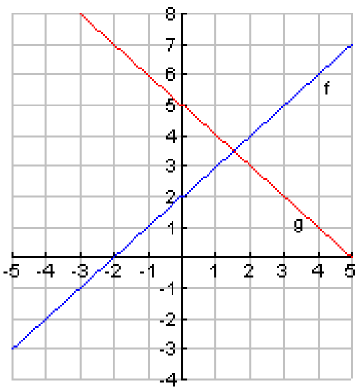
Onderzoek het oneindig gedrag van de quotiëntfunctie $\frac{f}{g}$ aan de hand van de formules.

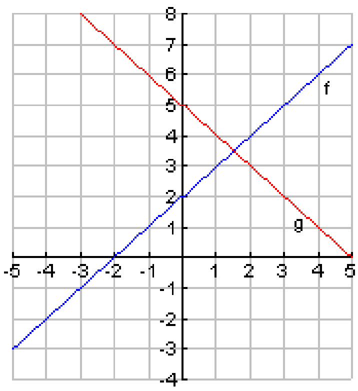
Als twee functies f en g gegeven zijn, kun je de grafieken van de verschilfunctie, de product-functie en de quotiëntfunctie proberen te schetsen. Maak daarvoor gebruik van 'bijzondere punten' (bijvoorbeeld de nulpunten) en het oneindig gedrag van f of g. Natuurlijk heb je dan vaak nog geen definitief beeld van de grafiek. Dat zullen we later verder onderzoeken.

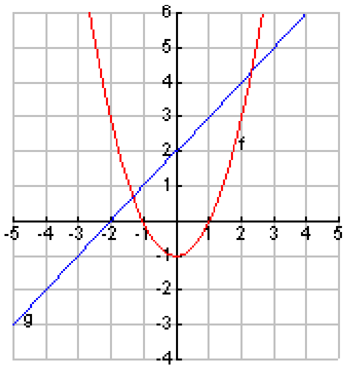
WB Opgave 74

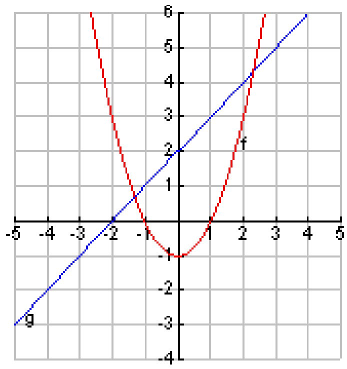
Schets op basis van de twee gegeven grafieken de grafiek van de verschil-, de product- en de quotiëntfunctie. Onderzoek daarvoor eerst het oneindig gedrag en bepaal de 'bijzondere punten'.

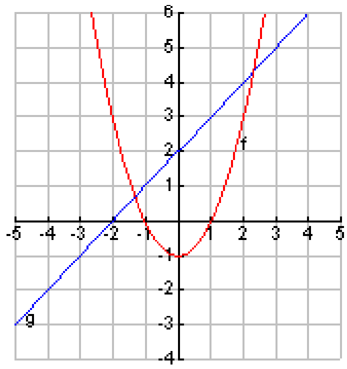












☝ De grafiek van de **verschilfunctie van *f* en *g*** vind je door voor elke x de waarde van $f(x) - g(x)$ te bepalen.
De grafiek van de **productfunctie van *f* en *g*** vind je door voor elke x de waarde van $f(x) \cdot g(x)$ te bepalen.
De grafiek van de **quotiëntfunctie van *f* en *g*** vind je door voor elke x de waarde van $f(x) / g(x)$ te bepalen.
Gebruik hierbij *bijzondere punten* van de grafiek van f of g, zoals de nulpunten.
Gebruik ook het *oneindig gedrag*, d.w.z. wat er met de functiewaarden gebeurt als x erg groot wordt of als x erg klein (negatief) wordt.

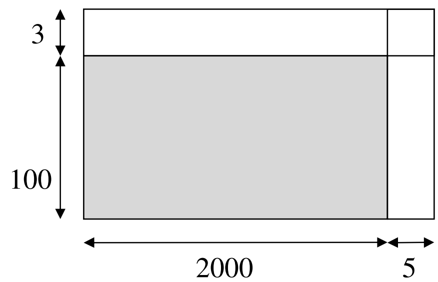
16 Product- , quotiënt- en kettingregel

Veranderingen bij een product

Opgave 75

Een school heeft 100 docenten en betaalt elke docent 2000 euro per maand. Er zijn voor de school volgend jaar hogere loonkosten om twee redenen. De school heeft volgend jaar 3 extra docenten en bovendien stijgt het maandsalaris van een docent met 5 euro.

a. Fina zegt dat de maandelijkse loonkosten voor de school zullen stijgen met $3 \cdot 5 = 15$ euro. Ben jij het daarmee eens?
b. Finy redeneert: als het salaris 2000 euro zou blijven zouden de maandelijkse loonkosten stijgen met … en als het aantal docenten 100 zou blijven, zouden de maandelijkse loonkosten stijgen met … .
   Nu beide stijgingen het geval zijn zullen de maandelijkse loonkosten voor de school stijgen met ….
c. Bereken precies hoeveel de maandelijkse loonkosten zullen stijgen.
d. Kun je de loonkostenstijging terug vinden in het plaatje hiernaast (dat niet op schaal is getekend)?



Opgave 76

We gaan verder met de context van opgave 75. Het maandsalaris noemen we *s* en het aantal docenten *a*. De maandelijkse loonkosten noemen we *K*.

Δa is de toename van a , Δs is de toename van s en ΔK is de toename van K.

dit jaar	$K =$	$a \cdot s$
volgende jaar	$K =$	$\underline{(a+\Delta a) \cdot (s+\Delta s)}$
toename	$\Delta K =$	…….

Laat zien - door haakjes uit te werken - dat $\Delta K = a \cdot \Delta s + s \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta s$.

Als het over kleine veranderingen gaat is $\Delta a \cdot \Delta s$ extra klein (namelijk een product van kleine getallen; dit kun je ook in het plaatje van opgave 12d zien). Als we dit product verwaarlozen, vinden we: $\Delta K \approx a \cdot \Delta s + s \cdot \Delta a$.

Opgave 77

Een rechthoek meet 30 bij 60.

De korte zijde neemt toe met 2 en de lange zijde neemt af met 3.
a. Hoeveel verandert de oppervlakte dan ongeveer, volgens deze benadering?

De korte zijde neemt toe met een klein beetje en de lange zijde neemt af met twee keer zo veel.
b. Leg uit dat de oppervlakte dan ongeveer gelijk blijft.

✚ Opgave 78
Hoeveel exemplaren een winkelier van een zeker product verkoopt, hangt af van de prijs die hij er voor vraagt.
De vraag van de winkelier is 'hoe verandert de opbrengst als ik de prijs een klein beetje verander?'
Met een wiskundig model proberen we dit in beeld te brengen. De prijs noemen we p, het verkochte aantal q. De opbrengst is $p \cdot q$.
a. Leg uit dat $\Delta O \approx p\,\Delta q + q\,\Delta p$.
b. Leg uit dat $\frac{\Delta O}{\Delta p} \approx p\,\frac{\Delta q}{\Delta p} + q$.
c. Leg uit dat $O' \approx p\,q' + q$.

Extra
De prijselasticiteit van een product is gedefinieerd als de relatieve hoeveelheidsverandering gedeeld door de relatieve prijsverandering: $\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}}$.

Een stelling in de economie zegt: als de prijselasticiteit groter is dan -1, stijgt de opbrengst. Dat is als volgt te begrijpen.

Als $\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} > -1$,

dan $\frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} + 1 > 0$,

dus $\frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p} + 1 > 0$,
dus $p\,\frac{\Delta q}{\Delta p} + q > 0$.
Dit is $\frac{\Delta O}{\Delta p}$ en positieve ΔO betekent dat O toeneemt.

De productregel

⌛ *Centrale vraag: Hoe bereken je afgeleide van de productfunctie $P = 8t \cdot 1{,}02^t$?*

In opgave 78 hebben we de prijs als onafhankelijke variabele genomen (dat wil zeggen: we hebben gekeken hoe de hoeveelheid en de opbrengst als functie van de prijs veranderen.)

We kunnen ook de prijs en verkochte hoeveelheid beide in de tijd bekijken. De tijd is dan de onafhankelijke variabele.

Bijvoorbeeld: $p = 0{,}1t + 2{,}10$ en $q = 1440 - 8t$.
Dan is $O = (0{,}1t + 2{,}10)(1440 - 8t) = -0{,}8t^2 + 127{,}2t + 3024$.
Als we geïnteresseerd zijn in de maximale opbrengst kunnen we de haakjes uitwerken (dat geeft $-0{,}8t^2 + 127{,}2t + 3024$) , deze uitdrukking differentiëren en de afgeleide gelijkstellen aan 0.

Dat is onmogelijk als de functies p en q anders zijn, zoals in het volgende voorbeeld.

Opgave 79

$O = 1{,}80 \cdot 1{,}02^t\,(1440 - 8t)$
Om deze functie te differentiëren moeten we de afgeleide kennen van $1{,}02^t \cdot 8t$.
Iemand denkt dat de afgeleide $1{,}02^t \cdot \ln(1{,}02) \cdot 8$ is.
a. Kun je zeggen hoe hij geredeneerd heeft?
b. Ga na dat deze afgeleide niet goed kan zijn, bijvoorbeeld door op de GR de afgeleide in $t = 0$ te berekenen.

Wat dan wel de goede afgeleide is gaan we hier verder uitzoeken.
We nemen weer $\Delta O \approx p\,\Delta q + q\,\Delta p$ als uitgangspunt.
Deel door Δt ; dan krijg je $\frac{\Delta O}{\Delta t} \approx p\,\frac{\Delta q}{\Delta t} + q\,\frac{\Delta p}{\Delta t}$.
Laat vervolgens Δt tot 0 naderen. Dat geeft $O' = p \cdot q' + q \cdot p'$
b. Ga deze twee stappen na.
c. Gebruik deze regel om de afgeleide van $1{,}02^t \cdot 8t$ te berekenen.

Opgave 80
Bereken met deze productregel de afgeleide van de volgende productfuncties. Merk op dat je soms de haakjes kan uitwerken waarna je geen productregel meer nodig zou hebben.
$y = (x^2 - 4)(3x + 5)$
$y = (5e^x - 6)(x^3 + 4)$
$y = 100 \cdot 0{,}98^x\,(3x + 10)$
$y = 3x^2 \ln(x)$

☝ Productregel: Als $p = f \cdot g$, dan $p' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Quotiëntregel

Na de afgeleide voor productfuncties gaan we op zoek naar de afgeleide voor quotiëntfuncties.

⌛ *Centrale vraag: Hoe bereken je afgeleide van de quotiëntfunctie* $Q = \frac{1{,}02^x}{x^2}$ *?*

WB Opgave 81

We gaan de afgeleide zoeken van $Q = \frac{1{,}02^x}{x^2}$. Daarvoor maken we een aantal stappen.
Schrijf rechts de uitleg waarom de bewering links juist is.

$Q \cdot x^2 = 1{,}02^x$	
afgeleide van $Q \cdot x^2$ = afgeleide van $1{,}02^x$	
$Q' \cdot x^2 + Q \cdot 2x = 1{,}02^x \cdot \ln(1{,}02)$	
$Q' = \frac{1{,}02^x \cdot \ln(1{,}02) - Q \cdot 2x}{x^2}$	
$Q' = \frac{1{,}02^x \cdot \ln(1{,}02) - \frac{1{,}02^x}{x^2} \cdot 2x}{x^2}$	
$Q' = \frac{x^2 \cdot 1{,}02^x \cdot \ln(1{,}02) - 1{,}02^x \cdot 2x}{(x^2)^2}$	

Algemeen geldt: Als $Q = \frac{f}{g}$, dan $Q' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$.

☝ Als $Q = \frac{teller}{noemer}$, dan $Q' = \frac{noemer \cdot afg.(teller) - teller \cdot afg.(noemer)}{noemer^2}$

Opgave 82

Bereken met deze quotiëntregel de afgeleide van de volgende quotiëntfuncties. Merk op dat je soms de formule anders kan schrijven zodat je geen quotiëntregel meer nodig zou hebben.

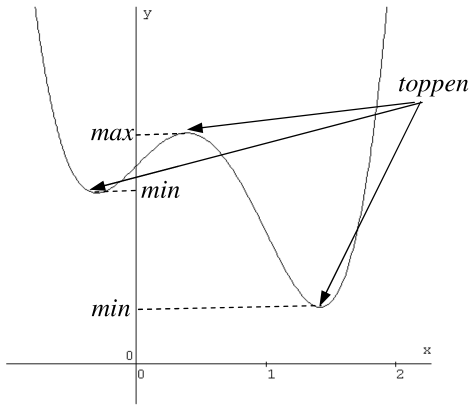
$y = \frac{x^2-4}{3x+5}$

$y = \frac{5e^x-6}{x^3+4}$

$y = \frac{50}{x^2} + 2x - 10$

$y = \frac{\ln(x)}{3x^2}$

De *extreme waarden* van een functie zijn de maximale en minimale waarden: de y-coördinaten van de toppen van de grafiek.
De functie in het voorbeeld hiernaast heeft drie extremen; die zijn op de y-as aangegeven.



Opgave 83

Gegeven is de functie $f(x) = (x-1)^2(x-4)$.

a. Bepaal het oneindig gedrag van deze functie en beredeneer daarmee dat de functie twee of geen *extremen* heeft.
b. Bereken met behulp van de afgeleide de extremen en schets de grafiek van de functie (bereken ook de snijpunten met x-as).
c. Controleer met de GR de grafiek.

Opgave 84

Gegeven is de functie $f(x) = -3x^4 + 9x^2$.

a. Bepaal het oneindig gedrag van deze functie en beredeneer daarmee dat de functie één of drie extremen heeft.
b. Bereken met behulp van de afgeleide de extremen en schets de grafiek van de functie (bereken ook de snijpunten met x-as).
c. Controleer met de GR de grafiek.

Opgave 85

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$.

a. Bepaal het oneindig gedrag van deze functie.
b. Bereken met behulp van de afgeleide de extremen en schets de grafiek van de functie (bereken ook de snijpunten met x-as).
c. Controleer met de GR de grafiek.

Opgave 86

In de gemeenteraad van een dorp wordt over de woningnood gesproken.
De volgende cijfers worden gepresenteerd:

Jaar	1970	1980	1990	2000
Aantal woningen W	3120	3523	3926	4329
Aantal Inwoners I	9340	10741	12352	14204

Uit deze tabel lees je o.a. af dat er in 2000 in het dorp 4329 woningen waren en dat daarin totaal 14204 mensen woonden.

a. Toon aan dat het aantal woningen lineair en het aantal inwoners (bij benadering) exponentieel groeit.

Belangrijk is om te kijken naar het aantal mensen per woning. Dit noemen we de bezettingsgraad.

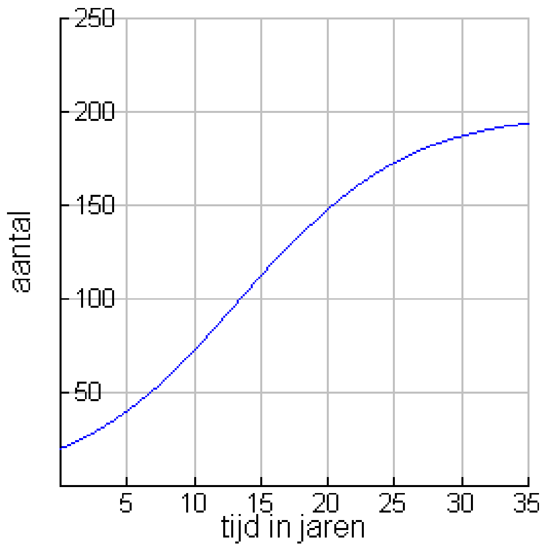
Voor de bezettingsgraad B geldt: $B = \frac{14204 \cdot 1{,}014^t}{4329+40{,}3t}$, waarbij t het aantal jaren is na 2000.

b. Leg uit hoe deze formule uit de tabel volgt.
c. Bereken de afgeleide en laat hiermee zien dat B altijd stijgt.

Ondanks het feit dat je nu weet dat B steeds stijgt, ken je het oneindig gedrag van de functie B nog niet.

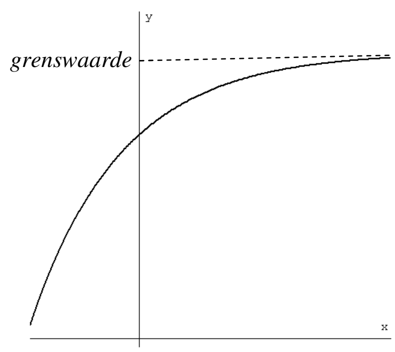
d. Onderzoek het oneindig gedrag van de functie B.
e. Wat betekent dat voor de woningnood in het dorp?

Opgave 87
Omdat een diersoort met uitsterven bedreigd wordt, wordt een aantal exemplaren in een reservaat uitgezet.
De grootte van de populatie in het reservaat kan benaderd worden met de formule: $A = \frac{200}{1+9 \cdot 0{,}85^t}$, waarbij t de tijd is in jaren.



a. Hoe groot is het aantal uitgezette exemplaren op tijdstip $t = 0$ en hoe snel groeit de populatie op $t = 0$ volgens dit model?

In de grafiek zie je dat de populatie steeds toeneemt. Dat kun je ook met de formule (dus zonder een grafiek te gebruiken) laten zien.
b. Doe dat.
c. Toon met behulp van de afgeleide aan dat de populatie steeds toeneemt.
d. Maak een schets van de afgeleide en toon daarmee aan dat de populatie in het begin toenemend stijgt en later afnemend stijgt. Geef ook het omslagpunt, dat is het tijdstip waarop de populatie het snelst groeit.
e. Tot welke grenswaarde stijgt de populatie volgens dit model?



Opgave 88

Een geneesmiddel wordt door middel van een injectie in het bloed gebracht. De concentratie C na t minuten kan benaderd worden met de formule: $C = \frac{225t}{t^2+40t+225}$.

a. Bereken met behulp van de afgeleide de maximale concentratie.

Van geneesmiddelen mag je verwachten dat de concentratie na toedienen stijgt, een maximum bereikt en daarna op den duur weer uit het bloed verdwijnt.

b. Onderzoek met behulp van de afgeleide of deze formule daaraan voldoet.

Opgave 89

De Nederlandse wegen zijn overvol. Hoe kunnen we ervoor zorgen dat de doorstroming van auto's zo groot mogelijk is?
Sommigen denken dat het verhogen van de snelheid een middel is. Daar kijken we in deze opgave naar.

Neem aan dat alle auto's op een volle weg achter elkaar rijden met dezelfde snelheid (v m/sec). Natuurlijk houdt iedere auto voldoende afstand tot zijn voorganger, zeg $2v$ meter.
Om te kunnen rekenen in ons model nemen we aan dat alle auto's 5 meter lang zijn.

a. Leg uit dat het aantal auto's N dat een vast punt langs de weg in één minuut passeert, gelijk is aan $\frac{60v}{2v+5}$.

b. Wat kun je met dit model zeggen over de maximale doorstroming (de grootste waarde van N)?

In een nauwkeuriger model hangt de afstand tussen de auto's op een andere manier af van de snelheid. Bij een hogere snelheid neemt de remweg, de veilige afstand tot de voorganger, meer dan evenredig toe.
Die remweg R (in meter) is $a \cdot v^2$, waarbij de constante a afhankelijk is van de auto.
De formule voor de doorstroming wordt nu: $N = \frac{60v}{av^2+5}$.

c. Wat kun je met dit model zeggen over de maximale doorstroming als $a = 0{,}1$.

De snelheid met maximale doorstroming is afhankelijk van a.

d. Bereken met behulp van de afgeleide hoe deze snelheid met maximale doorstroming afhangt van a.

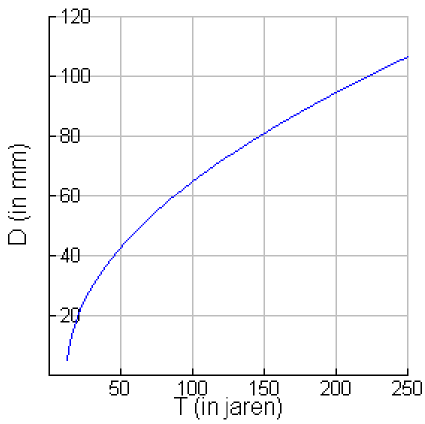
Kettingen van functies

⌛ *Centrale vraag: Hoe schakel je functies na elkaar?*

Opgave 90

Door de stijging van de gemiddelde temperatuur op aarde worden gletsjers steeds kleiner. Het ijs verdwijnt van plaatsten die eeuwenlang door gletsjers waren bedekt. Waar het ijs verdwenen is ontstaan vaak korstmossen. Met behulp van deze mossen is het mogelijk bij benadering het jaartal te bepalen waarop het ijs daar verdwenen is.

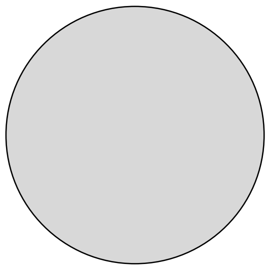
De mosgroei treedt min of meer cirkelvormig op en er is een duidelijk verband tussen de diameter van het korstmos en de leeftijd. Hoe groter de diameter van het korstmos, hoe ouder het korstmos is en dus hoe langer het geleden is dat die plaats nog bedekt was door gletsjerijs. Op grond van een aantal metingen is de grafiek hieronder getekend. De grafiek geeft het verband tussen het aantal jaren T dat de plaats ijsvrij is en de diameter D van het korstmos op die plaats.
Een formule die dit verband geeft is: $D = 6{,}9\sqrt{T-12}$.



De formule is eigenlijk in deze vorm onhandig want in de praktijk meet men de diameter D en wil men T weten. Daarom gebruiken we liever de formule
$T = (\frac{D}{6{,}9})^2 + 12$.

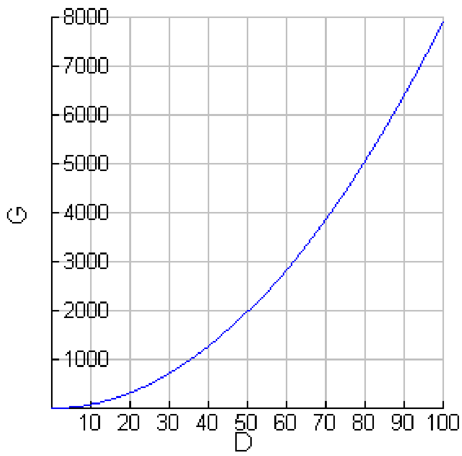
a. Laat zien hoe vanuit de eerste formule de tweede formule gevonden kan worden.

Hiernaast zie je een cirkelvormige schets van een korstmos. Stel dat dit op ware grootte zou zijn.



b. Bereken hoe lang het duurt voordat de diameter van het korstmos verdubbeld is.

Omdat het korstmos in een cirkelvorm groeit, is het vrij eenvoudig een grafiek te maken van het verband tussen de diameter D en de oppervlakte van het korstmos.
De formule bij dit verband is bij benadering $O = 0{,}79\,D^2$, waarbij O = oppervlakte in mm^2 en D = diameter in mm.



We kijken naar het verband tussen O en T (het aantal jaren dat de bodem vrij van ijs is). Dit verband is lineair en kan dus beschreven worden met een formule van de vorm $O = aT+b$.

c. Toon dit aan en bereken a en b.

In deze laatste vraag zie je hoe in de wiskunde nieuwe formules gemaakt kunnen worden door het schakelen van functies.

Voorbeeld
Door de volgende drie functies te schakelen kun je nieuwe functies maken:
$y = e^x$, $y = 3x$ en $y = x^2$.
Je mag iedere functie maar een keer gebruiken.
Als je begint met de eerste functie, daarna de tweede gebruikt en dan de derde, krijg je:

$$x \xrightarrow{e^{\cdots}} e^x \xrightarrow{3\cdot\ \dots} 3e^x \xrightarrow{(\dots)^2} (3e^x)^2$$

Het resultaat is dus de functie $x \to (3e^x)^2$.
Je hoeft de uitkomst niet te vereenvoudigen. [Als je dat wel doet, krijg je $x \to 9e^{2x}$.]

Opgave 91
Door de drie functies in een andere volgorde te schakelen kun je nog vijf andere functies maken.
Welke?

Je kunt het schakelen van functies goed oefenen met de applet *algebrapijlen* op www.wisweb.nl

Omgekeerd is het soms handig om een gegeven functie te zien als een schakeling van eenvoudige functies. We zeggen dan dat we de functie schrijven als *ketting*. Bijvoorbeeld de functie $y = 9e^{2x}$ kun je schrijven als ketting van achtereenvolgens: $y = 2x$, $y = e^x$ en $y = 9x$. Maar het kan ook anders, zoals je hierboven gezien hebt.
Dit schrijven als ketting van eenvoudige functies is handig bij het oplossen van vergelijkingen en het bepalen van de inverse functie, maar ook - en zo zullen we het straks nodig hebben - om ingewikkeldere functies te differentiëren.

Opgave 92
Schrijf de volgende functies als ketting van eenvoudige functies.
$y = (\frac{1}{x} + 3)^2$
$y = \frac{1}{(x+3)^2}$
$y = 3 + \frac{1}{x^2}$

Wat zijn "eenvoudige" functies? Dat zijn de zogenaamde *standaardfuncties*:
$y = ax+b$, $y = x^n$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = b\,g^x$, $y = {}^g\log(x)$, $y = e^x$, $y = \ln(x)$.
Door deze te schakelen kun je bijvoorbeeld de volgende functies maken:
$y = 2\,e^x + 5$; $y = \ln(x^3+6)$; $y = 4 \cdot 0{,}9^{x-3}$; $y = {}^3\log(x+5)$; $y = \ln(e^x+4)$; $y = \frac{3}{3\ln(x) - 5}$

Opgave 93
Laat zien hoe.

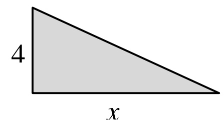
De standaardfuncties zijn:
$y = ax+b$, $y = x^n$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = b\,g^x$, $y = {}^g\log(x)$, $y = e^x$, $y = \ln(x)$.
Door deze achter elkaar te schakelen kun je functies met complexe formules maken.

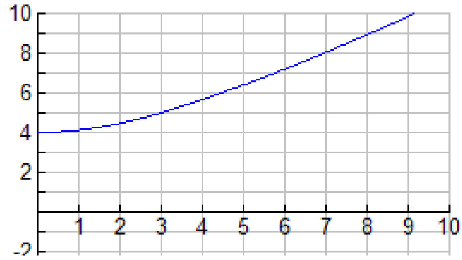
Kettingregel

We kunnen alle standaardfuncties differentiëren. We gaan nu in een aantal stappen uitleggen hoe je de afgeleide kunt bepalen van een ketting van standaardfuncties.

Centrale vraag: hoe bereken je de afgeleide van een ketting van standaardfuncties?

Opgave 94
Bekijk een rechthoekige driehoek met rechthoekzijden 4 en x.
De schuine zijde is dan volgens Pythagoras: $\sqrt{16+x^2}$.
Hiernaast staat de grafiek van $y = \sqrt{16+x^2}$.





a. Neem $x = 3$ en bepaal de helling van de grafiek in dat punt, bijvoorbeeld met $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als x toeneemt van 3 tot 3,001.
b. Wat zegt deze helling over de lengte van de schuine zijde?

Iemand redeneert: $y = (16 + x^2)^{0,5}$, dus is de afgeleide $y' = 0,5\,(16 + x^2)^{-0,5}$.
c. Toon aan deze afgeleide fout is.

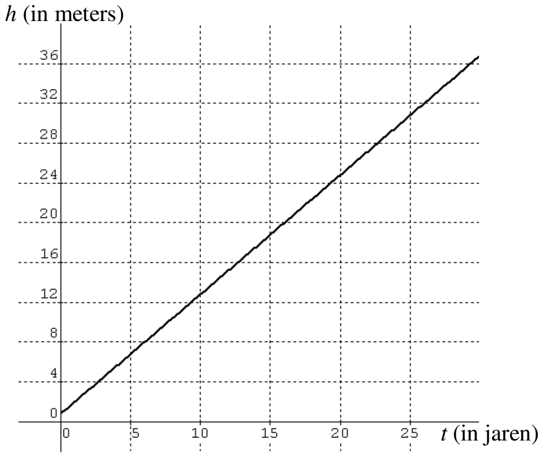
Opgave 95
We hebben al eerder gezien dat de afgeleide van e^{4x} niet gelijk is aan e^{4x}.
Wat is wel de afgeleide?

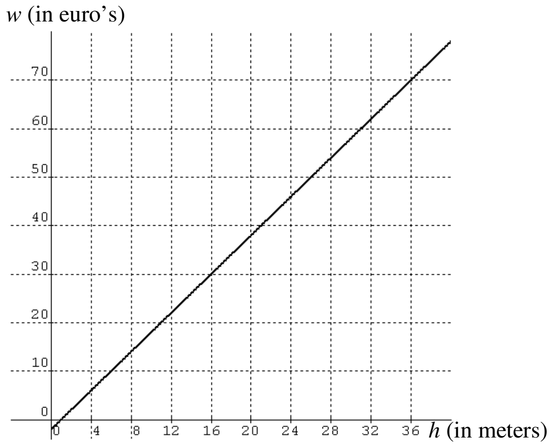
+ Opgave 96
We bekijken de functie $S = 100 \cdot 0,9^t$. Hierin is S de hoeveelheid straling van een radioactieve stof en is t de tijd in jaren.
a. Bereken $\frac{dS}{dt}$. Dit is de verandering van de hoeveelheid straling per jaar.

De formule $S_m = 100 \cdot 0,9^{\frac{1}{12}x}$ geeft de hoeveelheid straling na x maanden.
b. Leg uit dat beide formules dezelfde situatie beschrijven.
c. Bedenk wat binnen deze context de betekenis van $\frac{dS_m}{dx}$ is.
d. Hoe verhoudt $\frac{dS_m}{dx}$ zich tot $\frac{dS}{dt}$?

WB Opgave 97

Bekijk de volgende functies $h(t) = 1{,}2t + 0{,}8$ en $w(h) = 2h - 2$.
$h(t)$ is de hoogte van een boom (in meters) als hij t jaren oud is.
$w(h)$ is de economische waarde van de boom als hij h meter hoog is.
Hieronder staan de grafieken van deze functies.





We bekijken een boom van 6 jaar.

a. Lees via de grafieken af hoeveel de waarde van deze boom is.
b. Bereken met behulp van de formules de waarde van deze boom.

Als de leeftijd van de boom tien jaar toeneemt zal de waarde van de boom ook toenemen.

c. Geef op het werkblad in de grafieken aan met hoeveel de waarde van de boom toeneemt.
d. Maak een formule voor w uitgedrukt in t en bepaal hiermee hoeveel de waarde van de boom per jaar zal toenemen.

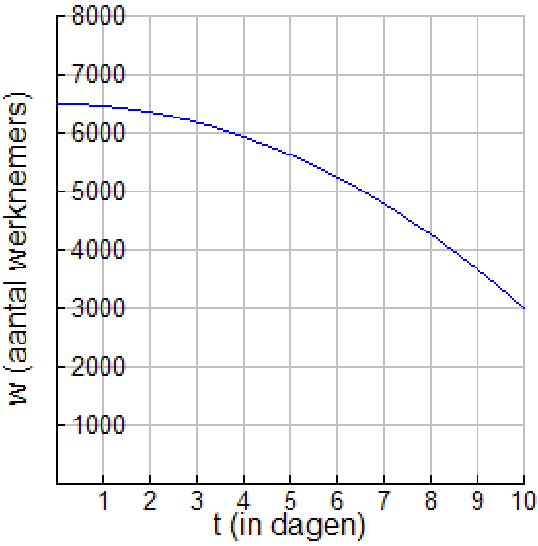
Opgave 98

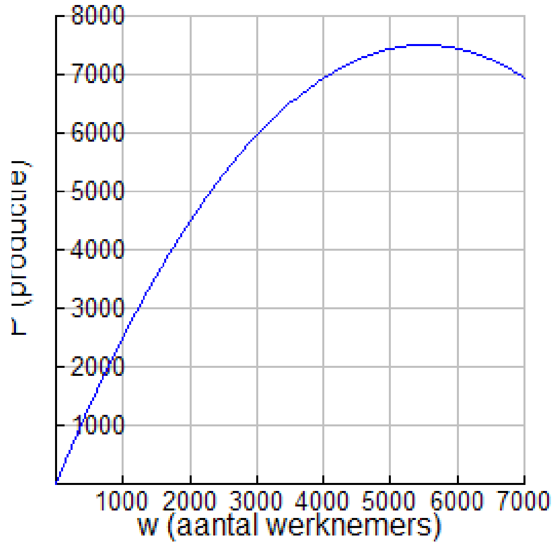
In opgave 34 is sprake van een ketting van twee functies: hij is een schakeling: $t \rightarrow h \rightarrow w$, met $h(t) = 1{,}2t + 0{,}8$ en $w(h) = 2h - 2$.
Een formule voor de ketting is $w(t) = 2(1{,}2t + 0{,}8) - 2$.

a. Bereken $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}h}$ en $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$.
b. Wat is het verband tussen deze drie afgeleides?

Opgave 99

Een groot bedrijf wordt getroffen door een griepgolf. Binnen enkele dagen was het aantal aanwezige werknemers behoorlijk afgenomen. Dit zie je ook in de linker grafiek terug. De bedrijfsleider beschikt over gegevens met betrekking tot het verband tussen productie P en het aantal aanwezige werknemers W. Zie de rechter grafiek.





a. Bepaal met deze grafieken de productie P op $t = 3$.
b. Lees in de linker grafiek $\frac{dw}{dt}$ af in $t = 3$ en zeg wat deze uitkomst betekent in deze context.

Bij $t = 3$ hoort $w = 6200$.
c. Lees in de rechter grafiek af hoe groot $\frac{dP}{dt}$ is in $W = 6200$ en zeg wat deze uitkomst in deze context betekent.

We willen weten hoe de productie op $t = 3$ verandert, dus hoe groot $\frac{dP}{dt}$ is.
d. Beredeneer met $\frac{dw}{dt}$ en $\frac{dP}{dw}$ hoe groot $\frac{dP}{dt}$ is.

Opgave 100
Het licht van een lantaarnpaal valt op de grond. De lichtsterkte S onder de lantaarnpaal op een plaats P hangt af van de afstand x (meter) van P tot de lantaarnpaal. Er geldt: $S = \frac{100000}{(100+x^2)^{1,5}}$.
Deze formule kan als een ketting van functies geschreven worden: $x \rightarrow u \rightarrow S$.
Hierbij is $u = 100 + x^2$ en $S = 100.000 \cdot u^{-1,5}$.
a. Controleer of deze twee functies samen inderdaad de hierboven formule voor S geven.
b. Bereken de afgeleide $\frac{dS}{dx}$ met behulp van $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dS}{du}$.

Conclusie
In opgave 99 heb je gezien dat je de afgeleide van een ketting vindt door de afgeleiden van de schakels (de functies die geschakeld worden) te vermenigvuldigen.
☞ *Bij de ketting* $x \rightarrow u \rightarrow f$ *geldt:* $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.
In woorden: ‘afgeleide van f naar x’ = ‘afgeleide van f naar u’ keer ‘afgeleide van u naar x’

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(x) = (x^2+1)^3$.

$x \rightarrow u \rightarrow f$: dus $u = x^2+1$ en $f = u^3$

dan $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \cdot 3u^2 = 2x \cdot (3u+1)^2$.

In woorden:

- als x met 1 toeneemt, neemt u met $2x$ toe
- als u met 1 toeneemt, neemt f met u^2 toe
- dus als x met 1 toeneemt, neemt f met $2x \cdot 3u^2$ toe

(groter wil zeggen: 'als we de raaklijn volgen'.)

✚ Opgave 101

Gegeven is de ketting $f(u(x))$. Loop het onderstaande bewijs van de kettingregel na.

De ketting bestaat uit $x \rightarrow u(x) \rightarrow f(u(x))$	
We gebruiken de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - methode *beginpunt* $x \rightarrow y = f(u(x))$ *eindpunt* $x+h \rightarrow y = f(u(x+h))$	
Dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u(x+h))-f(u(x))}{h}$	
Dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u(x+h))-f(u(x))}{u(x+h)-u(x)} \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$	
We noemen in het eerste stuk $u(x)$ even t en $u(x+h)$ even $t+k$. Dan krijgen we $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t+k)-f(t)}{k} \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$	
Als $h \rightarrow 0$, dan ook $k \rightarrow 0$	
Dus $y' = f'(t) \cdot u'(x)$, ofwel $y' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$	

Opgave 102

Gebruik de kettingregel om de afgeleide van de volgende functies te berekenen:

$y = (x^2+3)^5$

$y = 4\,\mathrm{e}^{-x^2}$

$y = \sqrt{x^2-5x}$

$y = 30(x^2+4)^{1,5}$

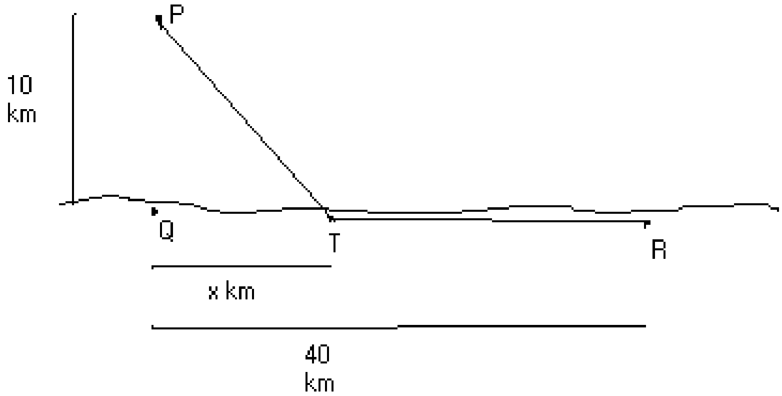
$y = 5 + 2\,(3x-6)^5$

$y = 4 \cdot 0{,}9^{3x-6}$

$y = 4 + \ln(x^2+4)$

$y = 3(\sqrt{x}+6)^3$

Opgave 103
Vanuit een olieplatform voor de kust wordt een pijpleiding gelegd naar een olieraffinaderij op het vasteland.
Het olieplatform P ligt 10 km uit de kust. Punt Q ligt op de kust en is het punt dat het dichtste bij P ligt (dus $PQ = 10$).
Vanaf punt Q is het 40 km naar de olieraffinaderij R. Dus $QR = 40$.
De kosten voor een kilometer pijpleiding over land zijn 2000 euro. Een kilometer pijpleiding in zee kost 12000 euro.
Tussen punt Q en punt R ligt op x km van punt Q het punt T. Zie de figuur.



Men besluit vanaf punt P een rechtstreekse pijpleiding door zee naar een punt T aan te leggen en daar vandaan over land een pijpleiding naar punt R.

a. Wat zijn de kosten als voor T het punt Q wordt gekozen? En als voor T het punt R wordt gekozen?
b. Wat zijn de kosten als voor T het punt tussen Q en R wordt gekozen, op afstand 10 km van Q?

Als voor T het punt tussen Q en R wordt gekozen, op afstand x km van Q zijn de kosten (in duizenden euro's): $12\sqrt{100+x^2} + 80 - 2x$.

c. Toon aan dat deze formule juist is.
d. Bereken m.b.v. de afgeleide voor welke waarde van x de kosten minimaal zijn.

Als de afstand QR niet 40 km was geweest maar a km, dan zou de kostenformule zijn:
$12\sqrt{100+x^2} + 2a - 2x$.

e. Onderzoek hoe de ligging van het optimale punt T van a afhangt.

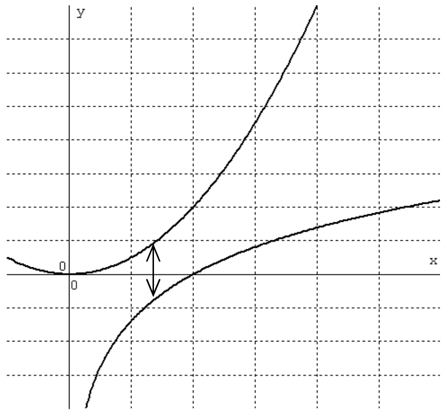
Opgave 104
Bereken de afgeleide van de volgende functies (a is een constante):

a. $g(x) = \frac{\ln(2x)}{2x} + 3a$
b. $h(x) = 4\sqrt{x^2+5} + 3a - 2x$
c. $i(x) = x\,(x-a)^2$

Opgave 105

We bekijken de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = x^2$.

a. Bereken de minimale verticale afstand tussen de grafieken van f en g.

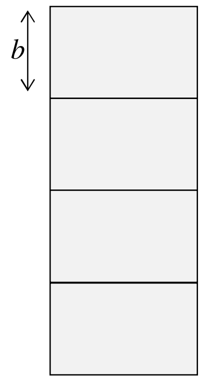


We bekijken de grafieken van de functies $\frac{f}{g}$ en $\frac{g}{f}$.
Beide functies hebben een extreme waarde.

b. Wat is er te vertellen over de bijbehorende x-coordinaten (zonder die x uit te rekenen)?

Opgave 106

Vier gelijke opslagloodsen worden in een blok gebouwd. Zie de figuur. Het voordeel hiervan is dat tussen de verschillende blokken slechts één wand geplaatst hoeft te worden.
Alle wanden worden op dezelfde wijze gemaakt en zijn per meter even duur.
De totale oppervlakte van alle loodsen bij elkaar moet 4000 m^2 zijn.



Omdat er zo goedkoop mogelijk gebouwd moet worden, moet geprobeerd worden de totale muurlengte te minimaliseren.

We stellen de breedte van een loods op b meter.

a. Bereken de totale muurlengte als $b = 20$ meter.
b. Toon aan dat de totale muurlengte is $8b + \frac{5000}{b}$.
c. Maak een schets van de grafiek van de totale muurlengte. Bespreek daarvoor eerst het oneindige gedrag en het gedrag in de buurt van $b = 0$.
d. Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van b de totale muurlengte minimaal is.

Stel dat de totale oppervlakte van de vier loodsen niet 4000 m^2 moeten bedragen maar A m^2.

e. Maak ook nu een formule voor de totale muurlengte (uitgedrukt in b en A) en bereken bij welke b (uitgedrukt in A) nu de totale muurlengte minimaal is.

Opgave 107

Koffie die net gezet is en direct in een kopje geschonken wordt, koelt af. Natuurkundigen hebben het volgende verband gevonden tussen de koffietemperatuur K en de tijd t die is verlopen sinds het inschenken: $K = 20 + 80\,e^{-0{,}2.t}$

Volgens deze formule daalt K als t toeneemt. Maar de koffietemperatuur daalt steeds minder snel. Dit is zowel aan de formule van K als aan de afgeleide $\frac{dK}{dt}$ te zien.

a. Leg uit hoe dit te zien is aan de formule.

b. Leg uit hoe dit te zien is aan de hand van de afgeleide.

c. Wat is het oneindige gedrag van K?

Bij elke temperatuur van de koffie kun je het bijbehorende tijdstip berekenen. Daarvoor moet de formule worden omgeschreven tot een formule voor de tijd t, uitgedrukt in K.
d. Geef deze formule voor t, uitgedrukt in K.

Opgave 108
Door een groothandel worden per jaar 24000 grafische rekenmachines (GR's) verkocht. De groothandel koopt de machines in bij een fabriek. De bestelkosten zijn per bestelling 800 euro. We nemen aan dat de verkoop gelijkmatig over het jaar verdeeld is.
Als een bestelling binnenkomt bij de groothandel, worden de GR's opgeslagen in een pakhuis naast de groothandel. De voorraadkosten bedragen 4 euro per machine (d.w.z. een machine een heel jaar lang in voorraad te houden kost de groothandel 4 euro).

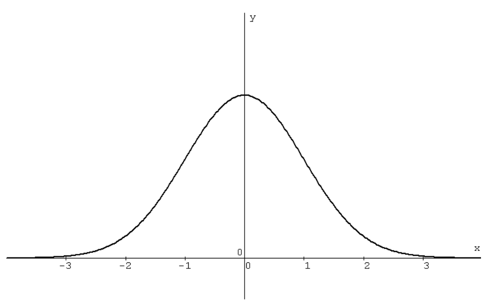
Stel dat de groothandel steeds bestellingen van 6000 grafische rekenmachines bij de fabriek doet.
a. Schets het verband tussen de voorraad GR's en de tijd gedurende het eerste jaar; bereken ook hoe groot de totale kosten zijn. (De rekenmachines kosten zelf natuurlijk ook geld, maar dat laten we buiten beschouwing; het gaat hier om de bestelkosten, tezamen met de voorraad-kosten.)

Stel dat de groothandel steeds x GR's tegelijkertijd bestelt.
b. Toon aan dat de kosten dan zijn: $K = \frac{19200000}{x} + 2x$.
c. Bereken m.b.v. differentiëren bij welke waarde van x de kosten minimaal zijn (dit noemen we de optimale bestelgrootte).

Als er per jaar niet 24000 GR's verkocht worden maar D, dan verandert de kostenformule.
d. Pas de kostenformule aan en bepaal hoe de optimale bestelgrootte afhangt van D.

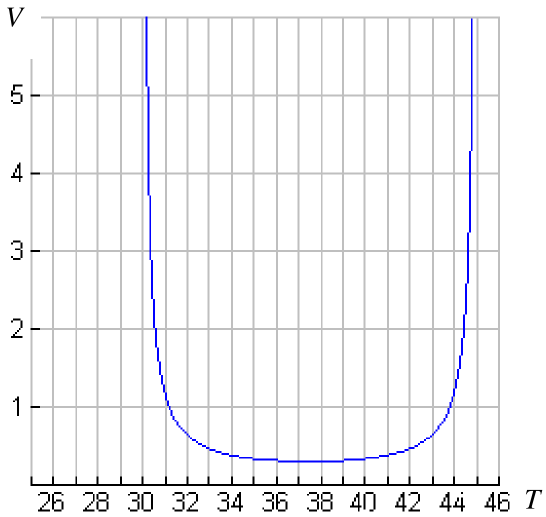
WB Opgave 109
De standaard normale kromme (gemiddelde 0 en standaardafwijking 1) in de statistiek heeft als formule:

$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0,5x^2}$.



a. Toon aan met behulp van differentieren dat de grafiek een maximum heeft bij $x = 0$.
b. Geef op het werkblad in de grafiek aan waar de helling minimaal is (het meest negatief) en bereken bij welke waarde van x dit het geval is.
c. Wat is het oneindige gedrag van de functie?

Opgave 110
Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol. Zij komen voor in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van colibacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen zoveel mogelijk worden nagebootst.
Bij constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd V, dat is de tijd in uren die het experiment moet duren om twee keer zo veel bacteriën te krijgen. Uit waarnemingen blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur T in graden Celsius.



a. Groeit de populatie bij 42^0 C sterker dan bij 40^0 C? Licht je antwoord toe met behulp van bovenstaande grafiek.

Binnen het temperatuurgebied waarin de waarnemingen zijn gedaan, blijkt men het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule: $V = \frac{16,9}{-T^2+75T-1350}$.
b. Bereken met behulp van differentiëren bij welke temperatuur de populatie het snelst groeit.

Bij een experiment voegde men aan de kweekvloeistof een chemisch middel toe om na te gaan of de groei daardoor sterk zou afnemen. Men begon met 242 bacteriën. De temperatuur was constant 35^0 C. Na een uur telde men 1547 bacteriën.
c. Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van het aantal dat zonder gebruik van het chemische middel volgens de formule verwacht had mogen worden.

Opgave 111

De commerciële waarde van een Douglasspar wordt in eerste instantie benaderd met de formule $V(t) = 14t - 450$, waarbij $V(t)$ de waarde (value) van een t-jarige spar is. Deze formule is alleen geldig voor $t > 33$ jaar.

Je kunt echter niet verwachten dat de waarde van zo'n spar lineair blijft stijgen met de tijd. Door onderhoudskosten en mogelijke aantasting door ziekten of zure regen zal de waardestijging verminderen. Ook kan een geldbedrag dat door vroeger kappen beschikbaar komt weer voor nieuwe investeringen worden gebruikt. Dit soort overwegingen leiden er toe dat men i.p.v. met bovengenoemde formule liever werkt met de 'present value' van een boom. Deze 'present value' PV is afhankelijk van het rentepeil r: $PV = e^{-rt} \cdot V(t)$

Als het rentepeil $r = 0{,}06$ (dat wil zeggen dat het rentepercentage 6% is), geldt voor de Douglasspar de formule: $PV = e^{-0{,}06\,t} \cdot (14t - 450)$

a. Schets de grafiek van PV en toon hiermee aan dat het onverstandig is om heel lang te wachten met kappen.

De bomen worden gekapt op het moment dat PV maximaal is.

b. Bereken m.b.v. de GR op welk tijdstip de bomen gekapt worden en laat zien hoe je dit tijdstip m.b.v. differentiëren kunt controleren.

Als het rentepeil verandert, zal het tijdsstip waarop gekapt zal worden ook veranderen.

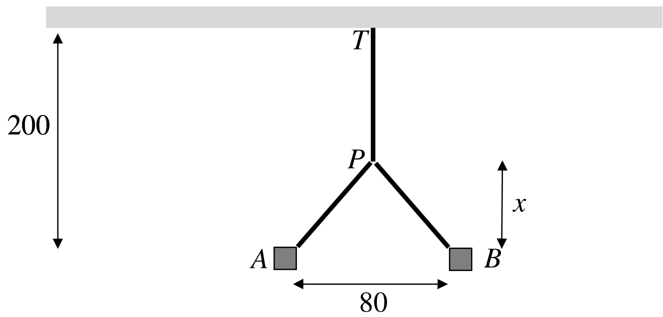
c. Onderzoek met behulp van differentiëren hoe het tijdstip van kappen afhangt van het rentepeil r.

17 Opdrachten en "kale" oefenopgaven

Opgave 112

Twee huizen (*A* en *B*) moeten beide op de hoofdwaterleiding aangesloten worden. Beide huizen liggen 100 meter van de weg in het weiland. De hoofdleiding ligt onder de weg. In eerste instantie dacht men er over om beide huizen apart aan te sluiten op de hoofdleiding: vanuit beide huizen zou dan een leiding naar de weg getrokken worden. Er zou dan 200 meter leiding gelegd moeten worden.

Maar later bedacht men dat het misschien voordelig zou zijn om een Y-verbinding te maken: er komt een aftakking van de hoofdleiding bij *T*, die zich vervolgens bij punt *P* weer splitst in een tak naar *A* en een tak naar *B*. De punten *T* en *P* worden zo gekozen dat ze even ver van *A* als van *B* liggen. Wel moet nog nader bekeken worden waar precies punt *P* komt te liggen. De afstand van punt *P* tot de lijn door *A* en *B* noemen we *x*.



We nemen de afstand tussen de huizen *A* en *B* voorlopig 80 meter.

a. Toon aan dat de totale lengte van de nieuw aan te leggen leiding *L* te berekenen is met de formule:

$$L = \sqrt{x^2 + 1600} + 100 - x\,.$$

b. Toon met behulp van differentieren aan dat *L* minimaal is bij *x* is (ongeveer) 12,9 m.

Ook als de afstand tussen de huizen *A* en *B* niet 80 meter is maar zeg *a* meter, kan een formule gemaakt worden voor de totale lengte van de nieuw aan te leggen leiding:

$$L = 2\sqrt{x^2 + 0{,}25a^2} + 100 - x\,.$$

De waarde van *x* waarvoor *L* minimaal is noemen we x_{opt} (*x*-optimaal)]

Er bestaat een verband tussen *a* en x_{opt}.

c. Schets dit verband.

Opgave 113

Om een pakket te versturen, kun je bij het postkantoor en bij een aantal winkels terecht. Het tarief voor het versturen van een pakket hangt af van de bestemming (de *zone*) en de afmetingen van het pakket (de *maat*). In deze opgave beperken we ons tot balkvormige pakketten die in Nederland verstuurd worden.

De maat wordt berekend door de kortste en de langste zijde van het pakket bij elkaar op te tellen.

In de tabel hieronder staan de tarieven van DPD Pakketshop. Je ziet in de tabel bijvoorbeeld dat een pakket maat Small heeft als de lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld hoogstens 50 cm is.

Bestemming, maat	**Small ≤ 50 cm**	**Medium ≤ 70 cm**	**Large ≤ 90 cm**	**Extra Large ≤ maximaal 175 cm**
tarief	€ 7,00	€ 9,00	€ 11,00	€ 13,00

Bijvoorbeeld: je wilt een pakket van 28 × 31 × 36 cm versturen. De kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld is 64 cm, dus het pakket heeft maat Medium. De kosten zijn dus € 9,00.

Iemand wil met DPD Pakketshop pakketten versturen. Hij wil voor ieder bedrag weten wat het grootste pakket is dat hij voor die prijs kan versturen.

Onderzoek voor iedere prijs wat het volume van het grootste pakket is.

Opgave 114

Een gemeente wil een nieuwe wijk bouwen. De plaats van de nieuwe wijk is vastgesteld.Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente:

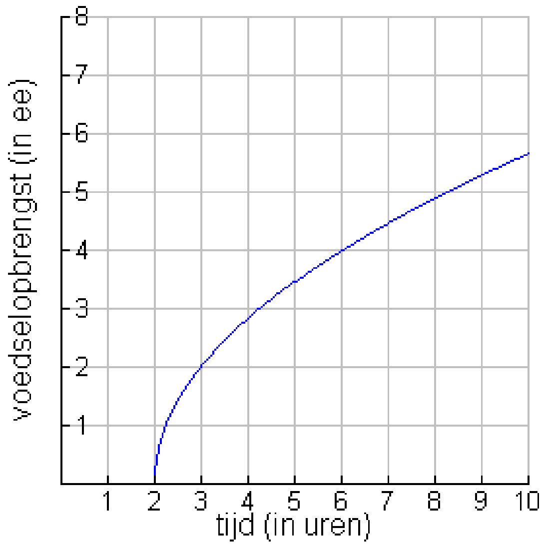
• de kosten van aankoop van de grond. Deze aankoopkosten liggen nog niet vast. Men gaat uit van G euro per hectare, waarbij G tussen 170.000 en 250.000 euro zal liggen.

• de kosten van het bouwrijp maken. Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is: $K_B = 400 \cdot x^{0,8}$, waarbij K_B de kosten zijn in euro en x het aantal woningen per hectare.

Onderzoek hoe het optimale aantal woningen per hectare (de gemiddelde kosten per woning zijn dan het kleinst) afhangt van de aankoopkosten G per hectare.

Opgave 115

De meeste roofdieren proberen iedere dag hun voedsel zo snel mogelijk te vangen. Naarmate meer voedsel is gevangen, wordt het vaak moeilijker om nog nieuw voedsel te vangen. Deze opgave gaat over het wiskundige model dat daarbij gemaakt kan worden.
In dat model geeft de *opbrengstfunctie* het verband aan tussen de hoeveelheid voedsel (de voedselopbrengst) en de tijd die nodig is om die hoeveelheid voedsel te vangen.
Sommige roofdieren leven niet in hetzelfde gebied als hun prooidieren. Zulke roofdieren moeten zich eerst verplaatsen naar hun voedselgebied voordat ze met de jacht kunnen beginnen. De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid voedsel te vangen wordtdaardoor uitgebreid met de tijd die nodig is om naar het voedselgebied te gaan.



In de figuur is de grafiek getekend van de opbrengstfunctie voor roofdiersoort B. De voedselopbrengst is uitgedrukt in energie-eenheden (ee) en de benodigde tijd in uren.
Op de grafiek van roofdiersoort B bevindt zich het punt (3, 2). Dat wil zeggen dat, als een roofdier van roofdiersoort B 3 uur jaagt (inclusief verplaatsing), zijn voedselopbrengst 2 ee is. Bovendien zie je dat het roofdier van deze soort 2 uur onderweg is (1 uur heen en 1 uur terug)

De formule bij deze grafiek is $Opb = 2\sqrt{x-2}$, waarbij *Opb* de voedselopbrengst (in ee) is en *x* de tijd (in uren).
Met dit model kun je de optimale tijdsduur voor het jagen berekenen. Immers te kort jagen levert niets of bijna niets op, maar ook heel lang jagen levert gemiddeld per uur niet veel op.

Onderzoek voor deze diersoort de optimale jaagtijd (dat wil zeggen, de tijd waarbij de gemiddelde opbrengst per uur maximaal is).

Opgave 116
Verzekeringsmaatschappijen en pensioenfondsen gebruiken zogenoemde overlevingstafels. Aan de hand van die overlevingstafels kunnen zij bepalen hoe lang verzekerden en pensioengerechtigden naar verwachting in leven zullen blijven. Een overlevingstafel is een tabel waarin van een groep van 100 000 pasgeborenen staat welk aantal er na x jaar naar verwachting nog in leven is. Dit aantal heet $L(x)$. De tabel hieronder geeft een voorbeeld van een overlevingstafel voor vrouwen in Nederland.

exacte leeftijd x	**aantal overlevenden $L(x)$**
0	100 000
1	99548
10	99372
20	99184
30	98862
40	98209
50	96657
60	92618

In de tabel kun je in de tweede kolom bijvoorbeeld aflezen dat per 100 000 pasgeboren meisjes er naar verwachting nog 98 209 hun 40e verjaardag kunnen vieren.

Al in 1825 ontdekte Gompertz dat de waarden van $L(x)$ in een overlevingstafel goed te benaderen is met wiskundige formules.
Een verzekeringsmaatschappij gebruikt voor een (andere) groep van 100 000 pasgeboren meisjes de formule $L(x) = 100000.0{,}999^{(1{,}085^x - 1)}$, waarbij $L(x)$ het aantal vrouwen dat na x jaar nog in leven is.

Gompertz bestudeerde aanvankelijk de zogenoemde *sterfte-intensiteit* in plaats van de functie $L(x)$. Deze sterfte-intensiteit $S(x)$ is als volgt gedefinieerd: $S(x) = -\frac{L'(x)}{L(x)}$.

Drie wiskunde-A1,2-leerlingen proberen bij een praktische opdracht over overlevingstafels onder woorden te brengen wat de sterfte-intensiteit voorstelt. Dit doen zij zonder de afgeleide van $L(x)$ te bepalen. Ieder van hen komt met een voorstel:
Johan: “De sterfte-intensiteit $S(x)$ is, bij benadering, het aantal overlevenden per sterfgeval na x jaar.”
Fiona: “De sterfte-intensiteit $S(x)$ is, bij benadering, het aantal sterfgevallen per overlevende na x jaar.”
Samira: “De sterfte-intensiteit $S(x)$ is, bij benadering, de afname per jaar van het aantal overlevenden na x jaar.”
a. Welke van deze drie omschrijvingen is de beste?

De verzekeringsmaatschappij gebruikt een exponentiële functie voor de sterfte-intensiteit $S(x)$. Om te laten zien dat $S(x)$ inderdaad exponentieel is, moet eerst de afgeleide van $L(x)$ worden bepaald.
b. Maak deze afgeleide en onderzoek daarmee of $S(x)$ inderdaad exponentieel is.

Opgave 117

Gegeven is $f(x) = x(x–4)^2$.

Bereken de toppen van de grafiek van deze functie.

Opgave 118

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x}$.

a. Bereken m.b.v. de afgeleide de x-waarden waarbij $f(x)$ maximaal of minimaal is.
b. Stel een formule op van de raaklijn in het punt met $x = 4$.
c. Schets in één figuur de grafiek van $f(x)$ en de grafiek van $\frac{1}{f(x)}$.
d. Beschrijf duidelijk het verband tussen beide grafieken. Dit kun je bijvoorbeeld doen door te vertellen hoe je uitgaande van de grafiek van $f(x)$ de grafiek van $\frac{1}{f(x)}$ kunt tekenen.

Opgave 119

Gegeven is de functiefamilie $f_a(x) = x\,e^{ax}$, met $a \neq 0$.

De grafieken van al deze functies gaan door (0,0).

a. Toon aan dat de grafiek van alle functies f_a in (0,0) dezelfde helling hebben.
b. Toon aan dat elke functie f_a precies één extreme waarde (minimum of maximum) heeft. Druk de bijbehorende x-coordinaat uit in a.

Opgave 120

Bekijk de functie $y_a = \frac{x^a}{e^x}$ waarbij a een constant positief geheel getal is.

a. Toon aan dat bij $a = 2$ een van de extremen bij x=2 ligt.
b. Onderzoek of de volgende uitspraak waar is:
   ‘de functie y_a heeft soms één extreem en soms twee extremen, maar nooit meer dan twee extremen’