Domein Meetkunde Havo B

H.3 : Hoeken en afstanden

§1

1. -
2. -
3. Teken middelloodlijnen op de zijden van de driehoek
Snijpunt is plaats van de sproeier.
Straal = 2,7cm
4. mll_{OA}: $x = 2$, mll_{AB}: $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$
mll_{OB}: $y = -\frac{3}{5}x + 3\frac{2}{5}$
5. Ja. $M(-3,0)$ en straal = 3

6a) $(x + 4)^2 - 16$
b) $(x + 6)^2 - 36$
c) $(x + 2{,}5)^2 - 6{,}25$
d) $(x - 3)^2 - 9$
e) $(x - 4)^2 - 16$
f) $(x - 0{,}5)^2 - 0{,}25$

7a) Ja, $M(-4,-2)$ en $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
b) Ja, $M(4,-2)$ en $r = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
c) Ja, $M(-4,2)$ en $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

8. $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = -5$???
9. -

10a) $M(3,-2)$ en $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
b) geen cirkel
c) $M(-2,-1)$ en $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
d) $M(3,-1)$ en $r = \sqrt{10}$
e) $M(-2,-1)$ en $r = \sqrt{10}$
f) $M(2,1)$ en $r = 0$; cirkel?

11a) $(x - 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$
b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 85$

12. cirkel door A, B en C:
$(x - 12\frac{1}{2})^2 + y = 156\frac{1}{4}$
D ligt niet op deze cirkel
13. c_1: $M_1(0,2)$ en $r_1=2$
c_2: $M_2(2,1)$ en $r_2=5$
c_1 ligt in zijn geheel binnen c_2

14a) $(x - 24\frac{1}{6})^2 + (y - 9\frac{1}{6})^2 = \frac{625}{18}$
b) $(x + 5)^2 + (y - 10)^2 = 125$
c) $(x - 0{,}112)^2 + (y + 0{,}087)^2 = 25$
of
$(x - 7{,}880)^2 + (y - 5{,}087)^2 = 25$

15. $A(-6,0)$, $B(6,0)$, $C(0,8)$ en $M(0,q)$: geeft $q = 1{,}75$ en $r = 6{,}25$

16a) m: $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}$
b) $P(-1{,}23;-1{,}67)$ en $Q(2{,}23;-0{,}13)$
zodat $|PQ| = \sqrt{15} \approx 3{,}87$
c) $|MP| = |PO| = |OQ| = |QM| = \sqrt{5}$

17a) $M(1\frac{1}{2},0)$, $r = \sqrt{1\frac{1}{2}}$
x-as: (0,0), (3,0); y-as: (0,0)
b) geen cirkel
x-as: $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$; y-as: -
c) geen cirkel
x-as: (0,0), (3,0); y-as: (0,0)
d) geen cirkel
x-as: (4,0), (-4,0);
y-as: (0,4), (0,-4)
e) $M(2,3)$ en $r = \sqrt{13}$
x-as: (0,0), (4,0);
y-as: (0,0) , (0,6)
f) $M(6,0)$ en $r = 6$
x-as: (0,0), (12,0); y-as: (0,0)

18a) x-as: (3,0), (-3,0);
y-as: (0,2), (0,-2)
b) $(x - 2\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
c) vergelijkingen van c_2 en k levert één oplossing: $x=3$
c_2 ligt geheel binnen de ellips

§2

19a) $A(-2{,}83;4{,}12)$, $B(4{,}75;-1{,}56)$
b) $b = 6{,}25$ of $b = -6{,}25$

20a) zie 19a)
b) raken want D=0
c) (3,4)
d) $y = -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}$

21a) snijden, (1,2) , (-1,-2)
b) snijden, (-1,87;-1,23), (-0,14;2,23)
c) raken, (1,2)
d) raken, (-1,-2)

22. $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}x - 4$
23. $y = \frac{1}{2}x + 8$, $y = \frac{1}{2}x - 2$
24. $x^2 + y^2 = 7{,}2$
25. $y = \sqrt{1\frac{1}{2}}x + 5$, $y = -\sqrt{1\frac{1}{2}}x + 5$
26. Eerst raaklijnen door (0,6) aan $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$
Dit geeft:
$y = -\frac{1}{2}x + 6$ en $y = -5\frac{1}{2}x + 6$
Dus:
$y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$ en $y = -5\frac{1}{2}x + 11\frac{1}{2}$
27. $y = \frac{3}{4}x + 4$
28. Geen

29a) $A(24,\sqrt{24})$, $B(24,-\sqrt{24})$
$|AB| = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$

b) Gelijkvormigheid, Pythagoras

30a) $y = x + 5\sqrt{2}$, $y = x - 5\sqrt{2}$

b) $y = \frac{5}{11}\sqrt{11}x - \frac{30}{11}\sqrt{11}$,

$y = -\frac{5}{11}\sqrt{11}x + \frac{30}{11}\sqrt{11}$

c) $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$

d) $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - 8\frac{1}{3}$

31. $x^2 + y^2 = 18$, raakpunt (3,3)

32. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16{,}2$

33a) -

b) $A(a, \sqrt{1 - a^2})$, $B(a, -\sqrt{1 - a^2})$

raaklijn door A: $y = \dfrac{1 - ax}{\sqrt{1 - a^2}}$

snijpunt x-as: $C(\frac{1}{a}, 0)$

§3

34. $OC \perp l$, $rc_l = -\frac{3}{4}$ en $rc_{OP} = \frac{4}{3}$

$-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$

35. raaklijn door D: $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$

36. $y = -3x + 10$

37a) $P(3,4)$ en raaklijn: $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}$

$Q(4,3)$ en raaklijn: $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$

b) in beide gevallen $8{,}13^o$

38a) $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$

b) alleen de rc is van belang

c) -

39a) x-as: (0,0), (2,0)

y-as: (0,0), (0,4)

b) (0,4): $y = 0{,}5x + 4$

(0,0): $y = -0{,}5x$

(2,0): $y = 0{,}5x - 1$

c) 27^o

d) 63^o

40. $A(1,1)$, $B(2,2)$, $\angle(l,c) = 18^o$

41. $A(-1,3)$, $B(1,3)$, $\angle(c_1,c_2) = 63{,}4^o$

42. $P(-1,3)$, $Q(-1,1)$, $\angle(c_1,c_2) = 18{,}4^o$

43a) $|QM| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $|QA| = |QB| = \sqrt{13}$

c) $c_2 : (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 13$

d) $A(4{,}51 ; 5{,}18)$ en $B(1{,}82 ; 2{,}49)$

e) A: $y = -0{,}23x + 6{,}23$

B: $y = -4{,}27x + 10{,}27$

44a) snijpunten y-as: (0,1) , (0,7)

$\angle(c, y\text{-as}) = 56{,}3^o$

b) snijpunten $A(-1{,}56;3{,}44)$ en

$B(1{,}44;0{,}43)$, $\angle(c_1,c_2) = 73{,}7^o$

45. $M(3,2)$ of $M(3,-2)$

In beide gevallen : $r = \sqrt{8}$

46. $\angle(m,c) = 90^o$, logisch want lijn m is middellijn.

(cirkel : $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 20$)

47. $\angle(m,AB) = \angle C = 71{,}57^o$

48a) $|AB| = |BC| = |AC| = 4$

b) $x^2 + (y - q)^2 = q^2$ raakt BC

D=0 zodat $q^2 = \frac{4}{3}$

49. $x^2 + y^2 = r^2$ raakt DC

D=0 zodat $r^2 = 3{,}2$

50a) $rc_l = -\frac{p}{q}$, $rc_{OP} = \frac{q}{p}$, $-\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = -1$

b)

c) $rc_{MP} = \frac{q-b}{p-a}$, $rc_l = -\frac{p-a}{q-b}$

$rc_{MP} \times rc_l = -1$

§4

51. zie uitleg hierna

52. $m : y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $Q(\frac{15}{13}, \frac{16}{13})$

$d(P, l) = \frac{12}{\sqrt{13}} \approx 3{,}33$

53. loodlijn door P op m: $y=2x+5$

snijden met m: $Q(2,9)$

$d(P, m) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

54. - $h_A : y = \frac{3}{2}x$ snijden met BC

snijpunt $E(\frac{28}{13}, \frac{42}{13})$, $d(A, BC) = \frac{14}{\sqrt{13}}$

- $h_B : y = -\frac{1}{4}x + 3$ snijden met AC

snijpunt $F(\frac{12}{17}, \frac{48}{17})$, $d(B, AC) = \frac{14}{\sqrt{17}}$

55. loodlijn door P op l: $3x+5y=10$

snijpunt $Q(5\frac{5}{17}, -1\frac{3}{17})$ en

$d(P, l) = \frac{134}{\sqrt{34}}$

56a) OM snijden met c geeft punt S.

$S(2{,}53 ; 2{,}02)$,

$d(O, c) = |OS| \approx 3{,}24$

b) $d(M, l) = \sqrt{24\frac{1}{2}}$

$d(l, c) = \sqrt{24\frac{1}{2}} - \sqrt{10} \approx 1{,}79$

c) zie b)

d) c_2: $x^2 + y^2 = 2$ snijden met OM.

snijpunt $T(1{,}10 ; 0{,}88)$

$d(c_1,c_2) = |ST| \approx 1{,}83$

57. lijn $y=2x+6$ staat loodrecht op gegeven lijnen

snijpunten $S(0,6)$ en $T(-1{,}7 ; 2{,}6)$

$|ST| \approx 3{,}80$

58. bij evenwijdige lijnen

In overige gevallen afstand = 0

59. lijn loodrecht l is lijn m: $y=4x+2$

snijpunt $S(0,2)$ en $P(p,4p+2)$

op m; $|SP| = 2$ geeft $p = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

Zodat $y = -\frac{1}{4}x \pm \sqrt{17} + 2$

60a) $\frac{47}{\sqrt{41}} \approx 7{,}34$

b) $d(P,c) = |PM| - 4 = \sqrt{74} - 4 \approx 4{,}60$

c) $d(l,c) = d(M,l) = -4$
M op m: $5x + 4y = -31$, $m \perp l$
m snijden met l : $S(\frac{5}{41}, -\frac{324}{41})$
$d(M,l) = |MS| \approx 5{,}00$,
$d(l,c) \approx 1{,}00$

61a) c_1 snijdt c_2. Afstand = 0

b) c_2 binnen c_1 dus kortste afstand
lijn door M_1 en M_2 is l: $y = x + 1$
l snijden met c_1 : $S(-0{,}54;0{,}46)$
l snijden met c_2 : $T(1{,}29;2{,}29)$
$d(c_1,c_2) = |ST| \approx 2{,}59$

c) c_1 snijdt c_2. Afstand = 0

62a) basis QR snijden met hoogtelijn PS; snijpunt $S(22\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2})$

b) $opp = \frac{1}{2} \times |PS| \times |QR| = 52{,}5$

63a) opp = 17

b) $|AB| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) $|CD| = \frac{17}{\sqrt{5}} = \frac{17}{5}\sqrt{5}$

d) $O(0,0)$, $P(2,10)$, $Q(5,10)$
$opp(\Delta OPQ) = 15$
$|OQ| = 5\sqrt{5}$, $d(P,l) = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

Overzicht

64. -

65a) $M_1(6,0)$, $r_1 = \sqrt{26}$

b) lijn $y=x$ snijden met c_1.
snijpunten $P(1,1)$ en $Q(5,5)$

c) M_1M_2: $y = -x + 6$ snijden met c_1.
snijpunt (2,39 ; 3,61)
$d(M_2,c_1) \approx 2{,}27$

d) $rc_{M_1Q} = -5$, $rc_{M_2Q} = 3$
$\angle(c_1,c_2) = 29{,}74^o$

e) $y = mx + 4$ snijden met c_1.
$D = 24m^2 + 64m - 24$
$D = 0$ geeft $m = 3$ of $m = -\frac{1}{3}$

f) raaklijn door P : $y = -\frac{1}{5}x + 6\frac{2}{5}$
$Q(32,0)$

g) $opp(\Delta MPQ) = 69$
$|PQ| = \sqrt{650}$, $d(M_2,PQ) \approx 5{,}41$

66. $r = \sqrt{20}$, $M(a,0)$
$(x-a)^2 + y^2 = 20$
P invullen geeft $a = -1$ of $a = -9$

67a) -

b) $x^2 + (y-m)^2 = 144$

c) $y = 2x$ of $y = -2x$

d) $D = -4m^2 + 2880$
$D = 0$ geeft $m = \sqrt{720}$
uitsteken: $12\sqrt{5} + 12 - 30 \approx 8{,}83$

e) gelijkvormige driehoeken

68a) $A(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$, $|OA| = \frac{3}{5}\sqrt{5}$
$B(1,2)$, $|OB| = \sqrt{5}$
$\frac{3}{5}\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 3$

b) $A(\frac{1+\sqrt{4+3a^2}}{1+a^2}, \frac{a+a\sqrt{4+3a^2}}{1+a^2})$,
$B(\frac{1-\sqrt{4+3a^2}}{1+a^2}, \frac{a-a\sqrt{4+3a^2}}{1+a^2})$
$|OA|^2 = \frac{3a^4+8a^2+5+(2+2a^2)\sqrt{4+3a^2}}{(1+a^2)^2}$
$|OB|^2 = \frac{3a^4+8a^2+5-(2+2a^2)\sqrt{4+3a^2}}{(1+a^2)^2}$
$|OA|^2 \times |OB|^2 = 9$

69. ΔABC, $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2\sqrt{3})$
$BC : y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$
c: $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$
BC raakt cirkel c, D=0
$\sqrt{3}r^2 - 4\sqrt{3}r - 12r + 12 = 0$
$r \approx 0{,}676$ ($r \approx 10{,}252$ voldoet niet)

70a) $l : y = -\sqrt{3}x + 2$, $R(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$

b) $A(\frac{-2a+\sqrt{a^2-3}}{1+a^2}, \frac{2+a\sqrt{a^2-3}}{1+a^2})$
$B(\frac{-2a-\sqrt{a^2-3}}{1+a^2}, \frac{2-a\sqrt{a^2-3}}{1+a^2})$

c) $|PR|^2 = 3$
$|PA|^2 = \frac{5a^4+2a^2-3-(4a+4a^3)\sqrt{a^2-3}}{(1+a^2)^2}$
$|PB|^2 = \frac{5a^4+2a^2-3+(4a+4a^3)\sqrt{a^2-3}}{(1+a^2)^2}$
$|PA|^2 \times |PB|^2 = 9$

71. $A(-\frac{1}{2}a, 0)$, $B(\frac{1}{2}a, 0)$, $C(0, \frac{1}{2}a\sqrt{3})$
c: $x^2 + (y-p)^2 = r^2$
$p = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

72a) $P(a,b)$ op deellijn.
c: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ raakt de x-as
m snijden met c,
D=0 geeft $\frac{b}{a} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
Deellijn : $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x$

b) $P(a, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a)$ ligt op m
lijn door P loodrecht op m snijdt m in $S(\frac{a}{\sqrt{5}}, \frac{2a}{\sqrt{5}})$
$d(P,S) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$

73a) -

b) $\mathrm{d}(M, AB) = p$

$opp(\Delta MBC) = 4 - p$

$\mathrm{d}(M, BC) = \frac{4-p}{\sqrt{5}}$

c) $p = \frac{4}{1+\sqrt{5}}$