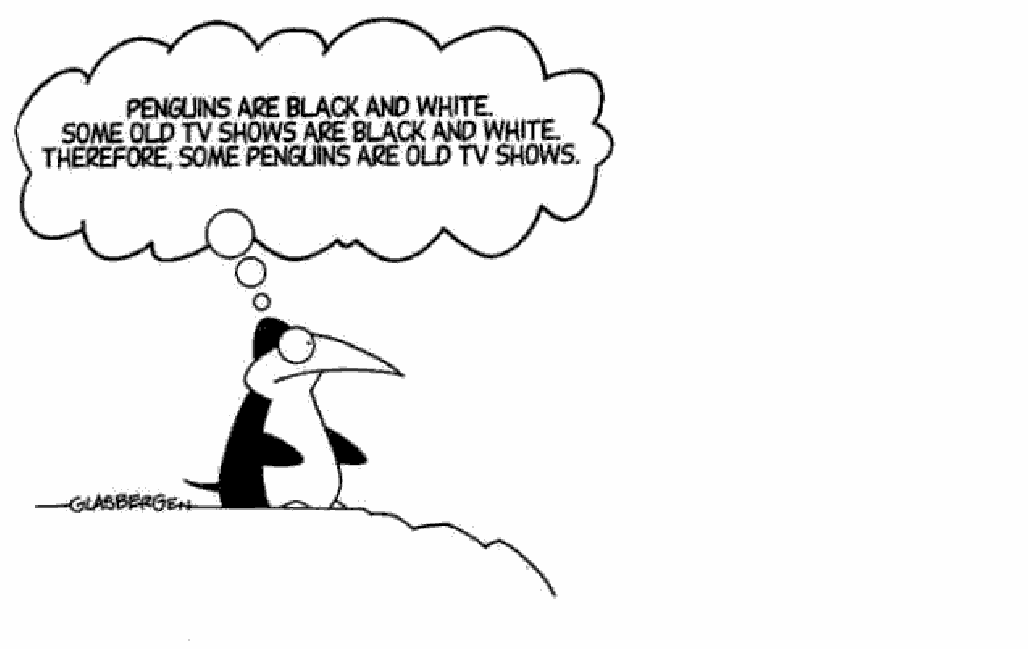
Logica



Syllabus Logica bestemd voor Wiskunde-D, Havo-4

We vinden dat helder en logisch denken één van de belangrijkste vaardigheden is voor jou (HAVO-leerling) en denken dat het doorwerken van deze syllabus iets toe kan voegen aan je ontwikkeling daarin.

In de logica, die raakvlakken heeft met onder andere de wiskunde, informatica en filosofie vind je één van de zuiverste vormen van helder denken en redeneren. Je kunt het toepassen binnen veel gebieden en disciplines. Je mag hierbij bijvoorbeeld denken aan taal maar ook het recht.

We hopen dat je, na het doorwerken van deze stof, beter inzicht krijgt in problemen in het algemeen en wiskundige problemen in het bijzonder.

Ook hopen we dat je beter in staat zult zijn een wat ingewikkelder redenering te volgen en ook zelf uit te voeren volgens de regels van de (wiskundige) logica.

Ons doel voor het samenstellen van deze syllabus is om je een methode te bieden waarin je die basisregels (in interactie met de computer) eigen kunt en leert maken.

Je gaat dus leren redeneren volgens de regels van de logica en je krijgt het inzicht dat de computer een redenering niet "ongeveer goed" of "eigenlijk fout" kan vinden;
Of een redenering is correct, of niet

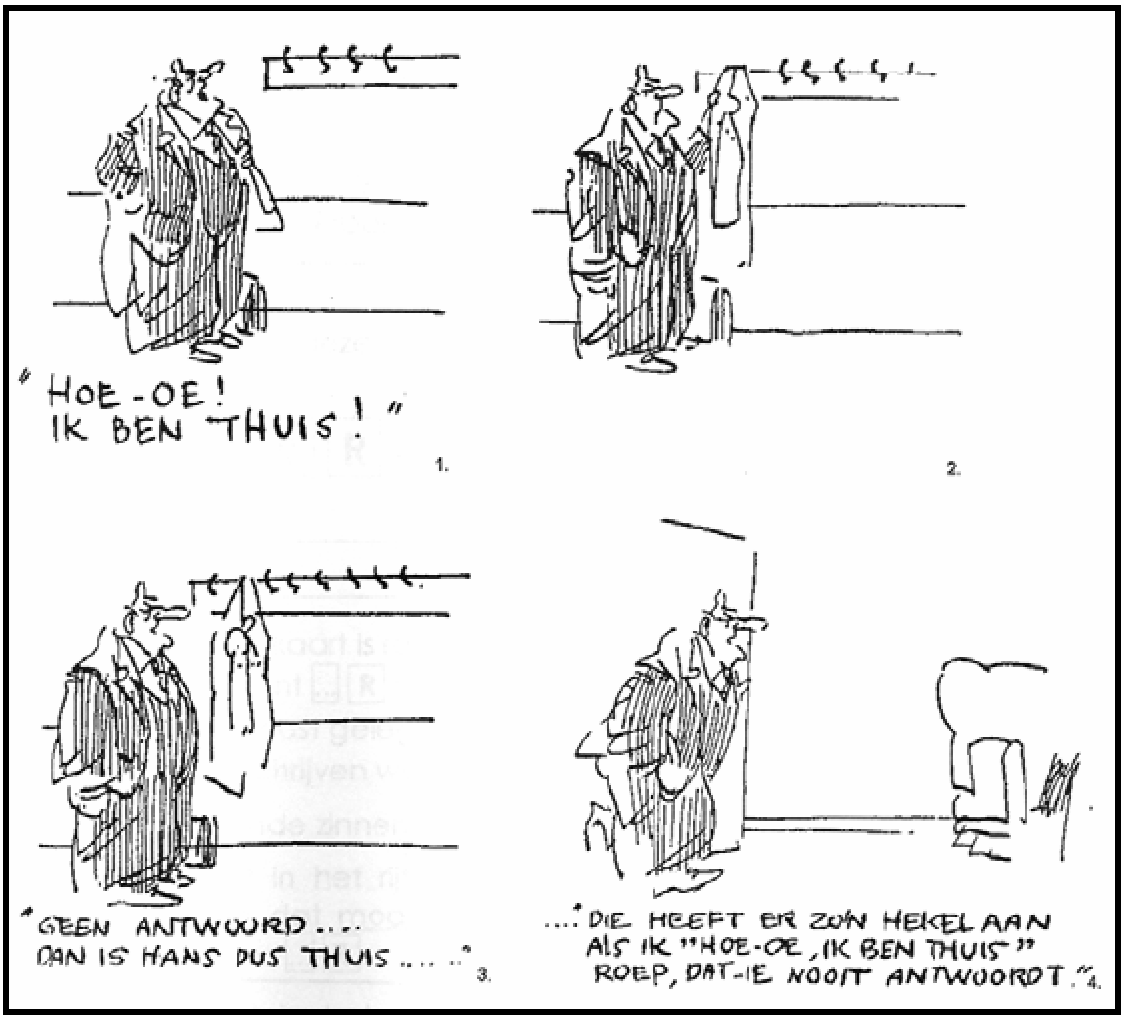
Je doet dat binnen een lessenaantal van 30 uur theorie, waarvan 16 uren (of 8 blokuren) onder begeleiding, 14 uur zelfstudie en een tentamen of toets.
Deze lesuren worden afwisselend op je eigen school of op Hogeschool Windesheim gegeven.
Daarnaast heb je nog een practicum. Dit wordt ook op Windesheim gegeven (2 x 5 uren).
Binnen de begeleidings-uren en zelfstudie-uren heb je op een dusdanige manier ruimte om te leren in je eigen tempo; er wordt zoveel geoefend als nodig is om de regels van de logica te doorgronden en ze ook toe te kunnen passen. Je moet daartoe wel bij de lessen aanwezig zijn en de opdrachten serieus behandelen.

We hopen dat je veel leert van en plezier beleeft aan het doorwerken van deze cursus logica.

De samenstellers van deze syllabus hebben dankbaar gebruik gemaakt van bestaand materiaal. We willen noemen en bedanken:
LOI-methode van algebra en Logica
Dictaten algebra NLO (Kodde, Siersma, Van Weerden)
Ontwikkeld experimenteel lesmateriaal van Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (CTWO):
http://www.fi.uu.nl/cwto/lesmateriaaldir/experimenteellesmateriaal/VWO wiskundeAC/
Logischredeneren
http://www.fi.uu.nl/~michiel/logicaboek/redeneren.book.htm
Meindert Koolstra
Jan Otto Kranenborg, meelezer
Michel de Vries, Bram Janssens en Wim Rietberg van Chr. Hogeschool Windesheim voor realisatie en praktische uitvoering

Samenstellers: drs. N.J. Wolberink en H Ridderbos, docenten Wiskunde aan Vechtdal College Hardenberg en Ommen

1. Inleiding



De strip hierboven is van Peter van Straaten. Het gaat over een vader en een zoon.
Lees de strip en geef commentaar op de redenering van de vader.

Geef zinvol commentaar bij het onderstaande gedicht:

Drie soorten
Onze buurman bleef beweren
dat hij mathematici
nader kon classificeren
in divisies en wel drie.

Welke drie –kan men nu stellen-
Onderscheidde deze man?
1. De groep die goed kan tellen,
2. De groep die dat niet kan.

(uit: Wis- en natuurlyriek van Drs. P en Marjolein Kool)

Wat vind je van de onderstaande ‘logica’?

Een Belg en een Nederlander zitten samen in de trein, de Belg leest een boek over logica. Logica, vraagt de Nederlander, wat is logica? Wel, zegt de Belg, heb je goudvissen? Ja. Wel, dan houd je van dieren. Ja, dat klopt. Wel, als je van dieren houdt, houd je ook van mensen. Ja, dat klopt ook. En als je van mensen houdt, dan houd je ook van kinderen. Ja, ik houd van kinderen. Wel, en als je van kinderen houdt, heb je natuurlijk ook kinderen. Ja, dat klopt. Wel, en als je kinderen hebt, ben je getrouwd. Ja, dat klopt ook. Wel, als je getrouwd bent, ben je geen vrijgezel. Nee, zegt de Nederlander, ik ben geen vrijgezel! Wel, zegt de Belg, dat is logica. Stapt de Belg uit en komt er een andere Nederlander tegenover de eerste zitten. Nou, zegt Nederlander 1, er was net een Belg, en die las een boek over logica, kei interessant! Logica, vraagt Nederlander 2, wat is dat? Nou, heb je goudvissen?
Nee. Wel, dan ben je een vrijgezel.

Tot slot van deze inleiding nog een stukje “voetballogica”:

"VOETBAL IS SIMPEL, JE BENT OP TIJD OF JE BENT TE LAAT. ALS JE TE LAAT BENT MOET JE EERDER VERTREKKEN" (J. CRUIJFF)

2. Proposities

Om op een verantwoorde manier met wiskunde bezig te zijn, is het maken van *afspraken* onontkoombaar. Als we spreken over een gelijkzijdige driehoek, kunnen we alleen tot een zinvol gesprek komen als we daar allemaal hetzelfde onder verstaan. Op enig moment zullen we dus met zijn allen moeten afspreken wat een gelijkzijdige driehoek is.

Definitie

Deze afspraken noemen we in de wiskunde *definities*.
De definitie van een gelijkzijdige driehoek zou kunnen luiden: een gelijkzijdige driehoek is een driehoek waarvan de drie zijden gelijke lengtes hebben.

Grondbegrip

Aristoteles (384-322 voor Chr.) heeft zich ruim 2 000 jaar geleden al met deze problematiek beziggehouden. Volgens hem mag men in de definitie van een nieuw begrip slechts gebruikmaken van eerder gedefinieerde begrippen. In het voorbeeld van de gelijkzijdige driehoek veronderstellen we dat de begrippen driehoek, zijde en gelijke lengte bekend zijn.
Als je eventjes nadenkt, zul je ongetwijfeld inzien dat deze eis van Aristoteles op grote problemen stuit. Immers, er kan niet iets uit niets ontstaan. De Griekse meester zag dit probleem uiteraard ook en loste dit op door een aantal zogenaamde *grondbegrippen* toe te staan. Deze grondbegrippen worden niet gedefinieerd. Ze worden ook wel primitieve begrippen genoemd. Een grondbegrip doet een beroep op onze intuïtie. In de meetkunde zouden we punt en lijn kunnen zien als grondbegrip.

Propositie

We zullen in deze module werken met het grondbegrip *propositie*.
Zinnen die een feit constateren, noemen we proposities of beweringen.

Voorbeelden van proposities:
a. De wortel van 144 is 12.
b. Het dubbele van 10 is 30.
c. In een driehoek ligt de grootste zijde altijd tegenover de grootste hoek.
d. Er is buitenaards leven.

Geen proposities zijn:
- Gedraag je!
- Men neme passer en liniaal.
- Is er nog thee?
- Wiskunde is heilzaam voor de geest.

Merk op dat een propositie niet waar hoeft te zijn. Het is zelfs zo (zie het laatste voorbeeld) dat het op dit moment nog onduidelijk kan zijn of een propositie waar is of onwaar.
Het laatste voorbeeld (Wiskunde is heilzaam voor de geest) rekenen we niet tot de proposities, omdat het te subjectief is.

Een ander voorbeeld van een propositie is:

- In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lange zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden.

Stelling

Je herkent natuurlijk onmiddellijk de *stelling* van Pythagoras. Deze propositie heet een stelling, omdat dit te bewijzen valt. Vaak wordt in het bewijs van een stelling gebruikgemaakt van eerder bewezen stellingen.

Axioma

Hier doet zich hetzelfde probleem voor als bij de eis die Aristoteles stelde aan de definities van nieuwe begrippen. Uiteindelijk komen we bij uitspraken die we niet meer kunnen bewijzen. Deze onbewezen uitspraken die we voor waar aannemen, noemen we *axioma's*. Onze vlakke meetkunde (ook wel Euclidische vlakke meetkunde genoemd) gaat uit van vijf axioma's. Ze zijn te vinden in het op één na meest bestudeerde boek (na de bijbel): *De elementen* van Euclides (ca. 300 voor Chr.).

Waarheidswaarde

We zullen aan een propositie de waarde 1 toekennen als de propositie waar is en de waarde 0 als deze niet waar is. We noemen deze 0 of 1 de waarheidswaarde. Een propositie heeft dus of een waarheidswaarde 1 of een waarheidswaarde 0. Een andere (derde?) mogelijkheid sluiten we uit.

Notatie

Met betrekking tot de notatie zullen we heel vaak afspraken moeten maken. Neem bijvoorbeeld het teken +. Ooit is er iemand geweest die ons heeft verteld dat dit teken betrekking heeft op het optellen van getallen. Niemand zal het in zijn hoofd halen om te gaan vermenigvuldigen of aftrekken bij het zien van het sommetje 2 + 5 =
Kennelijk zijn we het eens over de betekenis van het + -teken.
De wiskundetaal kent talloze symbolen. Over de betekenis van de symbolen zullen we het met z'n allen eens moeten zijn.

Bewerkingen met proposities

We kunnen proposities bewerken, voorbeelden daarvan zijn:

Negatie of ontkenning

We geven proposities meestal aan met de letters *P*, *Q*, *R* etc.
Als voorbeeld nemen we de propositie:

- Gisteren regende het.

Laten we deze propositie aangeven met de letter *P*. Zoals we weten, is een propositie waar of niet waar. Stel dat deze propositie *P* waar is. Dan is de propositie *Q*:

- Gisteren regende het niet.

niet waar.

Omgekeerd, als *P* niet waar is, is *Q* waar.
We noemen *Q* de *negatie* of *ontkenning* van *P*. Het valt ons op dat *P* en *Q* nooit dezelfde waarheidswaarde hebben. Voor de negatie van *P* spreken we de volgende notatie af: $\neg P$.

Een en ander kunnen we ook weergeven in zogenaamde *waarheidstabellen*.

P	$\neg P$
0	1
1	0

De negatie is een belangrijk hulpmiddel bij het programmeren van computers of rekenmachines. In die context wordt meestal het woordje NOT gebruikt. Ook op de TI-83/84 is een dergelijke voorziening aanwezig. Kijk maar eens in het menu onder TEST (2nd MATH) en dan LOGIC.

Conjunctie ('en')

We bekijken nu de volgende proposities *P* en *Q*:

P: Gisteren won Feijenoord van Ajax.
Q: De som van drie en vier is zeven.

Hoewel deze proposities niet veel met elkaar te maken hebben, kunnen we ze samenvoegen tot één propositie met behulp van het voegwoordje "en":

Gisteren won Feijenoord van Ajax en de som van drie en vier is zeven.

Deze zogenaamde samengestelde propositie is alleen waar als zowel *P* als *Q* waar is. Geven we de samengestelde propositie bijvoorbeeld aan met *R*, dan noemen we *R* de conjunctie van *P* en *Q*. We noteren de conjunctie van *P* en *Q* als volgt: $P \wedge Q$.

We geven de conjunctie weer in de onderstaande waarheidstabel:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Er zijn dus vier gevallen te onderscheiden:
- *P* is niet waar en *Q* is niet waar.
- *P* is niet waar en *Q* is waar.
- *P* is waar en *Q* is niet waar.
- *P* is waar en *Q* is waar.

In slechts één van deze gevallen is de conjunctie van *P* en *Q* waar.

In het TEST-menu van de TI-83/84 wordt de conjunctie aangegeven met het woordje "and".

Disjunctie ('inclusief-of')

De vorige bewerking (conjunctie) is in overeenstemming met ons dagelijks taalgebruik.
Nu zullen we toch een moeilijkheid tegenkomen. Het Nederlandse woordje "of" heeft namelijk verschillende betekenissen. Bekijk de volgende voorbeelden maar eens.

- Agent tegen een verkeersovertreder: "U moet beloven dat u nooit meer door rood rijdt of u krijgt een boete."

- Mensen die een hond of kat hebben, wordt verzocht hun dier op oudejaarsavond binnen te houden.

In het eerste geval verwachten we niet dat de diender alsnog een boete uitschrijft nadat de overtreder beterschap heeft beloofd. Of een belofte, of een boete, maar niet beide.
In het tweede voorbeeld zal niemand die het advies serieus neemt en die een hond *en* een kat heeft, deze diertjes naar buiten laten gaan

In ons dagelijks taalgebruik voelen we deze verschillen in de betekenis van het woordje "of" perfect aan. Maar de wiskunde kan hier niet mee uit de voeten. Vandaar dat er binnen de logica twee soorten "of" bestaan: inclusief en exclusief. Het "inclusief-of" noemen we meestal disjunctie. We zullen de disjunctie van *P* en *Q* noteren als: $P \vee Q$.
Hierbij hoort de onderstaande waarheidstabel:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

In het TEST-menu van de TI-83/84 wordt de disjunctie aangegeven met het woordje "or".

Exclusief-of

Bij de disjunctie hebben we al kennisgemaakt met het exclusief-of. De waarheidstabel verschilt op één plaats met die van de disjunctie. Voor het exclusief-of zijn verschillende symbolen in omloop. We zullen het symbool Δ gebruiken.

Als *P* en *Q* proposities zijn, is het *exclusief-of* van *P* en *Q* als volgt gedefinieerd:

P	Q	$P \Delta Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Op de TI-83/84 wordt het exclusief-of aangegeven met het woordje "xor".

Voorbeeld:
P: Ik ben jarig in januari.
Q: Ik ben jarig in februari.

$P \Delta Q$ is waar, als P waar is, maar Q niet waar is . Ook is $P \Delta Q$ waar, als P niet-waar is, maar Q wel waar is.
We hebben in dit voorbeeld te maken met het *exclusief-of.* Immers een persoon kan slechts in één maand jarig zijn.

Implicatie

We beginnen eerst met een voorbeeld:

- Als ik dit jaar de jackpot win in de staatsloterij, dan trakteer ik alle wiskunde D leerlingen in het volgend jaar op een etentje.

Mijn belofte is een samenstelling van twee proposities. Kortweg: "ik win" en "ik trakteer". Laten we nu eens aannemen dat het volgende jaar al begonnen is. Er kunnen zich dan vier situaties voordoen:

1. Ik heb niet gewonnen en ik heb niet getrakteerd.
2. Ik heb niet gewonnen en ik heb getrakteerd.
3. Ik heb gewonnen en ik heb niet getrakteerd.
4. Ik heb gewonnen en ik heb getrakteerd.

In welke gevallen ***kan*** ik van leugenachtige praktijken worden beschuldigd?

In het eerste geval heb ik niet gewonnen en hoef ik dus ook niet te trakteren.

In het tweede geval ben ik genereus geweest. Ik heb niet gewonnen en toch heb ik getrakteerd. Het zou wel heel zuur zijn om mij dan als leugenaar aan te merken. Afgezien daarvan, het is ook in strijd met de logica. Ik had toch niet gezegd dat ik uitsluitend zou trakteren als ik zou winnen.
Ik zou trakteren als ik zou winnen. Het staat mij dan toch zeker vrij te trakteren als ik niet win?

In het derde geval ben ik verworden tot leugenaar. Ik had beloofd te zullen trakteren als ik zou winnen. Het geld is binnen en de beloofde traktatie is uitgebleven. Foute boel dus.

In het laatste geval ben ik netjes mijn belofte nagekomen.

Conclusie: alleen in het derde geval kan ik als leugenaar worden gezien.

Een als-dan-propositie of als-dan-bewering wordt in de wiskunde een implicatie genoemd. Heel veel wiskundige uitspraken en stellingen zijn als-dan-proposities.

Voorbeelden:
- Als het regent dan draag ik een paraplu.
- Als ik uien snijd dan moet ik huilen.
- Als ik een 8 haal dan heb ik een voldoende.

Voor de implicatie gebruiken we het symbool $\Rightarrow$.

Hierbij hoort de onderstaande waarheidstabel:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bi-implicatie

Voor sommige implicaties ($P \Rightarrow Q$) geldt dat de omkering ($(Q \Rightarrow P)$ ook waar is.
Voorbeeld hiervan zijn:

Als het vrede is, dan is het geen oorlog.
Als van driehoek ABC de hoek A recht is, dan geldt: $a^2 = b^2 + c^2$.

Nog een voorbeeld:

Als de discriminant van een tweedegraads vergelijking negatief is, dan heeft deze vergelijking geen oplossingen.

De bi-implicatie of equivalentie kan op een hele natuurlijke manier met behulp van de bewerkingen $\wedge$ en $\Rightarrow$ worden gedefinieerd.

Met de bi-implicatie $P \Leftrightarrow Q$ bedoelen we: $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
De waarheidstabel is dan eenvoudig op te stellen:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

De bi-implicatie $P \Leftrightarrow Q$ is precies dan waar als P en Q dezelfde waarheidswaarde hebben.
Bij een bi-implicatie zou je P door Q kunnen vervangen en omgekeerd. We zeggen in dit geval dat P en Q equivalent of gelijkwaardig zijn.

Met de bi-implicatie sluiten we de logische bewerkingen af. Dit wil overigens niet zeggen dat er niet meer bestaan. In principe kunnen we met de genoemde bewerkingen $\wedge$, $\vee$, Δ, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$ andere bewerkingen maken.

Opgave 2.1

De dokter zegt: "Als je mijn medicijn slikt, dan word je beter."

a. Welke twee proposities kunnen we in de bovenstaande zin ontdekken?

b. Met welke bewerking hebben we te maken in de zin die de dokter uitspreekt?

Een week later kom je de dokter tegen bij de supermarkt.
De dokter kijkt je aan en concludeert: "Je ziet er goed uit. Je hebt dus mijn medicijn
geslikt."

c. Wat vind je van de conclusie van de dokter? Heeft de dokter gelijk?

Opgave 2.2

Geef de waarheidstabellen van de volgende (samengestelde) proposities:

a. $\neg(P \Rightarrow Q)$

b. $(P \Delta \neg Q)$

c. $(\neg P)\Delta(\neg Q)$

d. $(\neg P) \wedge (\neg Q)$

e. $\neg(P \vee Q)$

Wat valt je op bij de waarheidstabellen van de opgaven **d** en **e**?

Opgave 2.3

Geef de waarheidstabellen van de volgende (samengestelde) proposities:

a. $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg(P \triangle Q)$
b. $(P \wedge \neg Q) \triangle Q$
c. $(P \Leftrightarrow Q) \vee Q$
d. $(P \wedge Q) \vee ((P \triangle R) \wedge \neg Q)$

Opgave 2.4

Een moordzaak.
Ad, Ben en Cor zijn verdachten in een moordzaak. Ze leggen onder ede de volgende verklaringen af:
Ad: Ben is schuldig en Cor is onschuldig.
Ben: Als Ad schuldig is, dan is Cor ook schuldig.
Cor: Ik ben onschuldig, maar minstens één van de anderen is schuldig.

a. Stel dat alle drie de verdachten onschuldig zijn, wie pleegde(n) er dan meideed?

b. Stel dat ze alle drie de waarheid spraken, wie is/zijn er dan schuldig?

c. Stel dat de onschuldigen de waarheid spraken en de schuldigen logen, wie is/zijn er dan schuldig?

Opgave 2.5

Een computer kan voor ons allerlei opdrachten uitvoeren. Daartoe tikken we bijvoorbeeld commando's in via het toetsenbord.
De computer verstaat de commando's alleen als ze aan strikte regels voldoen. Een computertaal zal dan ook gebruik maken van de regels van de logica.
Hieronder volgt een stukje programmeercode:

IF (X>3) THEN (OPDRACHT 1) ELSE (OPDRACHT 2)

Het programma zal OPDRACHT 1 uitvoeren als X>3 waar is, maar als X>3 niet waar is zal OPDRACHT 2 worden uitgevoerd.

Hieronder volgt weer een stukje programmeercode:

IF (X≥4) AND (Y<3) THEN (ACTIE!)

Geef aan wat het programma bij de onderstaande gevallen zal doen:

a. X=2, Y=6

b. X=4, Y=21

c. X=5, Y=2

Tot slot van deze opgave bekijken we de programmeercode:

IF (X≥6) AND (X<6) THEN (ACTIE!)

d. Wat is er aan de hand bij de bovenstaande programmaregel?

Tautologie en contradictie

We hebben gezien dat de samengestelde propositie $P \Leftrightarrow Q$ precies dan waar is als *P* en *Q* dezelfde waarheidswaarde hebben. *P* en *Q* heten dan dus *equivalent* of *gelijkwaardig .*

Laten we de waarheidswaarde van $(\neg P \vee Q)$ eens onderzoeken met een waarheidstabel.

P	Q	$\neg P \vee Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vergelijken we dit met de waarheidstabel van de implicatie, dan zien we geen enkel verschil. Met andere woorden: $(\neg P \vee Q)$ en $(P \Rightarrow Q)$ hebben altijd (wat *P* en *Q* ook zijn) dezelfde waarheidswaarde en zijn dus equivalent of gelijkwaardig. Dus mogen we schrijven:

$$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Hier staat eigenlijk weer een propositie. Als we van deze propositie een waarheidstabel maken, zien we dat de waarheidswaarde van $(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ altijd 1 is.

P	Q	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Hiermee hebben we het volgende aangetoond:

De proposities $P \Rightarrow Q$ en $(\neg P \vee Q)$ zijn gelijkwaardig.

Een samengestelde propositie die altijd waarheidswaarde 1 heeft, heet een *tautologie*.

Heeft een samengestelde propositie altijd waarheidswaarde 0, dan spreken we van een *contradictie*.

Opgave 2.6

a. Toon aan met een waarheidstabel dat de samengestelde propositie $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ een contradictie is.

b. Toon aan met een waarheidstabel dat de samengestelde propositie $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \vee Q)$ een tautologie is.

Opgave 2.7

Gebruik waarheidstabellen om aan te tonen dat de volgende proposities tautologieën zijn.

a. $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$

b. $(P \vee P) \Leftrightarrow P$

c. $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ (wet van de dubbele ontkenning)

d. $(P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow P$

e. $(P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow P$

f. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Soms hebben we te maken met een situatie die lijkt in te gaan tegen ons gevoel voor logica en tegen onze verwachting. De tegenstrijdigheid komt vaak door een denkfout of een verkeerde redenering.
We spreken dan van een paradox.

Een beroemde paradox is de paradox van Epimenides.
De Kretenzer Epimenides zegt: “Alle Kretenzers liegen altijd”.

De vraag is natuurlijk: Spreekt Epimenides de waarheid?

Stel dat Epimenides de waarheid spreekt. Dan liegen alle Kretenzers altijd. Aangezien Epimenides zelf een Kretenzer is, zou dat betekenen dat hij zelf ook altijd liegt. Maar dit zou betekenen dat zijn bewering ook niet klopt, dus moet Epimenides wel liegen.

Opgave 2.8

Lees het onderstaande verhaal over Achilles en de schildpad.

De schildpad daagde Achilles uit voor een hardloopwedstrijd. Hij beweerde dat hij zou winnen als Achilles hem een kleine voorsprong gaf. Achilles moest lachen, want hij was natuurlijk een machtige strijder, snel van voet, terwijl de Schildpad zwaar en langzaam was.
"Hoeveel voorsprong?" vroeg hij de Schildpad met een glimlach.
"Tien meter," antwoordde deze. Achilles lachte harder dan ooit.
"Dan ga jij zeker verliezen, vriend" vertelde hij de Schildpad, "maar laten we vooral rennen, als je graag wilt."
"In tegendeel," zei de Schildpad, "ik zal winnen, en ik kan het je met een eenvoudige redenering bewijzen."
"Kom op dan," antwoordde Achilles, die al iets minder vertrouwen voelde dan voordien. Hij wist dat hij de superieure atleet was, maar hij wist ook dat de Schildpad een scherper verstand had, en dat hij al vaak een discussie met het dier had verloren.
"Veronderstel," begon de Schildpad, "dat u me een voorsprong van 10 meter geeft. Zou u zeggen dat u die 10 meters tussen ons snel kan afleggen?"
"Zeer snel," bevestigde Achilles.
"En hoeveel meter heb ik in die tijd afgelegd, denkt u?"
"Misschien een meter - niet meer," zei Achilles na even nagedacht te hebben.
"Zeer goed," antwoordde de Schildpad, "dus nu is er een meter afstand tussen ons. En zou u die achterstand snel inlopen?"
"Zeer snel inderdaad!"
"En toch zal ik in die tijd verder gegaan zijn, zodat u DIE afstand moet inhalen, ja?"
"Eeh ja" zei Achilles langzaam.
"En terwijl u dat doet, zal ik een stukje verder gegaan zijn, zodat u steeds een nieuwe achterstand moet inlopen" ging de Schildpad stug door.
Achilles zei niets.
"En zo ziet u, elke periode dat u bezig bent uw achterstand in te halen zal ik gebruiken om een nieuwe afstand, hoe klein ook, aan die achterstand toe te voegen."
"Inderdaad, daar valt geen speld tussen te krijgen," antwoordde Achilles, nu al vermoeid.
"En zo kunt u nooit de achterstand in lopen," besloot de Schildpad met een sympathieke glimlach.
"U heeft gelijk, zoals altijd," besloot Achilles droevig - en gaf de race gewonnen.

Leg uit waarom er in dit verhaal sprake is van een paradox.

Wetten van De Morgan

Een aantal eigenschappen uit de logica heeft een speciale naam gekregen. In opgave 6 hebben we daarvan een aantal voorbeelden gezien. De belangrijkste eigenschappen worden soms naar een persoon genoemd. Twee zeer belangrijke voorbeelden zijn de wetten van De Morgan, genoemd naar de Engelse wiskundige August de Morgan (1806-1871):

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
En

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

Door middel van waarheidstabellen is het bewijs van de wetten van De Morgan eenvoudig te geven.

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

De wetten van De Morgan zijn vaak handig bij het ontkennen van proposities. Nemen we de samengestelde propositie R:
- Ik heb zwart haar (P) en ik houd van cognac (Q).

De propositie *R* is nu te schrijven als: $P \wedge Q$.

De ontkenning van *R* is:

$\neg R \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (*)\neg P \vee \neg Q.$

$^{(*)}$: Deze overgang kunnen we nu maken door één van de wetten van De Morgan. Het is een goede gewoonte om bij bewijzen aan te geven waarom de stappen precies toegestaan zijn.

In woorden luidt de ontkenning van *R* dus:
- Ik heb geen zwart haar of ik houd niet van cognac.

Opgave 2.9

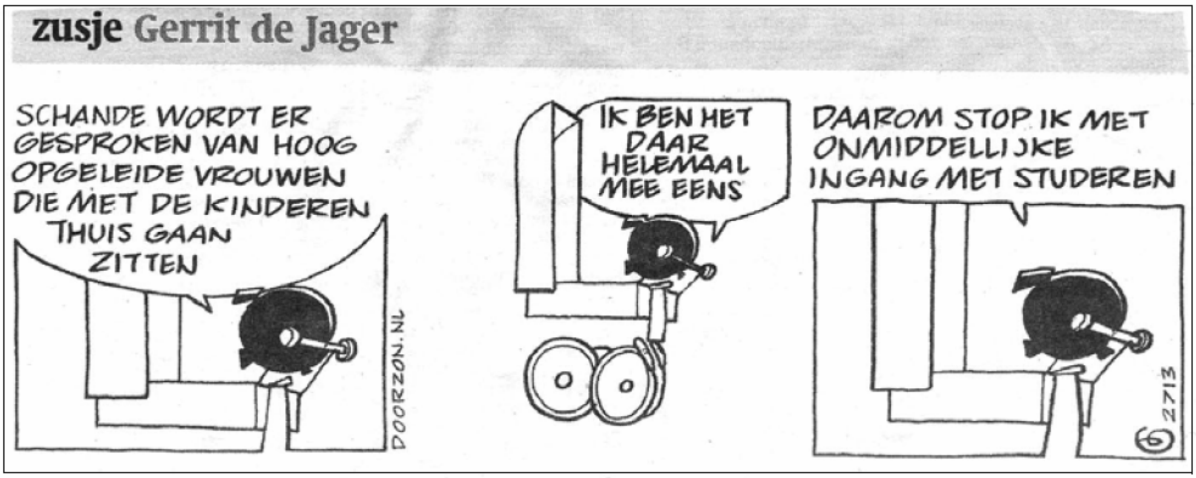
Toon aan, *zonder* gebruik te maken van waarheidstabellen, dat de ontkenning van $(P \Rightarrow Q)$ luidt:
$P \wedge \neg Q$.

Opgave 2.10

Pas een wet van de Morgan toe op de onderstaande zin (geef dus een gelijkwaardige zin nadat je de Morgan hebt toegepast):

Je vooropleiding is niet havo of vwo.

Opgave 2.11



De bovenstaande strip gaat over vrouwen met kinderen.
Bij deze tekst gebruiken we twee proposities:

H: ze is hoger opgeleid T: ze blijft thuis

Er wordt schande gesproken van $H \wedge T$. Zusje zegt eigenlijk $\neg(H \wedge T)$. Is haar besluit het enige juiste volgens de wereld van de logica?

Contrapositie

Een tautologie die we heel vaak gebruiken in bewijzen, is de contrapositie. Deze luidt:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Voorbeelden:
Als ik te veel cognac drink, dan word ik dronken.
Contrapositie: Als ik niet dronken word, dan heb ik niet te veel cognac gedronken.

Als mijn schoonmoeder komt, dan ben ik vertrokken.
Contrapositie: Als ik niet ben vertrokken, dan is mijn schoonmoeder niet gekomen.

Als je niet gek bent, dan vind je wiskunde het mooiste vak.
Contrapositie: Als je wiskunde niet het mooiste vak vindt, dan ben je gek.

Een zin en zijn contrapositie geven steeds dezelfde informatie.

Het bewijs kan uiteraard weer geleverd worden met een waarheidstabel.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Merk op dat de propositie $\neg Q \Rightarrow \neg P$ dus *niet* de ontkenning is van $P \Rightarrow Q$, maar het betreft hier een equivalentie.

Opgave 2.12

Geef van de onderstaande zinnen de contrapositie:

a. Als ik geslaagd ben, geef ik een feest.
b. Als de trein niet rijdt, ga ik lopen.
c. Als $x^2 = y^2$, dan $x = y$ of $x = -y$.

Logica toegepast op de Grafische Rekenmachine

We hebben al even verwezen naar de Grafische Rekenmachine bij de behandeling van de negatie, de conjunctie, de disjunctie en het exclusief "of".
In het TEST-menu (onder LOGIC) van de TI-83/84 kom je ze tegen als: and, or, xor en not.
De bewerkingen and, or, xor en not resulteren in een waarde 1 (waar) of 0 (niet-waar)
De uitdrukking 3<6 and 9>8 zal de waarde 1 opleveren. Waarom?

Opgave 2.13

Welke uitkomsten zullen de volgende uitdrukkingen opleveren:

a. 9<10 or 1<2
b. $3 \neq 8$xor 2<4
c. $3 \neq 8$ and 2<4
d. Ga met behulp van je Grafische Rekenmachine na of je antwoorden juist zijn door de uitdrukkingen in je rekenmachine in te tikken.

Een mooie toepassing van bovenstaande is de volgende:

Gegeven de functie f die bestaat uit twee voorschriften:
$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \; als\, 0 \leq x \leq 10 \, en \; f(x) = 1000 - \frac{1}{2}(20-x)^3 \; als\, 10 < x \leq 20$$

Opgave 2.14

Tegen welk probleem loop je aan als je met je Grafische Rekenmachine de grafiek van *f* wilt tekenen?

Om de grafiek te plotten van de functie *f* (die dus uit twee voorschriften bestaat) kunnen we als volgt te werk gaan.

Voer in je Grafische Rekenmachine in:

Y_1=0.5X^3
Y_2=1000-0.5(20-X)^3
$Y_3=Y_1*(X \leq 10)+Y_2*(X>10)$
Kies voor Xmin=0, Xmax=20, Ymin= -100 en Ymax=1000

Opgave 2.15

Leg uit waarom je Y_3 moet laten tekenen? Verklaar dat je nu de grafiek van de functie *f* hebt laten tekenen door de Grafische Rekenmachine.

Commutatief

Als we de waarheidstabellen van de conjunctie, disjunctie, bi-implicatie en exclusief-of eens goed bekijken, kunnen we constateren dat er een zekere symmetrie is. Als we namelijk de rol van *P* en *Q* verwisselen, blijven de waarheidstabellen correct. Dit betekent dat de volgende paren proposities gelijkwaardig zijn:

- $P \wedge Q$ en $Q \wedge P$
- $P \vee Q$ en $Q \vee P$
- $P \triangle Q$ en $Q \triangle P$
- $P \Leftrightarrow Q$ en $Q \Leftrightarrow P$

We hadden ook kunnen zeggen dat de volgende proposities tautologieën zijn:

- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
- $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
- $(P \triangle Q) \Leftrightarrow (Q \triangle P)$
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

We zeggen nu dat de logische bewerkingen $\wedge$, $\vee$, $\triangle$ en $\Leftrightarrow$ *commutatief* zijn.

De bewerking $\Rightarrow$ is niet commutatief.

Opgave 2.16

Laat met een waarheidstabel zien dat de implicatie niet commutatief is.

Associatief

De samengestelde propositie

$P \wedge Q \wedge R$

kan op twee manieren worden opgevat.

Enerzijds kan bedoeld worden $((P \wedge Q) \wedge R)$,
anderzijds is het te interpreteren als $(P \wedge (Q \wedge R))$.

Het zal blijken dat er geen verschil is tussen de twee mogelijke interpretaties.
Dat wil zeggen dat de proposities $((P \wedge Q) \wedge R)$ en $(P \wedge (Q \wedge R))$ gelijkwaardig zijn.

We zeggen dan dat de bewerking $\wedge$ associatief is.

De waarheidstabel die ons een en ander duidelijk maakt, zal nu bestaan uit acht regels, want we kunnen *P*, *Q* en *R* alledrie waarheidswaarde 0 of 1 toekennen.

P	Q	R	$P\wedge Q$	$Q\wedge R$	$(P\wedge Q)\wedge R$	$P\wedge(Q\wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Het is dus zo dat $(P\wedge Q\wedge R)$ slechts dan waar is, als zowel *P* als *Q* als *R* waar is. Dit is in overeenstemming met wat we op grond van onze kennis van de taal zouden verwachten.

Op vergelijkbare wijze kunnen we aantonen dat de bewerking $\vee$ associatief is.

Opgave 2.17

Toon aan met een waarheidstabel dat de dat de bewerking $\vee$ associatief is.

Opgave 2.18

Toon aan met een waarheidstabel dat de implicatie niet associatief is.

Distributief

Naast de commutatieve en associatieve eigenschap is er nog een derde belangrijke eigenschap van bewerkingen en wel de distributieve eigenschap. Een verschil met de vorige twee is dat er bij deze eigenschap nu twee bewerkingen een rol spelen. Bij het optellen en vermenigvuldigen van getallen past nagenoeg de gehele mensheid de distributieve eigenschap moeiteloos toe. Immers, ik ken geen mensen die niet inzien dat $2\cdot(3+4)$ gelijk is aan $(2\cdot 3)+(2\cdot 4)$.

In dit geval zeggen we dat de vermenigvuldiging linksdistributief is over de optelling.

De logische bewerkingen zijn rijk aan distributiviteit. Zo zijn bijvoorbeeld de volgende paren proposities gelijkwaardig:

- $P \wedge (Q \vee R)$ en $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- $(P \vee Q) \wedge R$ en $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
- $P \vee (Q \wedge R)$ en $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $(P \wedge Q) \vee R$ en $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

De eerste van de hiervoor genoemde eigenschappen ($\wedge$ is linksdistributief over $\vee$) zullen we met een waarheidstabel bewijzen. Daarna zullen we zien dat voor het bewijs van de tweede eigenschap ($\wedge$ is rechtsdistributief over $\vee$) geen waarheidstabel nodig is.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Nu bewijzen we de tweede eigenschap ($\wedge$is rechtsdistributief over $\vee$); de verantwoording staat weer tussen haakjes.

$(P \vee Q) \wedge R$ $\Leftrightarrow$ ($\wedge$ is commutatief)
$R \wedge (P \vee Q)$ $\Leftrightarrow$ ($\wedge$ is links-distributief over $\vee$, hierboven bewezen)
$(R \wedge P) \vee (R \wedge Q)$ $\Leftrightarrow$ ($\wedge$ is commutatief)
$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Omdat $\wedge$ zowel links- als rechtsdistributief is over $\vee$, zeggen we dat $\wedge$ *distributief* is over $\vee$.

De distributiviteit van $\vee$ over $\wedge$ is op vergelijkbare wijze aan te tonen.

Opgave 2.19

Pas een distributie-eigenschap toe op de volgende zinnen:

a. Hij heeft een talenknobbel of hij heeft Duits en Frans in zijn vakkenpakket.
b. Zij studeert in Zwolle en komt uit Groningen of Friesland.

Extra oefenopgaven:

Opgave 2.20

Toon aan dat de propositie

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \wedge \neg R)$$

een contradictie is.

Opgave 2.21

Een uitspraak van Loesje in de rubriek 'Grootse daden van de kleine burger':

"De conciërge van het Willem III College heeft een doos vol smoesjes voor als je te laat bent en hij geen zin heeft om streng te zijn."

In bovenstaande uitspraak zijn drie proposities te onderscheiden.
Noteer deze drie proposities en schrijf de uitspraak in de taal van de logica.

Opgave 2.22

Er zijn 2 rode en 3 zwarte petjes. Drie kinderen kennen de petjes en zitten in een rij achter elkaar. Ieder kind krijgt een petje op. Ze kunnen alleen de petjes zien van degenen die voor ze zitten.
Aan het achterste kind wordt gevraagd: "Weet jij welke kleur pet je op hebt?" Hij kijkt naar de 2 petjes voor zich, denkt even na en zegt dan: "nee." Vervolgens wordt dit aan de middelste gevraagd. Die ziet maar 1 petje voor zich denkt na en antwoordt ook ontkennend De voorste is even stil en zegt: "Dan weet ik de kleur van mijn petje!" Welke kleur is dat?

Opgave 2.23

In gebouwen, bijvoorbeeld ziekenhuizen of bibliotheken, wordt bij de ingang wel eens gebruik ge-
maakt van een luchtsluis om tocht te voorkomen. Er zijn dan twee deuren: een buitendeur en een bin-
nendeur. Het is de bedoeling dat de deuren niet tegelijk open zijn. Soms moet je even wachten op het opengaan van de ene deur totdat de andere deur weer gesloten is.
We maken de volgende afkortingen:

A: de buitendeur is open
B: de binnendeur is open.

De deuren mogen dus niet tegelijk open staan., dus $\neg(A \wedge B)$

a. Hoe kunnen we volgens de wetten van de Morgan deze samengestelde propositie anders schrijven?

Als het goed is heb je o.a. gebruik gemaakt van het $\vee$-teken, dus het inclusieve OF.

b. Is het juist dat we hier gebruik moeten maken van het inclusieve OF? Wat zou het betekenen als hier het exclusieve OF had gestaan?

Het is mogelijk om een samenstelling te maken met $\vee, \wedge$ en $\neg$ die dezelfde waarheidstabel oplevert als het exclusieve OF.

c. Probeer zo'n samenstelling te maken.

Opgave 2.24

Een edelman zit in een cel en is ter dood veroordeeld, maar hij krijgt nog één kans.
Hij mag één van de twee deuren in zijn cel openen. Achter de ene deur ligt een tijger die hem zal verslinden, achter de andere deur een prinses met wie hij mag trouwen.
Voor iedere deur staat een wachter, die weet wat zich achter de deur bevindt.
De ene wachter spreekt altijd de waarheid, de andere liegt altijd en elk weet dit van de ander. De edelman weet natuurlijk niet wie de waarheid spreekt en wie liegt.
Hij mag voordat hij een deur opent één van de wachters een vraag stellen waarop hij alleen het antwoord 'ja' of 'nee' zal krijgen.
Welke vraag moet de edelman stellen?

3. Verzamelingen

Voordat we verder gaan met hoofdstuk 4 zullen we eerst één van de belangrijkste begrippen uit de wiskunde moeten behandelen: het begrip *verzameling*.
Een verzameling wordt meestal met een hoofdletter, bijvoorbeeld V aangegeven.
Een verzameling bestaat uit zogenaamde elementen, vaak zijn dit getallen.
Een voorbeeld:

V={0, 1, 2, 3, 4}

Hierboven staat een verzameling V met de elementen 0, 1, 2, 3 en 4.
Let op de notatie: de elementen staan tussen accolades en gescheiden door komma's.
In het bovenstaande voorbeeld hebben we te maken met een eindig aantal elementen, de verzameling V bestaat immers uit 5 elementen.
Omdat 3 in de verzameling V zit, noteren we $3 \in V$.
Het symbool $\in$ spreken we uit als: 'element van'.
Omdat 5 niet in V zit, noteren we $5 \notin V$.
Het symbool $\notin$ spreken we uit als: 'geen element van'.
Er zijn ook verzamelingen die bestaan uit oneindig veel elementen.
Voorbeeld: W is de verzameling van alle 3-vouden (d.w.z. de uitkomsten van de tafel van 3)
Dus kunnen we schrijven:

W={3, 6, 9, 12, 15, 18, ………..}

W bestaat dus uit oneindig veel elementen.

In de wiskunde werken we vaak met een aantal veel voorkomende verzamelingen. Dit zijn de volgende verzamelingen:

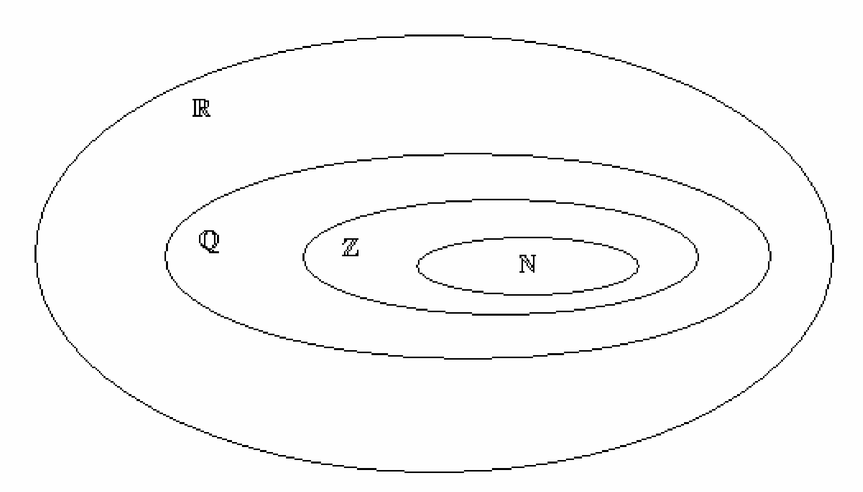
$\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ………………}, de verzameling van de natuurlijke getallen

$\mathbb{Z}$ ={……,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ….}, de verzameling van alle gehele getallen

$\mathbb{Q}$: de verzameling van alle rationale getallen, d.w.z. alle breuken en getallen die je als breuk kunt schrijven. Dit kunnen zowel positieve als negatieve getallen zijn.
Dus er geldt $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, maar er geldt ook $2 \in \mathbb{Q}$, omdat we 2 kunnen schrijven als $\frac{2}{1}$, dus als een breuk.

Tot slot behandelen we de verzameling $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ is de verzameling van alle reële getallen, dat wil zeggen alle breuken (dus automatisch ook alle gehele getallen), maar ook alle getallen die niet als breuk geschreven kunnen worden. Bij getallen die je niet als breuk kunt schrijven denken we aan getallen als $\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, π.
In de verzameling $\mathbb{R}$ zitten zowel positieve als negatieve getallen.

Je zult begrijpen dat alle elementen die in de verzameling $\mathbb{N}$ zitten zeker in de verzameling $\mathbb{Z}$ zitten.
Tevens geldt dat alle elementen uit de verzameling $\mathbb{Z}$ zeker in de verzameling $\mathbb{Q}$ zitten en er geldt ook dat alle elementen uit $\mathbb{Q}$ zeker in de verzameling $\mathbb{R}$ zitten.
We kunnen dit in het onderstaande plaatje als volgt weergeven:



Opgave 3.1

Welke van de onderstaande getallen zijn element van $\mathbb{N}$?

$4, -3, 16, -789, 1000, \frac{3}{5}, \frac{10}{5}.$

b. Welke van de onderstaande getallen zijn element van $\mathbb{Z}$?

$-7, 6, -\sqrt{16}, \frac{4}{3}, -\frac{14}{7}$

c. Welke van de onderstaande getallen zijn element van $\mathbb{Q}$?

$-9, 4, \frac{3}{5}, \frac{8}{4}, \sqrt{20\frac{1}{4}}, -\pi, 15$

d. Welke van de onderstaande getallen zijn wel element van $\mathbb{R}$, maar niet van $\mathbb{Q}$?

$\sqrt{4}, \pi, \sqrt{\pi}, -\frac{3}{4}, 2, \sqrt{24}$

4. Predikatenlogica

Tot nu toe hebben we gewerkt met proposities. Dit onderdeel heet dan ook propositielogica.
Nu gaan we open beweringen of *predikaten* aan de orde stellen.
Dit noemen we predikatenlogica.
Voorbeelden van open beweringen of predikaten zijn:

$x-1>0$

$x^2+2x-5<0$

$y=2x^2+1$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Open beweringen bevatten één of meer letters die nog geen vaste waarde hebben.
Van open beweringen kun je dus ook niet zeggen of ze waar of onwaar zijn.
Het zijn geen proposities.
Zodra je getallen hebt ingevuld, wordt de open bewering een propositie, die waar is of niet waar is.

We kunnen het predikaat $2(x-6)=18$ bijvoorbeeld noteren met $P(x)$.
Substitueren we voor *x* achtereenvolgens 4, 15 en 26, dan krijgen we de proposities $P(4)$, $P(15)$ en $P(26)$. Van deze drie proposities is $P(15)$ waar en zijn $P(4)$ en $P(26)$ niet waar.

Als $P(x)$ gelijk is aan $x+1>5$ en $Q(x)$ is gelijk aan $x>4$, is het predikaat $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ voor *elke* waarde van *x* een ware propositie.
Vandaar dat we mogen schrijven: $x+1>5\Leftrightarrow x>4$.

Als $P(x)$ gelijk is aan $(x-6)(x+5)=0$ en $Q(x)$ is gelijk aan $x-6=0$, is het predikaat
$P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ *niet* voor elke waarde van *x* een ware propositie.
Vandaar dat we *niet* mogen schrijven: $(x-6)(x+5)=0\Leftrightarrow x-6=0$.

Wel geldt bijvoorbeeld: $(x-6)(x+5)=0\Leftarrow x-6=0$
We staan hier nog even bij stil, want het lijkt eenvoudiger dan het is. Het gaat hier dus om het predikaat $P(x)\Leftarrow Q(x)$, oftewel $Q(x)\Rightarrow P(x)$, en deze zou voor elke waarde van *x* een ware propositie opleveren. We nemen voor *x* in ieder geval de "kritieke waarden" -5 en 6. Daarnaast nog een andere waarde, bijvoorbeeld 19.

We moeten nu nagaan dat de implicaties $Q(-5) \Rightarrow P(-5)$, $Q(6) \Rightarrow P(6)$ en $Q(19) \Rightarrow P(19)$ waar zijn.

$Q(-5) \Rightarrow P(-5)$	deze implicatie is waar, want $0 \Rightarrow 1$ is waar.
$Q(6) \Rightarrow P(6)$	deze implicatie is waar, want $1 \Rightarrow 1$ is waar.
$Q(19) \Rightarrow P(19)$	deze implicatie is waar, want $0 \Rightarrow 0$ is waar.

De laatste situatie krijgen we steeds als we een willekeurig getal (ongelijk aan -5 en 6) kiezen.

Al-kwantor

We bekijken nog even weer de onderstaande voorbeelden:

$x-1>0$

$x^2+2x-5<0$

$y=2x^2+1$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Alleen het predikaat $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ geldt voor alle waarden a, b $\in \mathbb{R}$, de overige gelden niet voor alle waarden.
In de wiskunde gebruiken we een speciaal symbool uit te drukken: $\forall$. We spreken dit symbool uit als: "voor alle".
We maken daarvoor gebruik van de zogenaamde *al-kwantor,* ook wel *universele kwantor genoemd*. Bij een al-kwantor speelt altijd een verzameling een rol.

Voorbeeld:
Laat $P(x)$ de propositie $x+7>9$ zijn en *V* de verzameling die bestaat uit vier elementen: 4, 7, 23 en 34, dus $V=\{4,7,23,34\}$. Dan zijn de proposities $P(4)$, $P(7)$, $P(23)$ en $P(34)$ alle waar.
We kunnen ook zeggen dat voor elke *x* uit *V* het predikaat $P(x)$ een ware propositie wordt. Symbolisch schrijven we dit als volgt:

$\underset{x\in V}{\forall} P(x)$ is waar.

$\underset{x\in V}{\forall} P(x)$ is dus een ware propositie!

Opgave 4.1

Lees het onderstaande krantenberichtje:

Rookmelder voor alle Coevordenaren

Vrijwilligers van de brandweer delen zaterdag huis-aan-huis in de hele gemeente Coevorden gratis rookmelders uit. In totaal worden 16000 adressen aangedaan. De gemeente loopt vooruit op toekomstige regelgeving.

Maak met behulp van de 'Al-kwantor' bij het bovenstaande artikel een ware propositie.

Existentiële kwantor

Een predikaat $P(x)$ hoeft natuurlijk niet altijd voor alle waarden van *x* een ware propositie op te leveren. Neem de vergelijkingen $2x^2+5=3x^2-7$ en $3x+5=3x-5$ en noem ze respectievelijk $P(x)$ en $Q(x)$. Het is duidelijk dat de eerste vergelijking wel oplossingen heeft en de tweede vergelijking niet. Om aan te geven dat er waarden van $x\in\mathbb{R}$ bestaan waarvoor $P(x)$ een ware propositie is, kunnen we gebruikmaken van de *existentiële kwantor*: $\exists$.
We spreken dit symbool uit als: "er is een".

De propositie

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}(2x^2+5=3x^2-7)$$

moet dan worden gelezen als: er is *een* (reële) *x* waarvoor geldt: $2x^2+5=3x^2-7$.
Lees dus *een* en niet één!

De tweede vergelijking heeft geen oplossingen, dus de propositie

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}(3x+5=3x-5)$$

is niet waar.

Er is dus geen enkele *x* waarvoor $Q(x)$ waar is, m.a.w. voor alle *x* is $Q(x)$ niet waar.

Ga na dat $\neg\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}(3x+5=3x-5)$ gelijkwaardig is met $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\neg(3x+5=3x-5)$.

Dit is weer gelijkwaardig met $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}(3x+5\neq 3x-5)$

Met betrekking tot $P(x)$ kunnen we iets dergelijks opmerken. Niet alle waarden van *x* zijn oplossingen, dus er zijn waarden van *x* die geen oplossing zijn.

Dus
$\neg\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}(2x^2+5=3x^2-7)$ is gelijkwaardig met $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\neg(2x^2+5=3x^2-7)$.

Heel stiekem is De Morgan meegeslopen. De Morgan? Jawel!
Neem maar eens de verzameling $V=\{1,2,3,4\}$.
Dan kunnen we de propositie $\underset{x\in V}{\forall}P(x)$ schrijven als:

$P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4)$

De propositie $\underset{x\in V}{\exists}P(x)$ kunnen we schrijven als:

$P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4)$

De ontkenning van $\underset{x\in V}{\forall}P(x)$ is de propositie $\underset{x\in V}{\exists}\neg P(x)$ en deze kunnen we schrijven als:

$\neg P(1)\vee\neg P(2)\vee\neg P(3)\vee\neg P(4)$

De ontkenning van $\underset{x\in V}{\exists}P(x)$ is de propositie $\underset{x\in V}{\forall}\neg P(x)$ en deze kunnen we schrijven als:

$\neg P(1)\wedge\neg P(2)\wedge\neg P(3)\wedge\neg P(4)$

Opgave 4.2

De Franse advocaat Pierre de Fermat, was een enthousiast wiskundige, die veel wiskunde in zijn vrije tijd bedreef.
Hij kwam omstreeks 1625 met het volgende vermoeden:

$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}(\ 2^{(2^n)}+1)$ is een priemgetal.

Een priemgetal heeft slechts twee delers, het getal 1 en het getal zelf.

a. Bereken welke uitkomst je krijgt voor $n=5$.

De wiskundige Euler ontdekt in 1732 dat voor $n=5$ het vermoeden niet klopt.
Hij ontdekt dat het getal dat ontstaat door $n=5$ in te vullen deelbaar is door 641.

b. Laat zien dat Euler gelijk had.

Dus het vermoeden van de Fermat was onjuist.
We kunnen nu dus schrijven:

$\neg \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ (2^{(2^n)}+1)$ is een priemgetal.

c. Herschrijf de propositie hierboven, m.b.v. het $\exists$-symbool.

Het komt voor dat we meer kwantoren in één propositie aantreffen. Kijk maar eens naar de volgende uitdrukking (op tweeërlei wijze op te vatten):

$\underset{x\in P}{\forall} \ \underset{y\in D}{\exists} (y \ past \ op \ x)$, waarbij *P* de verzameling potjes en *D* de verzameling dekseltjes is.

Opgave 4.3

Hieronder staat een aantal open beweringen. Voeg één of meer kwantoren toe op de stippeltjes, zodanig dat er een ware propositie ontstaat.

a. .... $\sqrt{x^2} = |x|$
b. .... $y = 2x - 1$
c. .... $x^2 + y^2 = 25$

Opgave 4.4

Bewijs dat geldt: $\neg(P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$.

Opgave 4.5

Ga de waarheidswaarde na van de volgende proposities. Als er geen verzameling staat vermeld, werken we in de verzameling $\mathbb{R}$:

a. $\underset{x}{\forall}\underset{y}{\exists}(xy = 1)$
b. $\underset{x}{\forall}\underset{y}{\forall}((x > y) \vee (x < y) \vee (x = y))$
c. $\underset{x}{\forall}\underset{y}{\forall}\underset{z}{\forall}(x^3 + y^3 = z^3 \Rightarrow xyz = 0)$, waarbij *x*, *y* en *z* niet-negatieve gehele getallen zijn.
d. $\underset{x}{\exists}\underset{y}{\forall}(y + x = y)$

Opgave 4.6

Is er verschil tussen de proposities $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ (y + x^2 > 0)\ en\ \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ (y + x^2 > 0)$.

Zo ja, wat kun je zeggen van de waarheidswaarde van de beide proposities?

Opgave 4.7

Bij het vereenvoudigen van samengestelde proposities kunnen de volgende zes equivalenties af en toe goede diensten bewijzen. Ze kunnen allemaal eenvoudig worden bewezen met een tweeregelige waarheidstabel. Met T bedoelen we een bewering die altijd waar is en met F bedoelen we een bewering die nooit waar is. Laat dit zien.

a. $(P \vee T) \Leftrightarrow T$ (dominantiewet)
b. $(P \wedge T) \Leftrightarrow P$ (identiteitswet)
c. $(P \vee F) \Leftrightarrow P$ (identiteitswet)
d. $(P \wedge F) \Leftrightarrow F$ (dominantiewet)
e. $(P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$ (wet van de uitgesloten derde)
f. $(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$ (contradictiewet)

Extra oefenopgaven

Opgave 4.8

Bewijs dat de bewerking $\triangle$ associatief is.

Opgave 4.9

Toon aan dat de volgende propositie een tautologie is.
Geef bij elke stap een verantwoording.

$$(\neg(Q \Rightarrow R) \wedge \neg(\neg Q \Rightarrow (R \vee S))) \Rightarrow (\neg R \Rightarrow S)$$

Opgave 4.10

Bepaal de waarheidswaarde van de volgende proposities. Geef wel een toelichting.

a. $\underset{t\in\mathbb{R}}{\exists}(10+t^2=4t)$

b. $\underset{p\in\mathbb{R}}{\forall}(2p^2+7p+7>\frac{69}{79})$

c. $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}(x^2=y+100)$

Opgave 4.11

Schrijf de propositie $(P\Leftrightarrow Q)$ uitsluitend met de bewerkingen $\wedge$ en $\neg$. Verantwoord alle stappen.

Opgave 4.12

Toon aan dat de propositie

$$((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\wedge(P\wedge\neg R)$$

een contradictie is.

Opgave 4.13

We noemen A de verzameling van alle apen.

'Vertaal' de onderstaande proposities naar 'gewoon' Nederlands:

a. $\underset{x\in A}{\forall}\underset{y\in A}{\exists}(x\,is\,vader\,van\,y)$

b. $\underset{x\in A}{\exists}\underset{y\in A}{\forall}(x\,is\,vader\,van\,y)$

c. $\underset{x\in A}{\exists}\underset{y\in A}{\exists}(x\,is\,vader\,van\,y)$

d. $\underset{x\in A}{\forall}\underset{y\in A}{\forall}(x\,is\,vader\,van\,y)$