III (vervolg) Lineaire Transformaties in $\mathbb{R}^2$

III.7[a] Opmerkingen over dit hoofdstuk

Oorspronkelijk waren de volgende paragrafen deel van hoofdstuk III. De bedoeling ervan is om na te gaan hoe binnen het kader van de lineaire algebra over *congruentietransformaties* in het platte vlak kan worden gesproken.

Hierbij bleek echter dat het begrip affiene transformatie eigenlijk niet valt te vermijden. Het lijkt daarom beter eerst de affiene transformaties te bespreken en daarna pas de congruentie transformaties, i.p.v. andersom zoals §III.9.

Hoe de affiene transformaties zouden kunnen worden geïntroduceerd wordt geschetst in het aanhangsel §III.9. Echter zolang dit alles niet tot een leerlingentekst is omgewerkt blijven de volgende paragrafen in de huidige nogal onbevredigende vorm.

Na de gewenste omwerking is er sprake van een nieuw hoofdstuk onder de voorlopige titel **Affiene transformaties in** $\mathbb{R}^2$. (Bij deze omwerking moet ook de notatie voor de determinant in overeenstemming moeten worden gebracht met die in §I.7 en §III.6.)

Misschien is de hier gesuggereerde benadering te hoog gegrepen voor Wiskunde D VWO, maar het blijft de moeite waard te onderzoeken wat er wel mogelijk is.

III.7 Isometrie bij lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$

Bij beweging van een vast lichaam verandert de positie van de punten waaruit het lichaam is opgebouwd, maar niet de onderlinge afstand van deze punten. Ook als zo'n vast lichaam wordt gespiegeld verandert de onderlinge afstand van deze punten niet.
Er is hier sprake van een transformatie waarbij de verplaatsingsvectoren tussen de punten niet van lengte veranderen. Dit heet de *isometrie* (iso=gelijk; metriek=afstandsmaat) of de *lengtetrouw* van de transformatie. Deze beschouwing leidt tot de volgende definitie.

Definitie
Een *isometrie* $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}^2$ is een lineaire transformatie waarbij norm van de vectoren niet verandert, dus waarbij voor vectoren $\vec{a}$ geldt

$$\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{a}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

Doel van deze paragraaf is om te bewijzen dat *rotatie* en *spiegeling* isometrische lineaire transformaties zijn en dat er verder geen andere lengtegetrouwe lineaire transformaties bestaan.
Ook de *translatie,* de verschuiving van een lichaam, is lengtetrouw transformatie, maar de translatie is geen lineaire transformatie (zie opgaven III.0.1 en III.0.2)
Voor het bewijs van deze uitspraak over rotatie en spiegeling hebben we de volgende stelling nodig,

Stelling
Bij een isometrie $\mathcal{D}$ *in geldt voor alle vectoren* $\vec{a}$ *en* $\vec{b}$

$$\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

Bewijs
We beschouwen de vectoren $\vec{a} - \vec{b}$ en $\mathcal{D}(\vec{a} - \vec{b})$. Vanwege de isometrie geldt

$$\langle \mathcal{D}(\vec{a} - \vec{b}), \mathcal{D}(\vec{a} - \vec{b}) \rangle = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle$$

Omwerken van het linkerlid levert

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}(\vec{a} - \vec{b}), \mathcal{D}(\vec{a} - \vec{b}) \rangle &= \langle \mathcal{D}(\vec{a}) - \mathcal{D}(\vec{b}), \mathcal{D}(\vec{a}) - \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle && \textit{lineariteit van } \mathcal{L} \\ &= \langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{a}) \rangle - 2\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle + \langle \mathcal{D}(\vec{b}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle && \textit{bilineariteit van inproduct} \end{aligned}$$

Omwerken van het rechterlid levert

$$\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \qquad \textit{bilineariteit van inproduct}$$

Gevolg

$$\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{a}) \rangle - 2\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle + \langle \mathcal{D}(\vec{b}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

Vanwege de isometrie geldt ook $\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{a}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$ en $\langle \mathcal{D}(\vec{b}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$ met als resultaat

$$-2\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{b}) \rangle = -2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

en hieruit volgt de formule in de stelling.

□

Opmerkingen: Hoektrouw als meetkundige betekenis van de stelling

1) Volgens §I.7 wordt de hoek tussen twee vectoren gedefinieerd vanuit het inproduct volgens

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \text{met} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a},\vec{a}\rangle} \ \text{ en } \ |\vec{b}| = \sqrt{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle}$$

Uit de stelling volgt

$$\cos\angle(\mathcal{D}(\vec{a}),\mathcal{D}(\vec{b})) = \frac{\langle \mathcal{D}(\vec{a}),\mathcal{D}(\vec{b})\rangle}{|\mathcal{D}(\vec{a})||\mathcal{D}(\vec{b})|} = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

Dus bij een isometrische lineaire transformatie verandert de hoek tussen twee vectoren niet qua grootte. Dit heet de *hoektrouw* bij isometrie.

2) Ook zuiver meetkundig, d.w.z. zonder inproduct van vectoren, valt deze hoektrouw eenvoudig in te zien.

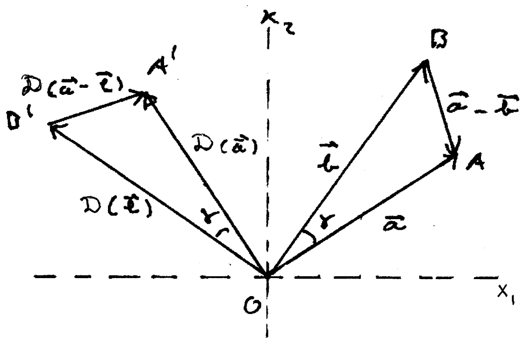
In $\mathbb{R}^2$ ondergaan de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een isometrische lineaire transformatie $\mathcal{D}$.

In de twee figuren rechts zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend als positievectoren. De lineaire transformatie $\mathcal{D}$ voert de driehoek ΔOAB over in de driehoek $\Delta OA'B'$. Bij deze transformatie veranderen de lengtes van de zijden van de driehoek niet omdat

$$OA' = |\mathcal{D}(\vec{a})| = |\vec{a}| = OA$$

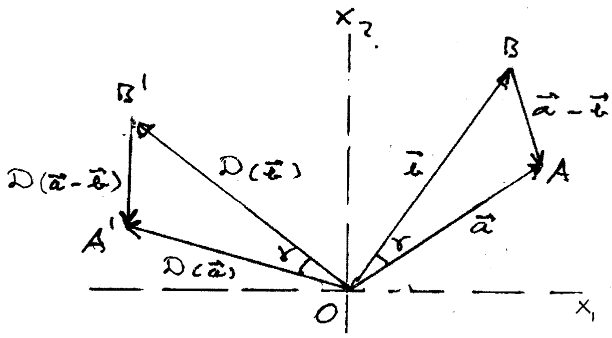
$$OB' = |\mathcal{D}(\vec{b})| = |\vec{b}| = OB$$

$$A'B' = |\mathcal{D}(\vec{a}-\vec{b})| = |\vec{a}-\vec{b}| = AB$$



Dus zijn de driehoeken $\Delta OA'B'$ en ΔOAB congruent, met als gevolg $\angle A'OB' = \angle AOB$.

Toch is er een verschil tussen beide figuren.



In de eerste figuur geldt $\angle(\vec{a}\to\vec{b}) = \gamma$ en $\angle(\mathcal{D}(\vec{a})\to\mathcal{D}(\vec{b})) = \gamma$, dus

$$\angle(\mathcal{D}(\vec{a})\to\mathcal{D}(\vec{b})) = \angle(\vec{a}\to\vec{b})$$

In de tweede figuur geldt

$\angle(\vec{a}\to\vec{b}) = \gamma$ en

$\angle(\mathcal{D}(\vec{b})\to\mathcal{D}(\vec{a})) = \gamma \quad\Rightarrow\quad \angle(\mathcal{D}(\vec{a})\to\mathcal{D}(\vec{b})) = -\gamma$, met als gevolg

$$\angle(\mathcal{D}(\vec{a})\to\mathcal{D}(\vec{b})) = -\angle(\vec{a}\to\vec{b})$$

In de eerste figuur is de georiënteerde hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ niet veranderd door de isometrische lineaire transformatie $\mathcal{D}$

In de tweede figuur is de georiënteerde hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ van teken veranderd door de isometrische lineaire transformatie $\mathcal{D}$. De oriëntatie van de vectoren $\mathcal{D}(\vec{a})$ en $\mathcal{D}(\vec{b})$ is tegengesteld aan de oriëntatie van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Het zal blijken dat een isometrie waarbij de *oriëntatie niet verandert* een *rotatie* moet zijn en dat een isometrische lineaire transformatie waarbij de *oriëntatie wel verandert* een *spiegeling* moet zijn. Dit volgt uit

Stelling

$\mathcal{D}$ is een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ met matrix D.
Er geldt dan

$$\mathcal{D} \text{ is een isometrie} \quad \Leftrightarrow \quad D=\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \quad of \quad D=\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \quad met\ p^2+q^2=1$$

Bewijs

($\Rightarrow$) Stel $\mathcal{D}$ is een isometrische lineaire transformatie.

We passen de vorige stelling toe op de vectoren $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$ van de standaard basis

$$\langle \mathcal{D}(\vec{e}_1), \mathcal{D}(\vec{e}_1)\rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = 1$$

- De vector $\mathcal{D}(\vec{e}_1) = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ heeft dus norm 1. Uitgedrukt in kolommatrices staat hier

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p^2+q^2=1$$

Verder geldt

$$\langle \mathcal{D}(\vec{e}_2), \mathcal{D}(\vec{e}_2)\rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = 1$$

- Dus ook de vector $\mathcal{D}(\vec{e}_2)$ heeft norm 1.
- Ten slotte geldt

$$\langle \mathcal{D}(\vec{e}_1), \mathcal{D}(\vec{e}_2)\rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 0$$

Inproduct nul betekent dat de vectoren $\mathcal{L}(\vec{e}_1)$ en $\mathcal{L}(\vec{e}_2)$ onderling loodrecht staan. Omdat beide dezelfde lengte 1 bezitten moet de één een nevenvector van de ander zijn.

Dus $$\mathcal{D}(\vec{e}_2) = \mathcal{D}(\vec{e}_1)^* = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$$

of $$\mathcal{D}(\vec{e}_1) = \mathcal{D}(\vec{e}_2)^* \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(\vec{e}_1)^* = \mathcal{D}(\vec{e}_2)^{**} = -\mathcal{D}(\vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D}(\vec{e}_2) = -\mathcal{D}(\vec{e}_1)^* = -\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$$

- Resultaat $$D = [\mathcal{D}(\vec{e}_1), \mathcal{D}(\vec{e}_2)] = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$$

of $$D = [\mathcal{D}(\vec{e}_1), \mathcal{D}(\vec{e}_2)] = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$$

($\Leftarrow$) Stel $D=\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ met $p^2+q^2=1$. Voor iedere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ geldt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{a})\rangle &= D\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet D\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} pa_1 - qa_2 \\ qa_1 + pa_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} pa_1 - qa_2 \\ qa_1 + pa_2 \end{pmatrix} = (pa_1 - qa_2)^2 + (qa_1 + pa_2)^2 \\
&= p^2a_1^2 - 2pqa_1a_2 + q^2a_2^2 + q^2a_1^2 + 2pqa_1a_2 + p^2a_2^2 \\
&= p^2a_1^2 + q^2a_1^2 + p^2a_2^2 + q^2a_2^2 = (p^2+q^2)a_1^2 + (p^2+q^2)a_2^2 \\
&= a_1^2 + a_2^2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle
\end{aligned}$$

Dus $\mathcal{D}$ is een isometrie.

Het geval $D=\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ met $p^2+q^2=1$ gaat analoog (zie opgave III.7.4.)

□

Combinatie van de laatste stelling met de volgende leidt tot de conclusie dat de enige isometrische lineaire transformaties in $\mathbb{R}^2$ de rotatie en de spiegeling zijn.

Stelling

De lineaire transformatie $\mathcal{D}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *met matrix* $D=\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ *en* $p^2+q^2=1$ *is een rotatie*

De lineaire transformatie $\mathcal{D}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *met matrix* $D=\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ *en* $p^2+q^2=1$ *is een lijnspiegeling*

Bewijs

Laat θ de richtinghoek zijn van de vector $\mathcal{D}(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ met de x_1-as. Omdat $\mathcal{D}(\vec{e}_1)$ lengte 1 heeft, dus een eenheidsvector is, betekent dit $\mathcal{D}(\vec{e}_1)=\vec{e}_\theta$. In kolommatrices uitgedrukt:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

In het eerste geval geldt daarom

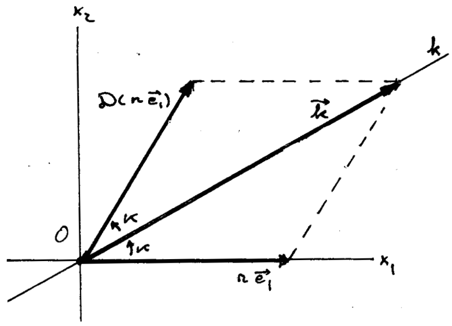
$$D=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Volgens §III.2 is dit de matrix R_θ van de rotatie $\mathcal{R}_\theta$ in $\mathbb{R}^2$ over een hoek θ

Volgens aanhangsel 1 in §III.4 heeft in $\mathbb{R}^2$ van de spiegeling $\mathcal{S}_k$ in de lijn *k* de matrix

$$S_k=\frac{1}{\left|\vec{k}\right|^2}\begin{pmatrix} {k_1}^2-{k_2}^2 & 2k_1k_2 \\ 2k_1k_2 & {k_2}^2-{k_1}^2 \end{pmatrix}$$

waarbij $\vec{k}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ een vector is langs de lijn *k*. Met een meetkundig argument zullen we deze kentallen k_1 en k_2 uitdrukken in de kentallen *p* en *q* van de matrix $D=\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ en vervolgens zullen we aantonen dat met deze uitdrukkingen inderdaad uit de matrix S_k deze matrix *D* ontstaat.



Het meetkundige argument gaat uit van een vector $n\vec{e}_1$, waarbij een nader te bepalen geschikt reëel getal *n* is, die gelijk of tegengesteld gericht is aan de vector $\vec{e}_1$ van de standaard basis. Omdat $\mathcal{D}$ een isometrie is heeft de beeldvector $\mathcal{D}(n\vec{e}_1)$ dezelfde lengte als $n\vec{e}_1$. Als $\mathcal{D}$ een lijnspiegeling is dan moet de vector

$$\vec{k}=n\vec{e}_1+\mathcal{D}(n\vec{e}_1)$$

langs de spiegellijn *k* liggen, omdat dan vanwege deze gelijke lengtes voor de hoeken geldt $\angle(n\vec{e}_1\to\vec{k})=\angle(\vec{k}\to\mathcal{D}(n\vec{e}_1))=\kappa$. Uitgedrukt in kentallen geldt

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n+np \\ nq \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} 1+p \\ q \end{pmatrix}$$

en voor de norm van $\vec{k}$ (met gebruik van $p^2+q^2=1$) betekent dit

$$\left|\vec{k}\right|^2 = n^2\left((1+p)^2+q^2\right) = n^2(1+2p+p^2+q^2) = n^2(2+2p)$$

Met deze uitdrukkingen moet, als het goed is, vanuit de matrix S_k de matrix D ontstaan

$$\frac{k_1^{\,2}-k_2^{\,2}}{\left|\vec{k}\right|^2} = \frac{n^2(1+p)^2-n^2q^2}{n^2(2+2p)} = \frac{1+2p+p^2-q^2}{2+2p}$$

$$= \frac{p^2+2p+p^2}{2+2p} = \frac{p(2+2p)}{2+2p} = p$$

$$2\frac{k_1k_2}{\left|\vec{k}\right|^2} = 2\frac{n(1+p)\cdot nq}{n^2(2+2p)} = \frac{(2+2p)q}{2+2p} = q$$

Dit betekent inderdaad $S_k = D$.

□

De volgende stelling hangt samen met het gegeven dat volgens §I.7, en ook volgens de vorige paragraaf, in $\mathbb{R}^2$ het volgende verband bestaat tussen de *determinant* $\Delta(\vec{a},\vec{b})$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met de *oppervlakte* $O(\vec{a},\vec{b})$ van het parallellogram opgespannen door deze twee vectoren:

$$O(\vec{a},\vec{b}) = \Delta(\vec{a},\vec{b}) \quad \text{als} \quad \angle(\vec{a}\to\vec{b}) > 0$$
$$O(\vec{a},\vec{b}) = -\Delta(\vec{a},\vec{b}) \quad \text{als} \quad \angle(\vec{a}\to\vec{b}) < 0$$

Stelling

Als een isometrie $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}^2$ een rotatie is, geldt voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

$$\Delta(\mathcal{D}(\vec{a}),\mathcal{D}(\vec{b})) = \Delta(\vec{a},\vec{b})$$

Als een isometrie $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}^2$ een lijnspiegeling is, geldt voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

$$\Delta(\mathcal{D}(\vec{a}),\mathcal{D}(\vec{b})) = -\Delta(\vec{a},\vec{b})$$

1^e Bewijs (met behulp van de determinant van de lineaire transformatie)

Volgens de vorige paragraaf geldt bij iedere lineaire transformatie $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}^2$ voor het verband tussen de determinanten $\Delta(\mathcal{D}(\vec{a}),\mathcal{D}(\vec{b}))$ en $\Delta(\vec{a},\vec{b})$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

$$\Delta(\mathcal{D}(\vec{a}),\mathcal{D}(\vec{b})) = \left|\mathcal{D}\right|\cdot\Delta(\vec{a},\vec{b})$$

- In het geval van een rotatie geldt

$$\left|\mathcal{D}\right| = \left|D\right| = \begin{vmatrix} p & -q \\ q & p \end{vmatrix} = p^2+q^2 = 1$$

- In geval van een spiegeling geldt

$$\left|\mathcal{D}\right| = \left|D\right| = \begin{vmatrix} p & q \\ q & -p \end{vmatrix} = -p^2-q^2 = -(p^2+q^2) = -1$$

□

2^e Bewijs (zonder hulp van de determinant van de lineaire transformatie)

- Stel $\mathcal{D}$ is een rotatie dan geldt voor de matrix $D = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ met $p^2+q^2=1$. Er geldt dan

$$\mathcal{D}(\vec{a}) = D\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_1 - qa_2 \\ qa_1 + pa_2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{D}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} pb_1 - qb_2 \\ qb_1 + pb_2 \end{pmatrix}$$

Dus $\Delta(\mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{b})) = \begin{vmatrix} pa_1 - qa_2 & pb_1 - qb_2 \\ qa_1 + pa_2 & qb_1 + pb_2 \end{vmatrix}$

$$= (pa_1 - qa_2)(qb_1 + pb_2) - (qa_1 + pa_2)(pb_1 - qb_2)$$
$$= pqa_1b_1 + p^2a_1b_2 - q^2a_2b_1 - pqa_2b_2 - (pqa_1b_1 - q^2a_1b_2 + p^2a_2b_1 - pqa_2b_2)$$
$$= p^2a_1b_2 + q^2a_1b_2 - p^2a_2b_1 - q^2a_2b_1 = (p^2+q^2)a_1b_2 - (p^2+q^2)a_2b_1$$
$$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta(\vec{a}, \vec{b})$$

- Stel $\mathcal{D}$ is een lijnspiegeling dan geldt voor de matrix $D = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ met $p^2 + q^2 = 1$.

Op analoge manier wordt afgeleid $\Delta(\mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{b})) = -\Delta(\vec{a}, \vec{b})$

□

Opmerkingen: Meetkundige betekenis van de stelling

1) In $\mathbb{R}^2$ geldt, in het geval dat $\angle(\vec{a} \to \vec{b}) > 0$, voor de determinant $\Delta(\vec{a}, \vec{b})$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en het oppervlak $O(\vec{a}, \vec{b})$ van het parallellogram opgespannen door deze twee vectoren $O(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\vec{a}, \vec{b})$

   Uit de stelling volgt dan dat in $\mathbb{R}^2$ bij een rotatie $\mathcal{R}_\theta$ resp. een spiegeling $\mathcal{S}_k$ geldt

$$O(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\mathcal{R}_\theta(\vec{a}), \mathcal{R}_\theta(\vec{b})) = O(\mathcal{R}_\theta(\vec{a}), \mathcal{R}_\theta(\vec{b}))$$
$$O(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\vec{a}, \vec{b}) = -\Delta(\mathcal{S}_k(\vec{a}), \mathcal{S}_k(\vec{b})) = O(\mathcal{S}_k(\vec{a}), \mathcal{S}_k(\vec{b}))$$

   De oppervlaktes van de parallellogrammen opgespannen door twee vectoren veranderen bij rotatie en bij spiegeling niet qua grootte.

2) Omdat $\Delta(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\mathcal{R}_\theta(\vec{a}), \mathcal{R}_\theta(\vec{b}))$ hebben het vectorpaar $\vec{a}, \vec{b}$ en het vectorpaar $\mathcal{R}_\theta(\vec{a}), \mathcal{R}_\theta(\vec{b})$ dezelfde oriëntatie, wat betekent dat de georiënteerde hoeken $\angle(\vec{a} \to \vec{b})$ en $\angle(\mathcal{R}_\theta(\vec{a}) \to \mathcal{R}_\theta(\vec{b}))$ hetzelfde teken hebben.

   Omdat $\Delta(\vec{a}, \vec{b}) = -\Delta(\mathcal{S}_k(\vec{a}), \mathcal{S}_k(\vec{b}))$ hebben het vectorpaar $\vec{a}, \vec{b}$ en het vectorpaar $\mathcal{S}_k(\vec{a}), \mathcal{S}_k(\vec{b})$ een tegengestelde oriëntatie, wat betekent dat de georiënteerde hoeken $\angle(\vec{a} \to \vec{b})$ en $\angle(\mathcal{S}_k(\vec{a}) \to \mathcal{S}_k(\vec{b}))$ een tegengesteld de teken hebben.

   Vanwege de hoektrouw verandert bij een isometrische lineaire transformatie de georiënteerde hoek tussen twee vectoren niet qua grootte. De stelling leidt derhalve tot

$$\angle(\mathcal{R}_\theta(\vec{a}) \to \mathcal{R}_\theta(\vec{b})) = \angle(\vec{a} \to \vec{b}) \qquad \text{bij een rotatie } \mathcal{R}_\theta \text{ in } \mathbb{R}^2$$
$$\angle(\mathcal{S}_k(\vec{a}) \to \mathcal{S}_k(\vec{b})) = -\angle(\vec{a} \to \vec{b}) \qquad \text{bij een rotatie } \mathcal{S}_k \text{ in } \mathbb{R}^2$$

Opgaven

III.7.1 Bewijs het volgende:
De determinant van een rotatie is gelijk aan 1.
De determinant van een spiegeling is gelijk aan -1

III.7.2 De lineaire transformaties $\mathcal{L}$ en $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^2$ worden algebraïsch gekarakteriseerd door de resp. matrices

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Leg uit welke van de twee transformaties een rotatie is en welke niet.
b) Bereken de rotatiehoek bij de draaiing.
c) Er geldt $\mathcal{M} = \lambda\mathcal{L}$. Hoe blijkt dit uit de matrices? Bereken λ .
d) Bij één van de transformaties is er sprake van een draaiing <u>en</u> een echte schaling. Welke draaiing en welke schaling?

III.7.3 De lineaire transformaties $\mathcal{L}$ en $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^2$ worden algebraïsch gekarakteriseerd door de resp. matrices

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Leg uit welke van de twee transformaties een spiegeling is en welke niet.
b) Bereken de hoek die de spiegellijn maak met de x_1-as
c) Er geldt $\mathcal{M} = \lambda\mathcal{L}$. Hoe blijkt dit uit de matrices? Bereken λ .
d) Bij één van de transformaties is er sprake van een spiegeling <u>en</u> een echte schaling. Welke spiegeling en welke schaling?

III.7.4 $\mathcal{D}$ is een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ met matrix

$$D = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \text{ waarbij } p^2 + q^2 = 1$$

Bewijs dat $\mathcal{D}$ een isometrie is, dus dat voor iedere vector $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ geldt

$$\langle \mathcal{D}(\vec{a}), \mathcal{D}(\vec{a}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

III.7.5 $\mathcal{D}$ is een lineaire transformatie in $\mathbb{R}^2$ met matrix

$$D = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Laat zien dat $\mathcal{D}$ een spiegeling is
b) Geef de kentallen van een vector $\vec{k}$ die gericht is langs de spiegellijn.

III.8 Congruentietransformaties

Aan het begin van de vorige paragraaf leverde de beweging van een star lichaam de motivering om in $\mathbb{R}^2$ de *isometrie* te definiëren. Nu vormt deze beweging een voorbeeld van wat in de wiskunde een *congruentietransformatie* heet. Immers de afstanden tussen de punten van een star lichaam veranderen niet bij de beweging ervan en in het geval van behoud van afstand heten wiskundige figuren congruent.
Echter *isometrie alleen is niet voldoende om alle congruentietransformaties te beschrijven*. Als een star lichaam alleen verschuift en niet draait, dus als het lichaam een zuivere translatie ondergaat, verandert de afstand tussen de punten ervan niet. Omdat volgens de vorige paragraaf een isometrie in $\mathbb{R}^2$ alleen een rotatie of een lijnspiegeling kan zijn is een translatie geen isometrie, maar wel een congruentietransformatie.

In deze paragraaf is de centrale vraag wat de transformaties in $\mathbb{R}^2$ kunnen zijn die de congruentietransformaties in het platte vlak beschrijven, waarvoor geldt

Definitie
Laat $\mathcal{C}$ een transformatie zijn in het platte vlak, d.w.z. dat $\mathcal{C}$ ieder punt *A* (het origineel) van dat vlak afbeeldt in een punt $\hat{A}$ (het bijbehorende beeld) van dat vlak

$$A \xrightarrow[\mathcal{C}]{} \hat{A}$$

$\mathcal{C}$ heet een *congruentietransformatie* als $\mathcal{C}$ de *afstand tussen de punten behoudt*.
Dit betekent dat als *A* en *B* twee willekeurige originelen zijn bij de afbeelding $\mathcal{C}$ met resp. beeldpunten $\hat{A}$ en $\hat{B}$ er voor de afstand geldt

$$\hat{A}\hat{B} = AB$$

Om de gedachten te bepalen eerst een

Voorbeeld

Gegeven: In een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) ontstaat een transformatie $\mathcal{C}$ door eerst een spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ in de lijn $x_2 = x_1$ uit te voeren en vervolgens een translatie $\mathcal{T}_{\vec{d}}$ over de vaste vector $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gevraagd:

a) Teken in een assenstel (x_1, x_2) de lijn $x_2 = x_1$ en ΔABC, met voor de hoekpunten *A*, *B* en *C* de resp. positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Door de spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ ontstaat uit driehoek ΔABC de driehoek $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Teken ook deze driehoek in de figuur en lees de kentallen van $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a})$, $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})$ en $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{c})$ af, de positievectoren van resp. de punten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ en $\tilde{C}$.

c) Door de translatie gaat $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ over in $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$. Teken ook deze driehoek in de figuur en lees de kentallen $\mathcal{C}(\vec{a})$, $\mathcal{C}(\vec{b})$ en $\mathcal{C}(\vec{c})$ af, de positievectoren van resp. de punten $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$.

d) Toon met de antwoorden uit b) en c) aan dat geldt

$$\mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a}) + \vec{d}$$
$$\mathcal{C}(\vec{b}) = \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}) + \vec{d}$$
$$\mathcal{C}(\vec{c}) = \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{c}) + \vec{d}$$

e) Bereken $\left|\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right|$ en $\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$

$\left|\mathcal{C}(\vec{c}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right|$ en $\left|\vec{c}-\vec{a}\right|$

$\left|\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{c})\right|$ en $\left|\vec{b}-\vec{c}\right|$

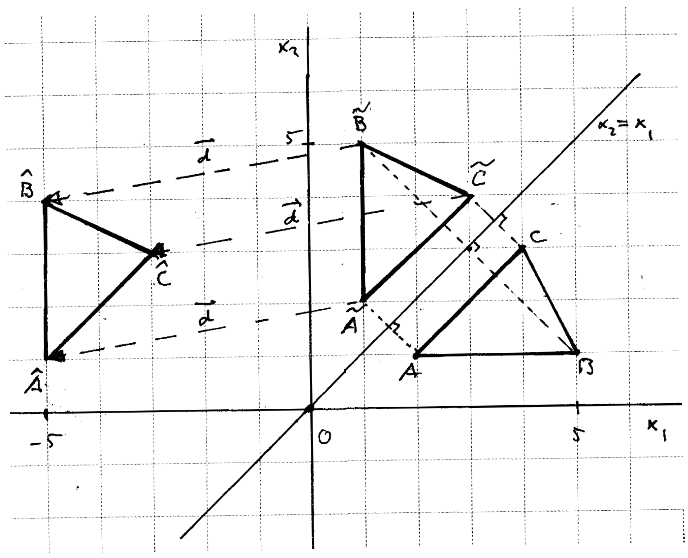
Wat is de meetkundige betekenis van deze resultaten?

f) De spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ wordt vastgelegd door de matrix $S_{x_2=x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Toon met behulp van deze matrix aan dat geldt

$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}$$
$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{\hat{A}\hat{C}}$$
$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{\hat{B}\hat{C}}$$

Oplossing



a) Zie figuur

b) Positievectoren voor

Punt $\tilde{A}$ $\quad \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Punt $\tilde{B}$ $\quad \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Punt $\tilde{C}$ $\quad \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Positievectoren voor

Punt $\hat{A}$ $\quad \mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Punt $\hat{B}$ $\quad \mathcal{C}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punt $\hat{C}$ $\quad \mathcal{C}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

d)
$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a}) + \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{C}(\vec{a})$$
$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}) + \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathcal{C}(\vec{b})$$
$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{c}) + \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathcal{C}(\vec{c})$$

e) $$\hat{A}\hat{B} = \left|\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+3^2} = 3$$

en $$AB = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$$

$$\hat{A}\hat{C} = \left|\mathcal{C}(\vec{c}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

en $$AC = \left|\vec{c} - \vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\hat{C}\hat{B} = \left|\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{c})\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$$

en $$CB = \left|\vec{b} - \vec{c}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

Er geldt dus $\hat{A}\hat{B} = AB$, $\hat{A}\hat{C} = AC$ en $\hat{C}\hat{B} = CB$, gevolg $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C} \cong \Delta ABC$, d.w.z. dat ΔABC en zijn $\mathcal{C}$-beeld $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ congruent zijn.

e) $$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{AB}) = S_{x_2=x_1}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}$$

$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{AC}) = S_{x_2=x_1}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}$$

$$\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{BC}) = S_{x_2=x_1}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{\hat{B}\hat{C}}$$

Opmerkingen

1) Een spiegeling is een congruentietransformatie en een translatie ook. Beide behouden dus de afstanden tussen de punten. De opeenvolging van een translatie na een spiegeling zal dus ook de afstanden bewaren. Vraag e) illustreert dat dit inderdaad het geval is.

2) Door het aanbrengen van een standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak wordt ieder punt vastgelegd door een positievector. De congruentietransformatie $\mathcal{C}$ in het vlak kan hierdoor worden beschreven in $\mathbb{R}^2$ met een transformatie van vectoren. In $\mathbb{R}^2$ wordt voor de congruentietransformatie hetzelfde symbool $\mathcal{C}$ gebruikt. Zo wordt in vraag d) bij de congruentietransformatie voor het beeld van de vector $\vec{a}$ geschreven
$$\mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a}) + \vec{d}$$
Hierin is $\vec{a}$ de positievector van het punt A in het vlak en $\mathcal{C}(\vec{a})$ de positievector van punt $\hat{A}$, het $\mathcal{C}$-beeld van A.

3) Strikt genomen zou men in het vlak moeten spreken van een meetkundige *transformatie*, die in $\mathbb{R}^2$ wordt beschreven door een algebraïsche *operatie*. Wij zullen echter zowel in het vlak als in $\mathbb{R}^2$ spreken van een congruentietransformatie, en niet van een congruentieoperatie in $\mathbb{R}^2$. Ook zou strikt genomen de meetkundige congruentietransformatie en de algebraïsche congruentieoperatie met twee

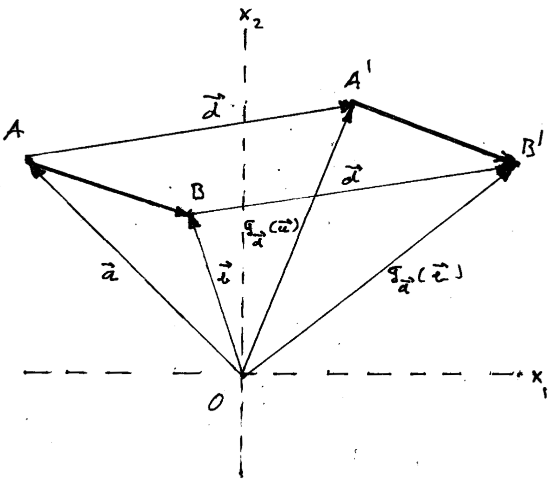
verschillende symbolen moeten worden aangegeven in plaats van met eenzelfde symbool $\mathcal{C}$.

4) Een *lineaire transformatie* in $\mathbb{R}^2$, zoals de spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ in het voorbeeld, kan in het vlak met een standaard assenstelsel (x_1, x_2) *zowel worden toegepast op de positievectoren als op de verplaatsingsvectoren*.
Door de lineariteit is er *behoud van verschil*. Zo geldt voor de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ uit het voorbeeld

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a}) &= \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}+(-1)\vec{a}) && \textit{definitie verschil}\\
&= \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})+\mathcal{S}_{x_2=x_1}((-1)\vec{a}) && \textit{behoud optelling}\\
&= \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})+(-1)\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a}) && \textit{behoud schaling}\\
&= \mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})-\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a}) && \textit{definitie verschil}
\end{aligned}$$

Het is juist *door dit behoud van verschil dat de spiegeling* niet alleen *mag worden toegepast op positievectoren*, maar *ook op verplaatsingsvectoren*.
In het voorbeeld zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ positievectoren en ook $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a})$ en $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})$ zijn positievectoren. In het linkerlid wordt de operatie spiegeling toegepast op de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ waardoor de vector $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})$ ontstaat. De formule stelt dat deze vector $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})$ ook een verplaatsingsvector is en wel de verplaatsingsvector $\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})-\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a})$ van de gespiegelde punten.
Kort gesteld geldt dus dat de spiegeling van een verplaatsingsvector de verplaatsingsvector van de gespiegelden oplevert..

5) Een *translatie* $\mathcal{T}_{\vec{d}}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt in het platte vlak met een standaard assenstelsel (x_1, x_2) *alleen toegepast op de positievectoren* en nooit op de verplaatsingsvectoren.
De reden is dat *bij translatie er geen sprake is van behoud van verschil,* wat duidelijk zal worden gemaakt aan de hand van de figuur rechts.



De positievectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ van de punten *A* en *B* hebben als beelden

$$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a})=\vec{a}+\vec{d}$$
$$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b})=\vec{b}+\vec{d}\ ,$$

die de resp. positievectoren van de punten A' en B' zijn, die door verschuiving over de vector $\vec{d}$ uit de punten A resp. *B* ontstaan.
Voor de verplaatsingsvectoren geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b})-\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a}) &= (\vec{b}+\vec{d})-(\vec{a}+\vec{d})\\
&= \vec{b}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{d}\\
&= \vec{b}-\vec{a}
\end{aligned}$$

D.w.z. $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$. Bij de *translatie blijven de verplaatsingsvectoren* dus *onveranderd,* terwijl *de positievectoren wel veranderen* als $\vec{d}\neq\vec{0}$.
Dit betekent ook dat er geen behoud van verschil kan zijn als $\vec{d}\neq\vec{0}$, want

$$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}-\vec{a}+\vec{d}\neq\vec{b}-\vec{a}$$

wat samen met het vorige oplevert

$$\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b}-\vec{a})\neq\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{b})-\mathcal{T}_{\vec{d}}(\vec{a})$$

Dat er geen behoud van verschil bestaat maakt opnieuw duidelijk dat de translatie een niet-lineaire transformatie is in $\mathbb{R}^2$ (zie ook de opgaven bij §III.0).

6) Bij de translatie van $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ naar $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ in het voorbeeld betekent het voorgaande dat de verplaatsingsvectoren niet veranderen. Dus geldt bijvoorbeeld $\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}=\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}$.
Dit levert tevens de meetkundige verklaring van de resultaten bij f).
Want $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ ontstaat door de spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ uit ΔABC. Voor de verplaatsingsvectoren bij deze driehoeken betekent dit bijvoorbeeld $\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{AB})$.
Vanwege het niet veranderen van verplaatsingsvectoren bij translatie ontstaan ook de verplaatsingsvectoren van $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ uit de spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ van de verplaatsingsvectoren van ΔABC. Dit argument levert het resultaat dat bij f) via berekening is gevonden

$$\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\overrightarrow{AB})$$

7) Wegens het feit dat een verplaatsingsvector een verschil is van twee positievectoren kan deze laatste formule omgeschreven worden naar verschillen van positievectoren.
In het rechterlid wordt de operatie spiegeling toegepast op de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ waardoor de vector $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})$ ontstaat. In het linkerlid is de verplaatsingsvector het verschil van de positievectoren van congruentiebeelden, en wel $\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}=\mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{a})$. Uitgedrukt in termen van verschillen tussen positievectoren geldt dus in het voorbeeld

$$\mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{a})=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})$$

8) Zou men op de verplaatsingsvector $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ de congruentietransformatie $\mathcal{C}$ hebben toegepast dan ontstaat er een andere vector als $\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})$ wegens $\vec{d}\neq\vec{0}$

$$\mathcal{C}(\vec{b}-\vec{a})=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})+\vec{d}\neq\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a})$$

Bij combinatie van beide bovenstaande formules zien we dat er bij deze *congruentietransformatie geen behoud van verschil* bestaat

$$\mathcal{C}(\vec{b}-\vec{a})\neq\mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{a})$$

Mede hierdoor zien we dat deze congruentietransformatie niet-lineair is. En dit betekent verder dat de *congruentietransformatie in het platte vlak* met een standaard assenstelsel (x_1,x_2) *alleen mag worden toegepast op positievectoren* en niet op verplaatsingsvectoren.

9) Formeel gezien is het in 6) en 7) beargumenteerde resultaat een gevolg het behoud van verschil bij de spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ en het feit dat bij translatie van positievectoren er geen effect is op de verplaatsingsvectoren

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{a})&=(\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})-\vec{d})-(\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a})-\vec{d}) && \textit{definitie } \mathcal{C}\\&=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})-\vec{d}-\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a})+\vec{d} && \textit{haakjes weghalen}\\&=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b})-\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{a})\\&=\mathcal{S}_{x_2=x_1}(\vec{b}-\vec{a}) && \textit{behoud verschil}\end{aligned}$$

De congruentietransformatie $\mathcal{C}$ is niet-lineair omdat het de samenstelling is van een lineaire spiegeling $\mathcal{S}_{x_2=x_1}$ gevolgd door de niet-lineaire translatie $\mathcal{T}_{\vec{d}}$

In het vervolg van deze paragraaf wordt een congruentietransformatie uitgedrukt in termen van positievectoren. Verschillen tussen positievectoren zijn verplaatsingsvectoren. Aldus

Definitie
Een transformatie $\mathcal{C}$ in een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) heet een *congruentietransformatie* als $\mathcal{C}$ de *lengtes van de verplaatsingsvectoren behoudt*.
Dus als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ twee willekeurige positievectoren zijn en de $\mathcal{C}$-beelden $\mathcal{C}(\vec{a})$ en $\mathcal{C}(\vec{b})$ zijn ook positievectoren dan geldt

$$\left|\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$$

Voor het vervolg is het handig om met het volgende begrip te werken

Definitie
Een transformatie $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^2$ heet een *affiene transformatie* als $\mathcal{F}$ de samenstelling is van een *lineaire transformatie $\mathcal{L}$ gevolgd door een translatie over een vaste vector $\vec{d}$*.
Dit betekent dat voor alle vectoren $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt

$$\mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d}$$

Opmerkingen

1) Voor een *affiene transformatie* $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vaak de *notatie* $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$ gebruikt, waarbij $\mathcal{L}$ *het lineaire deel* van de transformatie heet en $\vec{d}$ *het translatiedeel*.
2) Bij het lineaire deel $\mathcal{L}$ is er sprake van behoud van verschil $\mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b}) - \mathcal{L}(\vec{a})$ (zie opgave III.8.6). Dit betekent in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) dat $\mathcal{L}$ zowel toegepast mag worden op positievectoren als op verplaatsingsvectoren.
3) Echter vanwege het translatiedeel is een affiene transformatie niet lineair (behalve als $\vec{d} = \vec{0}$). Behoud van verschil geldt in dit geval niet, zoals we na de volgende stelling zullen zien. Dit betekent dat bij toepassing in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) de formule in de definitie alleen betrekking heeft op positievectoren en niet op verplaatsingsvectoren. Dus in het vlak zijn zowel $\vec{a}$ als $\mathcal{F}(\vec{a})$ positievectoren.
4) Vanwege behoud van schaling geldt voor het lineaire deel van $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$ dat $\mathcal{L}(\vec{0}) = \mathcal{L}(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \mathcal{L}(\vec{0}) = \vec{0}$. Dus bij toepassing van een affiene transformatie in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) is bij het lineaire deel het beeld van de oorsprong opnieuw de oorsprong. Het is alleen door het translatiedeel dat de oorsprong wordt verschoven: $\mathcal{F}(\vec{0}) = \mathcal{L}(\vec{0}) + \vec{d} = \vec{0} + \vec{d} = \vec{d}$

In een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) zijn verplaatsingsvectoren verschillen van positievectoren. In de volgende stelling wordt het affien zijn van een transformatie alleen uitgedrukt in termen van verschillen van vectoren, dus meetkundig gezien alleen in termen van verplaatsingsvectoren

Stelling

Laat $\mathcal{F}$ een transformatie zijn in $\mathbb{R}^2$. Er geldt dan

$\mathcal{F}$ *is affien* $\Leftrightarrow$ *Er bestaat een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ zodanig dat voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt $\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a})$*

Bewijs

$(\Rightarrow)$ Stel $\mathcal{F}$ is affien, dus $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$ met lineair deel $\mathcal{L}$ en translatiedeel $\vec{d}$. Voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt dan $\mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d}$ resp. $\mathcal{F}(\vec{b}) = \mathcal{L}(\vec{b}) + \vec{d}$ en dus

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a}) &= (\mathcal{L}(\vec{b}) + \vec{d}) - (\mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d}) && \textit{definitie } \mathcal{F} \\
&= \mathcal{L}(\vec{b}) + \vec{d} - \mathcal{L}(\vec{a}) - \vec{d} && \textit{haakjes weghalen} \\
&= \mathcal{L}(\vec{b}) - \mathcal{L}(\vec{a}) \\
&= \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a}) && \textit{behoud verschil bij } \mathcal{L}
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Stel er bestaat een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ zodanig dat voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt $\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a})$. Dit geldt dan ook voor $\vec{a} = \vec{0}$ en dus geldt voor alle vectoren $\vec{b}$

$$\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{0}) = \mathcal{L}(\vec{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\vec{b}) = \mathcal{L}(\vec{b}) + \mathcal{F}(\vec{0})$$

Dus $\mathcal{F}$ is een affiene transformatie met lineair deel $\mathcal{L}$ en translatiedeel $\vec{d} = \mathcal{F}(\vec{0})$.

□

Opmerkingen

1) Toegepast in een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) betekent de stelling dat het affien zijn kan worden uitgedrukt in termen van alleen de positievectoren $\vec{a}$ en $\mathcal{F}(\vec{a})$ volgens $\mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d}$, maar ook alleen in termen van verplaatsingsvectoren $\vec{b} - \vec{a}$ van de originelen en verplaatsingsvectoren $\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a})$ van de beelden volgens $\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a})$.
2) Uit de stelling volgt direct dat voor $\vec{d} \neq \vec{0}$ er bij een affiene transformatie geen sprake is van behoud van verschil. Per definitie geldt $\mathcal{F}(\vec{b} - \vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{d} \neq \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a})$ en dit levert samen met de stelling

$$\mathcal{F}(\vec{b} - \vec{a}) \neq \mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a})$$

De centrale vraag in dit hoofdstuk is wat de transformaties in $\mathbb{R}^2$ kunnen zijn die de congruentietransformaties in het platte vlak beschrijven. Volgens de twee volgende stellingen zijn de enige congruentietransformaties die affiene transformaties waarvan het lineaire deel een isometrie is.

Stelling
Als het lineaire deel $\mathcal{D}$ van de affiene transformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d})$ in $\mathbb{R}^2$ een isometrie is dan is $\mathcal{C}$ een congruentietransformatie.

Bewijs
Omdat $\mathcal{D}$ een isometrie is geldt behoud van lengte voor alle vectoren $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$, dus $|\mathcal{D}(\vec{a})| = |\vec{a}|$. Vanwege de vorige stelling geldt voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ dat $\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{D}(\vec{b} - \vec{a})$. Dit heeft als gevolg

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})| &= |\mathcal{D}(\vec{b} - \vec{a})| \\ &= |\vec{b} - \vec{a}| \end{aligned}$$

Er is dus behoud van lengte van de verschilvectoren, dus is $\mathcal{C}$ een congruentietransformatie.

□

Het omgekeerde geldt ook

Stelling
Als $\mathcal{C}$ een congruentietransformatie is in $\mathbb{R}^2$ dan is $\mathcal{C}$ een affiene transformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d})$ waarvan het lineaire deel $\mathcal{D}$ een isometrie is.

Bewijs
Zie aanhangsel 1 van deze paragraaf

□

Opmerkingen
1) Volgens de vorige paragraaf zijn de enige isometrieën in $\mathbb{R}^2$ de rotatie en de lijnspiegeling. Deze stellingen betekenen daarom dat de enig mogelijke congruentietransformaties in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) zijn een rotatie om de oorsprong gevolgd door een translatie of de spiegeling in een lijn door de oorsprong gevolgd door een translatie.
2) Omdat vanwege de lineariteit geldt $\mathcal{D}(\vec{0}) = \vec{0}$ verandert de oorsprong niet door de isometrie van plaats, dus niet door rotatie of spiegeling. Alleen door de translatie verandert de oorsprong van positie.
3) Bij een translatie in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) over de nulvector, dus bij $\vec{d} = \vec{0}$, is een congruentietransformatie lineair, dus of alleen een rotatie om de oorsprong of alleen een spiegeling in een lijn door de oorsprong.
4) Als in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) de rotatie de identiteit is, dus als de vectoren niet door draaiing veranderen omdat er over een hoek van 0^0 wordt gedraaid, is een rotatie gevolgd door de translatie in feite een zuivere translatie.
5) Bij een assenstelsel in het platte vlak dat verschoven is vanuit het standaard assenstelsel ontstaat een andere oorsprong in dat vlak. De positievector van een punt in het vlak is de verbindingsvector van de oorsprong naar dat punt. Door keuze van een andere oorsprong wordt een congruentietransformatie van het vlak beschreven door andere positievectoren. Dat dit interessante meetkundige gevolgen heeft wordt in aanhangsel 2 besproken.

Als afronding van deze paragraaf een voorbeeld, waarbij blijkt dat twee congruente driehoeken in een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) de congruentietransformatie in dat vlak geheel vastleggen.

Voorbeeld

Gegeven In een standaard assenstelsel (x_1, x_2) wordt een congruentietransformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d})$ uitgevoerd waardoor de driehoek ΔABC , waarvan de hoekpunten A, B en C de resp. positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ hebben, wordt afgebeeld in de driehoek $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$, met voor de hoekpunten $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ de resp. positievectoren $\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{C}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Gevraagd

a) Teken in een standaard assenstel (x_1, x_2) de driehoeken ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

b) Toon door berekening aan dat inderdaad de congruentie geldt $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C} \cong \Delta ABC$

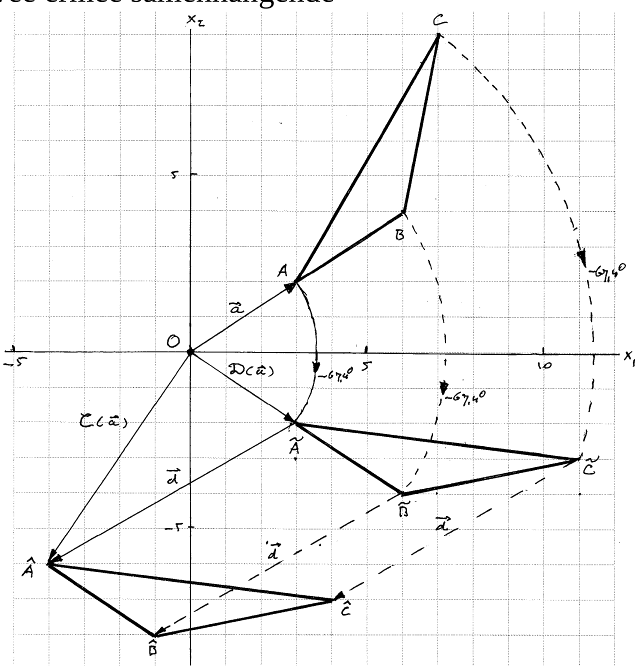
c) Bereken de matrix D van de isometrie $\mathcal{D}$ met behulp van de Gauss-Jordan methode uit twee verplaatsingsvectoren van ΔABC en de twee ermee samenhangende verplaatsingsvectoren van het beeld $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$.

d) Leg uit dat de isometrie $\mathcal{D}$ een rotatie is.
Bereken de rotatiehoek.

e) Door de isometrie $\mathcal{D}$ wordt de driehoek ΔABC afgebeeld in de driehoek $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$.
Bereken de kentallen van de positievectoren $\mathcal{D}(\vec{a})$, $\mathcal{D}(\vec{b})$ en $\mathcal{D}(\vec{c})$ van. de resp. punten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ en $\tilde{C}$.

f) Teken $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ in het assenstelsel. Teken ook de cirkelboog waardoor punt A wordt overgevoerd in punt $\tilde{A}$ en teken de translatievector $\vec{d}$ waardoor het punt $\tilde{A}$ wordt overgevoerd in het punt $\hat{A}$. Teken ook de positievectoren van A, $\tilde{A}$ en $\hat{A}$.

g) Geef de kentallen van de translatievector $\vec{d}$.



Oplossing

a) Zie figuur

b) $$\hat{A}\hat{B} = \left|\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

en $$AB = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\hat{A}\hat{C} = \left|\mathcal{C}(\vec{c}) - \mathcal{C}(\vec{a})\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$$

en $\quad AC = |\vec{c}-\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$

$$\hat{C}\hat{B} = |\mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{c})| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$$

en $\quad CB = |\vec{b}-\vec{c}| = \left|\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$

Er geldt dus $\hat{A}\hat{B} = AB$, $\hat{A}\hat{C} = AC$ en $\hat{C}\hat{B} = CB$, gevolg $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C} \cong \Delta ABC$, d.w.z. dat ΔABC en zijn $\mathcal{C}$-beeld $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ congruent zijn.

c) Het verband tussen de verplaatsingsvectoren is door de isometrie $\mathcal{D}$ gegeven. Zo geldt $\quad \mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{D}(\vec{b}-\vec{a}) \quad$ en $\quad \mathcal{C}(\vec{c})-\mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{D}(\vec{c}-\vec{a})$

Het $\mathcal{D}$-beeld van $\quad \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad$ is $\quad \mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

Het $\mathcal{D}$-beeld van $\quad \vec{c}-\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} \quad$ is $\quad \mathcal{C}(\vec{c})-\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$

Voor de Gauss-Jordan procedure betekent dit

$$\underset{I\quad II}{\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 7\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 8\\-2 & -1\end{pmatrix}\end{matrix}\right]} \xrightarrow[II' = 4I-3II]{I' = 7I-2II} \underset{I'\quad II'}{\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}13 & 0\\0 & -13\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5 & -12\\-12 & -5\end{pmatrix}\end{matrix}\right]} \xrightarrow[II'' = -\frac{1}{13}II']{I'' = \frac{1}{13}I'} \underset{I''\quad II''}{\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\-12 & 5\end{pmatrix}\end{matrix}\right]}$$

De isometrie $\mathcal{D}$ heeft de matrix $\quad D = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\-12 & 5\end{pmatrix}$

d) De determinant van $\mathcal{D}$ is $\quad |\mathcal{D}| = \begin{vmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\-\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{vmatrix} = \frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13} - (-\frac{12}{13})\frac{12}{13} = 1$,

dus is $\mathcal{D}$ een rotatie.

Bij rotatie over een richtinghoek θ $\quad \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\-12 & 5\end{pmatrix}$

Dus $\quad \cos\theta = \frac{5}{13} \quad\Rightarrow\quad \theta = \cos^{-1}(\frac{5}{13}) \approx 67{,}4^0 \quad\vee\quad \theta = -\cos^{-1}(\frac{5}{13}) \approx -67{,}4^0$

Omdat $\sin\theta < 0$ is de rotatiehoek $\quad \theta \approx -67{,}4^0$.

e) Positievectoren voor

Punt $\tilde{A}$ $\quad \mathcal{D}(\vec{a}) = D\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\-12 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\cdot 3+12\cdot 2\\(-12)\cdot 3+5\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

Punt $\tilde{B}$ $\quad \mathcal{D}(\vec{b}) = D\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\-12 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\cdot 6+12\cdot 4\\(-12)\cdot 6+5\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$

Punt $\tilde{C}$ $\quad \mathcal{D}(\vec{c}) = D\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5 & 12\\-12 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}5\cdot 7+12\cdot 9\\(-12)\cdot 7+5\cdot 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-3\end{pmatrix}$

f) Zie bovenstaande figuur.

g) $\quad \vec{d} = \mathcal{C}(\vec{a})-\mathcal{D}(\vec{a}) = \mathcal{C}(\vec{b})-\mathcal{D}(\vec{b}) = \mathcal{C}(\vec{c})-\mathcal{D}(\vec{c}) = \begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$

Aanhangsel 1: Bewijs van de laatste stelling

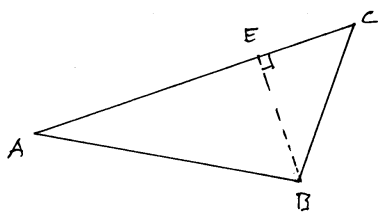
Wat in dit aanhangsel wordt bewezen voor congruentietransformaties in het platte vlak steunt uiteindelijk op de zogenoemde *driehoeksongelijkheid*.

Bij de formulering van deze ongelijkheid wordt het begrip *gesloten lijnstuk* tussen twee punten gebruikt.
Als A en C twee punten in het vlak zijn dan is het lijnstuk het stuk van de rechte lijn door A en C dat tussen deze punten ligt. Het lijnstuk heet gesloten als de uiteinden A en C ook tot het lijnstuk behoren. Voor het gesloten lijnstuk wordt hier de notatie AC gebruikt, dus dezelfde notatie als voor de afstand tussen de punten A en C.

Stelling (driehoeksongelijkheid)
In een driehoek ΔABC is de som van twee zijden AB en BC groter dan de derde zijde AC, dus $AB + BC > AC$, behalve als punt B op het gesloten lijnstuk AC ligt. In het laatste geval geldt de gelijkheid $AB + BC = AC$

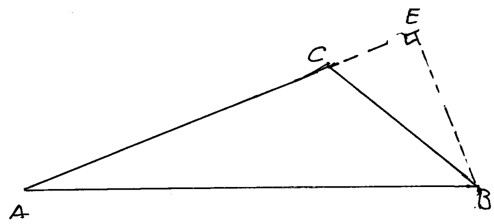
Bewijs
Geval 1: De loodrechte projectie E van punt B op de lijn door A en C ligt op het gesloten lijnstuk AC.
Wegens Pythagoras geldt in dat geval

$$\begin{aligned} AB + BC &= \sqrt{AE^2 + EB^2} + \sqrt{EB^2 + EC^2} \\ &\geq \sqrt{AE^2} + \sqrt{EC^2} = AE + EC \\ &= AC \end{aligned}$$



Het gelijkteken geldt alleen als $EB = 0$, dus alleen als B op het gesloten lijnstuk AC ligt.
Geval 2: De loodrechte projectie E van punt B op de lijn door A en C ligt buiten het gesloten lijnstuk AC.
In het geval van de figuur rechts geldt

$$\begin{aligned} AB + BC &= \sqrt{AE^2 + EB^2} + \sqrt{EB^2 + BC^2} \\ &\geq \sqrt{AE^2} + \sqrt{EC^2} = AE + EC \\ &= AC + 2EC > AC \end{aligned}$$

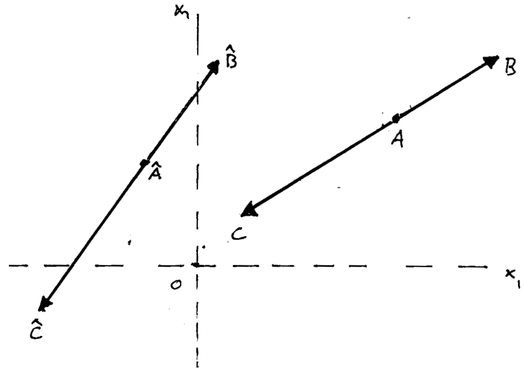


□

In dit aanhangsel werken we nu verder met een congruentietransformatie $\mathcal{C}$ in het platte vlak. Voor de punten die de originelen zijn gebruiken we cursieve Latijnse hoofdletters, dus A, B, C, …. De overeenkomstige $\mathcal{C}$ -beeldpunten worden verder met een "dakje" aangegeven, dus $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$,….
Om de laatste stelling te bewijzen moeten we vooraf een aantal andere stellingen bewijzen over het gedrag van verplaatsingsvectoren in het platte vlak onder de transformatie $\mathcal{C}$.

Stelling
Als voor de verplaatsingsvectoren in het platte vlak gevormd door de punten A, B, en C de schaling geldt $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ dan geldt voor de verplaatsingsvectoren gevormd door de congruentiebeelden in het vlak $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ dezelfde schaling , dus $\overrightarrow{\hat{A}\hat{C}} = \lambda\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}$

Bewijs



We bekijken het geval dat $\lambda < 0$, dus het geval dat $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB}$ tegengesteld gericht zijn.
Dan ligt punt *A* op het gesloten lijnstuk *BC* en geldt er volgens de driehoeksongelijkheid $BA + AC = BC$.
Verder is de vector $\overrightarrow{AC}$ in lengte $\dfrac{AC}{AB}$ keer de lengte van de vector $\overrightarrow{AB}$, wat leidt tot

$$\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB}\overrightarrow{AB} \qquad \text{dus} \qquad \lambda = -\frac{AC}{AB}$$

De congruentietransformatie behoudt de afstanden en dus geldt ook voor de beeldpunten $\hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{C} = \hat{B}\hat{C}$. Volgens de driehoeksongelijkheid ligt het beeldpunt $\hat{A}$ daarom op het gesloten lijnstuk $\hat{B}\hat{C}$. En dit betekent dat ook de vectoren $\overrightarrow{\hat{A}\hat{C}}$ en $\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}$ tegengesteld gericht zijn. Dit leidt weer tot

$$\overrightarrow{\hat{A}\hat{C}} = -\frac{\hat{A}\hat{C}}{\hat{A}\hat{B}}\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}} \qquad \text{dus} \qquad \hat{\lambda} = -\frac{\hat{A}\hat{C}}{\hat{A}\hat{B}}$$

Het behoud van afstand leidt ten slotte tot

$$\hat{\lambda} = -\frac{\hat{A}\hat{C}}{\hat{A}\hat{B}} = -\frac{AC}{AB} = \lambda$$

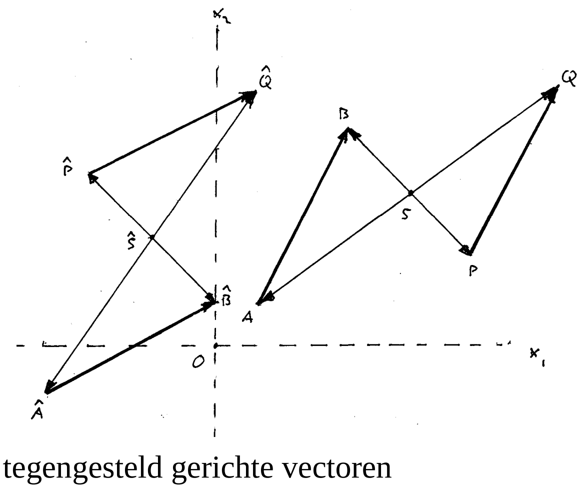
□

Stelling
Als in het platte vlak twee verplaatsingsvectoren gelijk zijn dan zijn na de congruentietransformatie de twee verplaatsingsvectoren opnieuw gelijk.
Dus als voor de punten A, B, P, en Q geldt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$$

dan geldt ook voor de beeldpunten $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{P}$ *en* $\hat{Q}$

$$\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}} = \overrightarrow{\hat{P}\hat{Q}}$$



Bewijs
Laat S het snijpunt zijn van de rechte lijn door A en Q en de rechte lijn door B en P. Door de gelijkheid van vectoren $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ ontstaan er hierbij tegengesteld gerichte vectoren

$$\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SQ}$$
$$\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SP}$$

Vanwege de vorige stelling zijn er dan ook bij de beeldpunten tegengesteld gerichte vectoren

$$\overrightarrow{\hat{S}\hat{A}} = -\overrightarrow{\hat{S}\hat{Q}}$$
$$\overrightarrow{\hat{S}\hat{B}} = -\overrightarrow{\hat{S}\hat{P}}$$

met als gevolg

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}} &= \overrightarrow{\hat{S}\hat{B}} - \overrightarrow{\hat{S}\hat{A}} = -\overrightarrow{\hat{S}\hat{P}} - (-\overrightarrow{\hat{S}\hat{Q}}) \\ &= \overrightarrow{\hat{S}\hat{Q}} - \overrightarrow{\hat{S}\hat{P}} = \overrightarrow{\hat{P}\hat{Q}}\end{aligned}$$

□

Opmerkingen

1) Door het standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak worden de punten *A*, *B*, *P* en *Q* in de laatste stelling vastgelegd door de resp. positievectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ en $\vec{q}$. Voor de $\mathcal{C}$-beelden $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{P}$ en $\hat{Q}$ zijn dan de resp. positievectoren $\mathcal{C}(\vec{a})$, $\mathcal{C}(\vec{b})$, $\mathcal{C}(\vec{p})$ en $\mathcal{C}(\vec{q})$. De verplaatsingsvectoren in de stelling zijn dan verschillen van deze positievectoren. Bijvoorbeeld $\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}} = \mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})$.

2) In termen van positievectoren luidt de stelling daarom:

Stelling
Als in een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) voor het verschil van positievectoren de gelijkheid geldt

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{q} - \vec{p}$$

dan geldt bij een congruentietransformatie $\mathcal{C}$ deze gelijkheid ook voor het verschil van de $\mathcal{C}$-beelden van deze positievectoren

$$\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{C}(\vec{q}) - \mathcal{C}(\vec{p})$$

3) De betekenis van de stelling is dat door de congruentietransformatie $\mathcal{C}$ in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) ieder verschil $\vec{b} - \vec{a}$ van positievectoren eenduidig wordt afgebeeld in een verschil $\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})$ van $\mathcal{C}$-beelden van deze positievectoren. Deze afbeelding wordt genoteerd als $\mathcal{D}$ en er geldt in pijlnotatie

$$\vec{b} - \vec{a} \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})$$

Het bovenstaande leidt tot

Definitie
In een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) wordt door een congruentietransformatie $\mathcal{C}$ een afbeelding $\mathcal{D}$ gedefinieerd voor het verschil van ieder tweetal positievectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ volgens

$$\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{D}(\vec{b} - \vec{a})$$

Met deze definitie is bijna ons doel bereikt. Dit gebeurt door de volgende

Stelling
De afbeelding $\mathcal{D}$ in de definitie is een isometrie

Bewijs
We moeten bewijzen dat $\mathcal{D}$ *lineair* is, dus dat voor ieder tweetal vectoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\mathbb{R}^2$ en voor iedere scalar λ geldt

$$\mathcal{D}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{D}(\vec{x}) + \mathcal{D}(\vec{y}) \qquad \textit{behoud optelling}$$

$$\mathcal{D}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{D}(\vec{x}) \qquad \textit{behoud schaling}$$

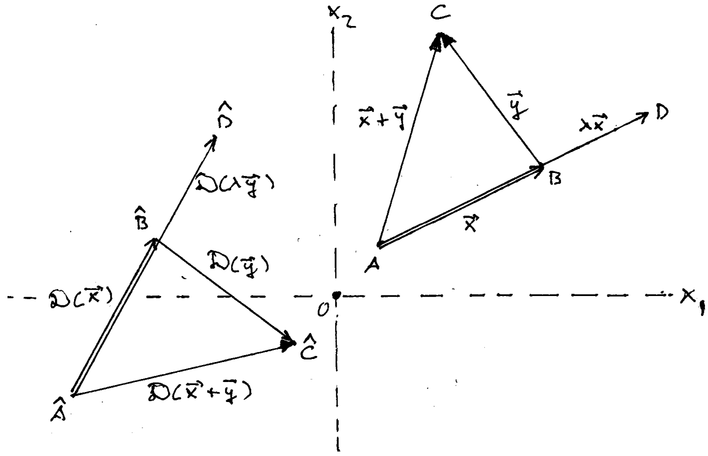
en ook

$$|\mathcal{D}(\vec{x})| = |\vec{x}| \qquad \textit{behoud norm}$$

Behoud optelling. Laat $\vec{x}$ en $\vec{y}$ twee willekeurige vectoren zijn in $\mathbb{R}^2$.
Kies in het platte vlak een punt *A* en plaats de staart van $\vec{x}$ in dat punt. Het punt van de kop van $\vec{x}$ wordt *B* genoemd en plaats de staart van $\vec{y}$ in dat punt. Geef het punt aan de kop van $\vec{y}$ met *C* aan. Aldus geldt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ en $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AC}$.

Voor de $\mathcal{C}$-beelden van deze punten geldt bijvoorbeeld $\mathcal{D}(\vec{x}) = \mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a}) = \overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}$.
Aldus

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\vec{x}+\vec{y}) &= \overrightarrow{\hat{A}\hat{C}} = \overrightarrow{\hat{A}\hat{B}} + \overrightarrow{\hat{B}\hat{C}} \\ &= \mathcal{D}(\vec{x}) + \mathcal{D}(\vec{y})\end{aligned}$$



Behoud schaling. Laat λ een willekeurige scalar zijn. Kies punt *D* in het vlak zodanig dat $\lambda\vec{x} = \overrightarrow{AD}$. Volgens de tweede stelling in dit aanhangsel geldt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\lambda\vec{x}) &= \overrightarrow{\hat{A}\hat{D}} = \lambda\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}} \\ &= \lambda\mathcal{D}(\vec{x})\end{aligned}$$

Behoud norm. Vanwege het behoud van afstand bij de congruentietransformatie $\mathcal{C}$ geldt

$$\left|\mathcal{D}(\vec{x})\right| = \left|\overrightarrow{\hat{A}\hat{B}}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{x}\right|$$

□

Uit de definitie en de laatste stelling volgt direct waar het ons om te doen was

Stelling
Als $\mathcal{C}$ een congruentietransformatie is in $\mathbb{R}^2$ dan is $\mathcal{C}$ een affiene transformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d})$ waarvan het lineaire deel $\mathcal{D}$ een isometrie is.

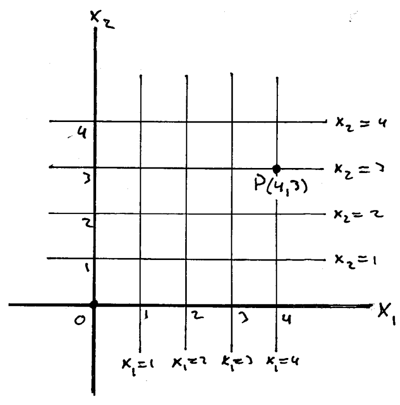
Bewijs
Voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^2$ dat $\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a}) = \mathcal{D}(\vec{b} - \vec{a})$, waarbij $\mathcal{D}$ een isometrie is.
Dit geldt dan ook voor $\vec{a} = \vec{0}$ en dus geldt voor alle vectoren $\vec{b}$

$$\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{0}) = \mathcal{D}(\vec{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}(\vec{b}) = \mathcal{D}(\vec{b}) + \mathcal{C}(\vec{0})$$

Dus geldt voor het translatiedeel $\vec{d} = \mathcal{C}(\vec{0})$.

□

Aanhangsel 2: Rasterschuiving en congruentietransformaties



Een standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak kan ook worden gezien als een *lijnenraster* dat men op dat vlak legt. Zo ligt in de figuur rechts het punt $P(4,3)$ op het snijpunt van de rasterlijnen $x_1 = 4$ en $x_2 = 3$.

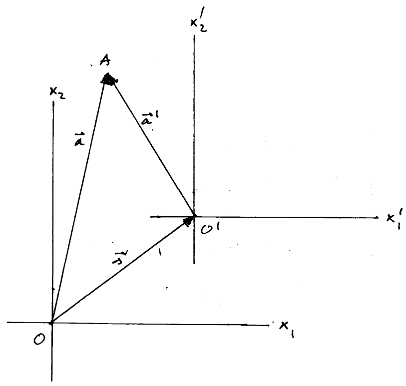
Een tweede assenstelsel (x_1', x_2') in het platte vlak dat door verschuiving uit het standaard assenstelsel (x_1, x_2) ontstaat, kan ook worden gezien

als een tweede raster dat op datzelfde vlak wordt gelegd. Er is aldus sprake van een zogenoemde *rasterschuiving*.
Door een tweede raster op het platte vlak te plaatsen *verandert er meetkundig gezien niets* aan de figuren in dat vlak. Wat *wel verandert* is *de beschrijving in* $\mathbb{R}^2$ *door positievectoren* van deze figuren. Hierbij geldt de volgende

Stelling
Als $\vec{a}$ *de positievector is van een punt A in het platte vlak gezien vanuit het standaard assenstel* (x_1, x_2) *en* $\vec{a}'$ *is de positievector van datzelfde punt gezien vanuit het verschoven assenstelsel* (x_1', x_2') *dan geldt*

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{s}$$

waarbij $\vec{s} = \overrightarrow{OO'}$ *de verplaatsingsvector is van de oorsprong O van het standaard assenstelsel* (x_1, x_2) *naar de oorsprong* O' *van het verschoven assenstelsel* (x_1', x_2')



Bewijs
Uit de figuur rechts blijkt voor punt *A* te gelden

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'}$$

Dus inderdaad $\qquad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{s}$

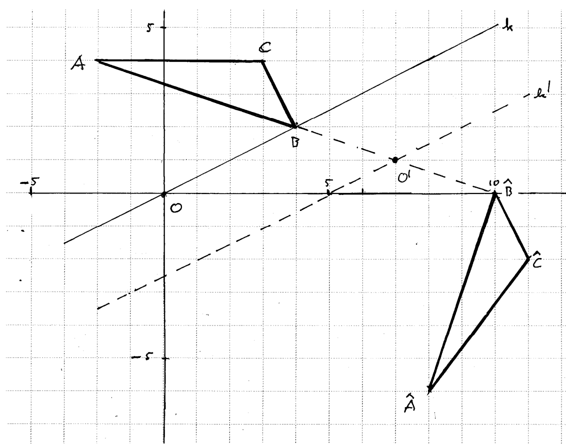
□

Opmerking
De *rasterschuiving* in het platte vlak over een vector $\vec{s}$ van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) naar een assenstelsel (x_1', x_2') wordt in dit aanhangsel *genoteerd* als

$$(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$$

Hoewel een congruentietransformatie in het platte vlak meetkundig gezien niet verandert door de andere beschrijving in $\mathbb{R}^2$ die een gevolg is van de rasterschuiving, geeft deze andere beschrijving toch meetkundig nieuwe inzichten.
Dit wordt hieronder nader uitgewerkt aan de hand van het volgende

Voorbeeld
Gegeven: In een plat vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) worden ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ vastgelegd door de positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{C}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ voor de resp. punten *A*, *B*, *C*, $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$. Zoals uit opgave III.8.1 blijkt leggen deze driehoeken



een congruentietransformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{S}_k, \vec{d})$ vast waarvan het lineaire deel een spiegeling is met matrix $S_k = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ en waarbij voor het translatiedeel geldt $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gevraagd:

a) Bepaal met behulp van de vectoren $\vec{b} - \vec{a}$ en $\mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})$ een vector $\vec{k}$ die gericht is langs de spiegellijn *k* door de oorsprong *O*.

Een assenstelsel (x_1', x_2') ontstaat door een rasterschuiving vanuit het standaard assenstelsel (x_1, x_2). Hierbij is de nieuwe oorsprong O' midden tussen de punten *B* en $\hat{B}$ gekozen.

b) Teken een nieuwe figuur met daarin het oude assenstelsel (x_1, x_2) met streepjeslijnen wordt aangegeven en het nieuwe assenstelsel (x_1', x_2') met ononderbroken lijnen. Teken ook de driehoeken ΔABC en $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$.

De congruentietransformatie van de positievectoren in het nieuwe assenstelsel wordt aangeven met $\mathcal{C}'$

c) Bereken de kentallen van de positievectoren $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$, $\mathcal{C}'(\vec{a}')$, $\mathcal{C}'(\vec{b}')$ en $\mathcal{C}'(\vec{c}')$ voor de resp. punten *A*, *B*, *C*, $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ in het nieuwe assenstelsel.

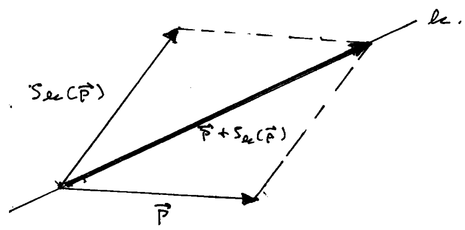
d) De punten $\tilde{A}'$, $\tilde{B}'$ en $\tilde{C}'$ hebben positievectoren $\mathcal{S}_k(\vec{a}')$, $\mathcal{S}_k(\vec{b}')$ en $\mathcal{S}_k(\vec{c}')$. Bereken de kentallen van deze positievectoren.

e) Teken in de figuur $\Delta\tilde{A}'\tilde{B}'\tilde{C}'$. Teken ook de lijn k' van de spiegeling van ΔABC naar $\Delta\tilde{A}'\tilde{B}'\tilde{C}'$. Teken verder met een streepjeslijn de oude spiegellijn *k*.

f) Driehoek $\Delta\tilde{A}'\tilde{B}'\tilde{C}'$ gaat door een translatie over in de driehoek $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$, die het $\mathcal{C}$-beeld is van ΔABC. Geef de kentallen van de translatievector $\vec{d}'$ en teken deze als verbindingsvector tussen de overeenkomstige hoekpunten.

g) De translatie uit f) is evenwijdig aan de spiegellijn k'. Hoe blijkt dit uit de gevonden translatievector $\vec{d}'$?

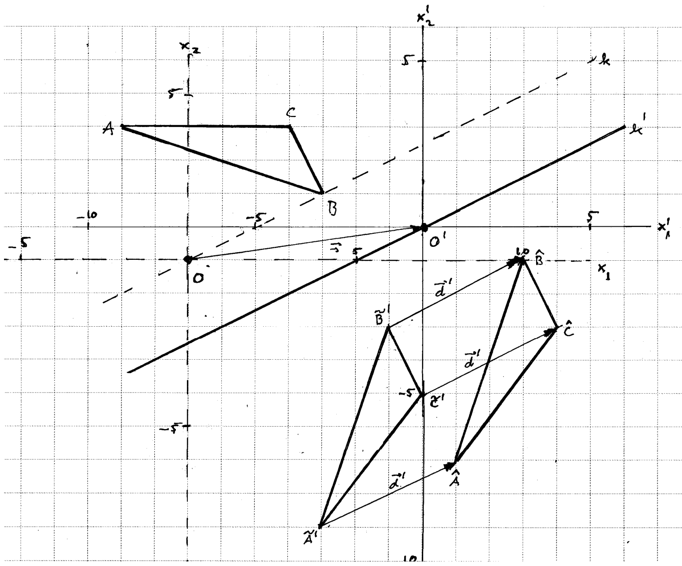
Oplossing



a) Stel in het platte vlak met standaard assenstelsel (x_1, x_2) is een verplaatsingsvector $\vec{p}$ bekend en ook zijn beeld $\mathcal{S}_k(\vec{p})$ in spiegellijn k, dan is de vector $\vec{p} + \mathcal{S}_k(\vec{p})$ een vector gericht langs deze spiegellijn, als ten minste $\vec{p}$ en $\mathcal{S}_k(\vec{p})$ geen tegengestelde vectoren zijn. Aldus is de som van de vectoren $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{S}_k(\vec{b} - \vec{a}) = \mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ zo'n vector. Ook de vector $\vec{k} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a} + \mathcal{C}(\vec{b}) - \mathcal{C}(\vec{a})) = \frac{1}{4}(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vector gericht volgens de spiegellijn *k*.

b) Zie figuur rechts

c) $\vec{s} = \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b}' = \vec{b} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{C}(\vec{a}') = \mathcal{C}(\vec{a}) - \vec{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\mathcal{C}'(\vec{b}') = \mathcal{C}(\vec{b}) - \vec{s} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{C}'(\vec{c}') = \mathcal{C}(\vec{c}) - \vec{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

d) $\mathcal{S}_k(\vec{a}') = S_k \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\mathcal{S}_k(\vec{b}') = S_k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathcal{S}_k(\vec{c}') = S_k \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

e) Zie figuur.

f) $\vec{d}' = \mathcal{S}_k(\vec{a}') - \vec{a}' = \mathcal{S}_k(\vec{b}') - \vec{b}' = \mathcal{S}_k(\vec{c}') - \vec{c}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

g) Er geldt $\vec{d}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{k}$ en omdat de vector $\vec{k}$ die gericht is langs de spiegellijn k' is ook de translatie gericht volgens deze spiegellijn..

Opmerkingen

1) Door de rasterschuiving $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$ in het platte vlak verandert ook de beschrijving van de congruentietransformatie van ΔABC naar $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ in $\mathbb{R}^2$ van $\mathcal{C} = (\mathcal{S}_k, \vec{d})$ naar $\mathcal{C}' = (\mathcal{S}_k, \vec{d}')$, hoewel meetkundig gezien deze driehoeken onveranderd blijven. Het lineaire deel is bij beide beschrijvingen onveranderd en blijft de spiegelingsoperator $\mathcal{S}_k$. Bij het translatiedeel is er een verandering van de vector $\vec{d}$ naar een nieuwe vector $\vec{d}'$. Dit laatste hangt samen met de verplaatsing van de spiegellijn k naar een andere spiegellijn k', die wordt veroorzaakt door de keuze van een nieuwe oorsprong O'.

2) Door de speciale keuze van de nieuwe oorsprong O' midden tussen een punt *B* en zijn congruentiebeeld $\hat{B}$ is de nieuwe spiegellijn k' zodanig dat de congruentietransformatie wordt gezien als een *glijspiegeling*. Een glijspiegeling in een plat vlak bestaat uit een *spiegeling in een lijn gevolgd door een translatie in de richting van dezelfde lijn*.

Dat een spiegeling gevolgd door een translatie meetkundig ook kan worden gezien als een glijspiegeling, is in dit voorbeeld duidelijk geworden door de speciale keuze van de rasterschuiving.
Wat zo'n schuiving algemeen betekent voor een affiene transformatie in het platte vlak, en daarmee ook voor een congruentietransformatie, wordt geformuleerd in de volgende

Stelling
Als een affiene transformatie van het platte vlak ten opzichte van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) *wordt beschreven in* $\mathbb{R}^2$ *door*

$$\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$$

dan wordt bij een rasterschuiving $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$ *dezelfde affiene transformatie ten opzichte van het assenstelsel* (x_1', x_2') *in* $\mathbb{R}^2$ *beschreven door*

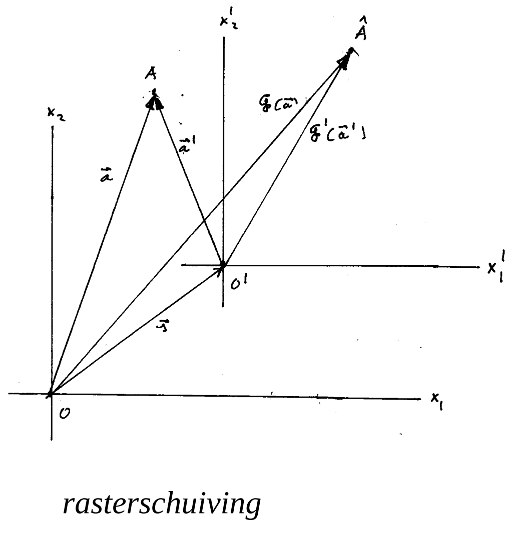
$$\mathcal{F}' = (\mathcal{L}, \vec{d}')$$

waarbij

$$\vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{L}(\vec{s}) - \vec{s}$$

Bewijs
Bij de affiene transformatie in het platte vlak geldt voor de vectoren $\vec{a}$ en $\mathcal{F}(\vec{a})$ in $\mathbb{R}^2$, die resp. de posities van een willekeurig origineel punt *A* en het bijbehorende beeldpunt $\hat{A}$ vastleggen gezien vanuit het standaard assenstelsel (x_1, x_2)

$$\mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d}$$



Gezien vanuit het verschoven assenstelsel (x_1', x_2') zijn de positievectoren van A en van $\hat{A}$ resp. $\vec{a}'$ en $\mathcal{F}'(\vec{a}')$, waarbij het volgende verband bestaat met de positievectoren gezien vanuit (x_1, x_2)

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{s}$$
$$\mathcal{F}'(\vec{a}') = \mathcal{F}(\vec{a}) - \vec{s}$$

Dit alles heeft als gevolg

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(\vec{a}') &= \mathcal{F}(\vec{a}) - \vec{s} && \textit{rasterschuiving} \\
&= \mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d} - \vec{s} && \textit{affiene transformatie} \\
&= \mathcal{L}(\vec{a}) - \mathcal{L}(\vec{s}) + \vec{d} + \mathcal{L}(\vec{s}) - \vec{s} && \\
&= \mathcal{L}(\vec{a} - \vec{s}) + \vec{d} + \mathcal{L}(\vec{s}) - \vec{s} && \textit{behoudverschil} \\
&= \mathcal{L}(\vec{a}') + \vec{d}' && \textit{rasterschuiving}
\end{aligned}$$

met

$$\vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{L}(\vec{s}) - \vec{s}$$

□

Opmerkingen

1) Door de rasterschuiving verandert niet het lineaire deel $\mathcal{L}$ bij de overgang van $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$ naar $\mathcal{F}' = (\mathcal{L}, \vec{d}')$, maar is er wel een verandering van het translatiedeel van $\vec{d}$ naar $\vec{d}'$.

2) Voor congruentietransformaties betekent de rasterschuiving $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$

$$\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d}) \qquad \text{gezien vanuit} \qquad (x_1, x_2)$$

$$\mathcal{C}' = (\mathcal{D}, \vec{d}') \qquad \text{gezien vanuit} \qquad (x_1', x_2')$$

met $\qquad \vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{D}(\vec{s}) - \vec{s}$

De isometrie $\mathcal{D}$ verandert hierbij dus niet.

De eerste toepassing van de stelling op congruentietransformaties laat algemeen zien dat een *lijnspiegeling gevolgd door een translatie altijd* kan worden beschouwd als een *glijspiegeling*, wat in het voorgaande voorbeeld al aan de orde is gekomen.

Stelling

Als een congruentietransformatie van het platte vlak bestaat uit een lijnspiegeling gevolgd door een translatie, die dus opzichte van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) wordt beschreven in $\mathbb{R}^2$ door

$$\mathcal{C} = (\mathcal{S}_k, \vec{d})$$

dan wordt bij een rasterschuiving $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$, waarbij de oorsprong O' midden tussen een origineel punt B en een beeldpunt $\hat{B}$ wordt gekozen, dezelfde congruentie transformatie ten opzichte van het assenstelsel (x_1', x_2') in $\mathbb{R}^2$ beschreven door

$$\mathcal{C}' = (\mathcal{S}_k, \mathcal{P}_k(\vec{d}))$$

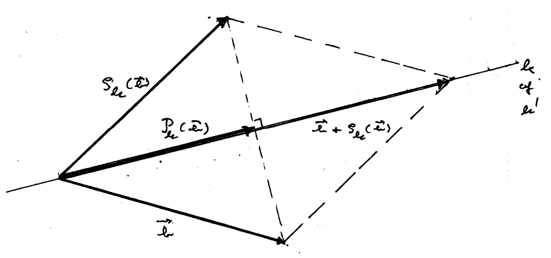
waarbij $\mathcal{P}_k(\vec{d})$ de projectie is van de translatievector $\vec{d}$ op de spiegellijn k.

Bewijs

Bij $\vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{S}_k(\vec{s}) - \vec{s}$ geldt nu $\vec{s} = \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \mathcal{C}(\vec{b}))$, waarbij $\vec{b}$ en $\mathcal{C}(\vec{b})$ de resp. positievectoren van *B* en $\hat{B}$ zijn. Omwerken van $\vec{s}$ levert

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \tfrac{1}{2}(\vec{b} + \mathcal{C}(\vec{b})) \\ &= \tfrac{1}{2}(\vec{b} + \mathcal{S}_k(\vec{b}) + \vec{d}) && \textit{definitie } \mathcal{C} \\ &= \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{b}) + \tfrac{1}{2}\vec{d} && \textit{haakjes wegwerken} \end{aligned}$$

Bij het omwerken van $\mathcal{S}_k(\vec{s})$ gebruiken we $\mathcal{S}_k(\mathcal{S}_k(\vec{b})) = \vec{b}$ (zie ook opgave III.8…). De meetkundige achtergrond is dat als in het platte vlak een punt wordt gespiegeld in een lijn en het beeldpunt wordt in dezelfde lijn gespiegeld dan komt men weer in het oorspronkelijke punt terug.



$$\mathcal{S}_k(\vec{s}) = \mathcal{S}_k(\tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{b}) + \tfrac{1}{2}\vec{d})$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{b}) + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\mathcal{S}_k(\vec{b})) + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{d}) \quad \textit{lineariteit } \mathcal{S}_k$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{b}) + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{d}) \qquad \textit{dubbele spiegeling}$$

Na het invullen van deze twee uitdrukkingen in de formule voor $\vec{d}'$ wordt bij de omwerking gebruikt $\vec{d} + \mathcal{S}_k(\vec{d}) = 2\mathcal{P}_k(\vec{d})$. De figuur rechts maakt duidelijk dat de som van een vector met zijn lijngespiegelde een vector oplevert die gericht volgens de spiegellijn en die gelijk is aan 2 keer de projectie van de eerste vector op de spiegellijn.

$$\vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{S}_k(\vec{s}) - \vec{s}$$
$$= \vec{d} + (\tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{b}) + \tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{d})) - (\tfrac{1}{2}\vec{b} + \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{b}) + \tfrac{1}{2}\vec{d})$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathcal{S}_k(\vec{d}) + \tfrac{1}{2}\vec{d} = \tfrac{1}{2}(\mathcal{S}_k(\vec{d}) + \vec{d}) \qquad \textit{buiten haakjes halen}$$
$$= \mathcal{P}_k(\vec{d}) \qquad \textit{verband met projectie}$$

□

Een *effect van een rasterschuiving op* een congruentietransformatie die gezien vanuit het standaard assenstelsel bestaat uit een *rotatie en vervolgens een translatie* onderzoeken we eerst aan de hand van een

Voorbeeld

Gegeven De driehoeken ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ in het platte vlak waarvan de hoekpunten *A*, *B* en *C* ten opzichte van een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de resp. positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ hebben en de hoekpunten $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ de resp. positievectoren $\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{C}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Uit opgave III.8.2. blijkt dat hier sprake is van een congruentietransformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{R}_\theta, \vec{d})$ waarvan het lineaire deel de matrix voor een rotatie heeft $R_\theta = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ en waarbij voor het translatiedeel geldt $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

De richtinghoek voor deze rotatie is $\theta \approx 53{,}1^0$.

Gevraagd

a) Teken in een standaard assenstel (x_1, x_2) de driehoeken ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

b) Teken met een stippellijn de middelloodlijn van de punten *A* en $\hat{A}$. Doe dit ook voor de punten *B* en $\hat{B}$. Noem het snijpunt van deze lijnen O'.

(Als het goed is blijkt dat voor de positievector van O' geldt $\vec{s} = \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.)

c) Teken het assenstelsel (x_1', x_2') dat ontstaat door de rasterschuiving

$(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$

d) Geef van de punten A, B en C ten opzichte van het assenstelsel (x_1', x_2') de kentallen van de resp. positievectoren $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ en $\vec{c}'$. Doe dit ook voor de positievectoren $\mathcal{C}'(\vec{a}')$, $\mathcal{C}'(\vec{b}')$ en $\mathcal{C}'(\vec{c}')$ van de resp. punten $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$.

e) Bereken de kentallen van de vectoren $\mathcal{R}_\theta(\vec{a}')$, $\mathcal{R}_\theta(\vec{b}')$ en $\mathcal{R}_\theta(\vec{c}')$.

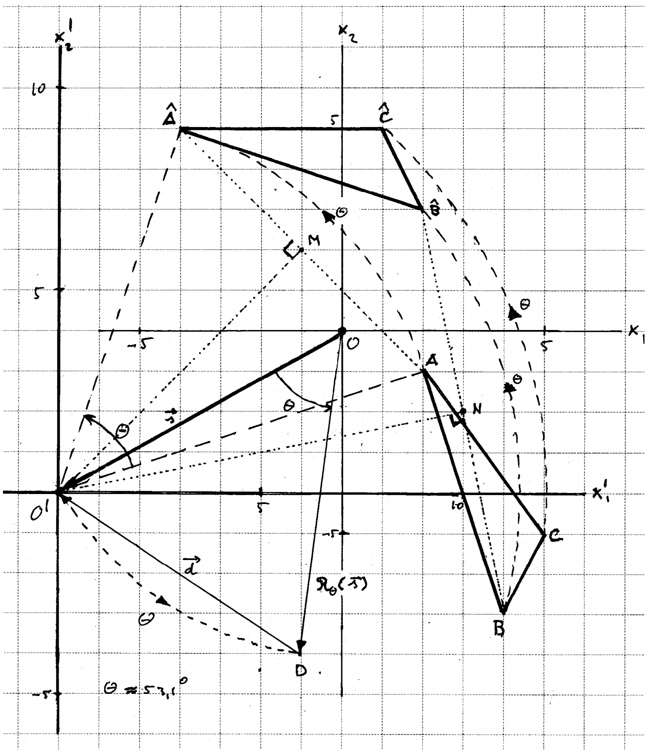
f) Wat is de meetkundige betekenis van de resultaten uit d) en e)?

g) Teken in de figuur met behulp van een passer in streepjes de cirkelboog van A naar $\hat{A}$, waarbij het middelpunt O' is. Doe dit ook van B naar $\hat{B}$ en van C naar $\hat{C}$.
Teken ook in streepjes het lijmstuk $O'A$ en $O'\hat{A}$. Meet de hoek tussen beide lijnstukken op.

h) Bereken de kentallen van de vector $\mathcal{R}_\theta(\vec{s})$.
Toon hiermee aan dat geldt $\vec{s} - \mathcal{R}_\theta(\vec{s}) = \vec{d}$.

j) Punt D heeft ten opzicht van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) de positievector $\mathcal{R}_\theta(\vec{s})$.
Teken in de figuur dit punt en deze positievector.
Teken in de figuur met behulp van een passer in streepjes de cirkelboog van D naar O', waarbij het middelpunt O is. Teken ook de vector $\overrightarrow{DO'}$ en geef deze vector aan met $\vec{d}$.

Oplossing



a) b) c) Zie figuur. (M is het midden tussen de punten A en $\hat{A}$, N het midden van B en $\hat{B}$.)

d)
$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b}' = \vec{b} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{C}'(\vec{a}') = \mathcal{C}(\vec{a}) - \vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{C}'(\vec{b}') = \mathcal{C}(\vec{b}) - \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{C}'(\vec{c}') = \mathcal{C}(\vec{c}) - \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

e)
$$\mathcal{R}_\theta(\vec{a}') = R_\theta \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{R}_\theta(\vec{b}') = R_\theta \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 45 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{R}_\theta(\vec{c}') = R_\theta \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 40 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

f) Uit d) en e) blijkt $\mathcal{C}'(\vec{a}') = \mathcal{R}_\theta(\vec{a}')$, $\mathcal{C}'(\vec{b}') = \mathcal{R}_\theta(\vec{b}')$ en $\mathcal{C}'(\vec{c}') = \mathcal{R}_\theta(\vec{c}')$.

Dit betekent dat de rotatie om O' over $\theta \approx 53{,}1^0$ de driehoek ΔABC doet overgaan in $\Delta \hat{A}\hat{B}\hat{C}$. Vanuit het assenstelsel (x_1', x_2') gezien is er alleen een rotatie nodig en geen translatie om de gegeven congruentietransformatie van het platte vlak te beschrijven.

g) Zie figuur.

h) $\mathcal{R}_\theta(\vec{s}) = R_\theta \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{s} - \mathcal{R}_\theta(\vec{s}) = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{d}$

i) Zie figuur.

Het voorbeeld is een illustratie van de volgende

Stelling

Als een congruentietransformatie van het platte vlak vanuit het standaard assenstelsel (x_1, x_2) gezien wordt beschreven in $\mathbb{R}^2$ door een echte rotatie gevolgd door een translatie, dus als geldt

$$\mathcal{C} = (\mathcal{R}_\theta, \vec{d}) \qquad \text{met} \qquad \theta \neq 0 \qquad (en\ -180^0 \leq \theta \leq 180^0)$$

dan bestaat er een rasterschuiving $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$, waarbij vanuit het assenstelsel (x_1', x_2') gezien er alleen sprake is van de rotatie over de hoek θ om de oorsprong O', dus waarbij dezelfde congruentie transformatie ten opzichte van het assenstelsel (x_1', x_2') in $\mathbb{R}^2$ wordt beschreven door

$$\mathcal{C}' = (\mathcal{R}_\theta, \vec{0})$$

Bewijs

Algemeen geldt in dit geval bij de rasterschuiving $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$ dat $\mathcal{C}' = (\mathcal{R}_\theta, \vec{d}')$ met $\vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{R}_\theta(\vec{s}) - \vec{s}$. De keuze $\vec{d}' = \vec{0}$ leidt tot de vergelijking voor de schuifvector $\vec{s} = \overrightarrow{OO'}$

$$\vec{s} - \mathcal{R}_\theta(\vec{s}) = \vec{d}$$

Deze vergelijking heeft voor $\theta \neq 0$ (en $-180^0 \leq \theta \leq 180^0$) altijd een één oplossing voor de vector $\vec{s}$. (Voor details zie opgave III.8.3)

□

Opmerking

Meetkundig valt de benodigde vector $\vec{s} = \overrightarrow{OO'}$ direct te vinden. Uit het voorbeeld blijkt dat O' het snijpunt is van de middelloodlijn van een punt A en zijn congruentiebeeld $\hat{A}$ met de middelloodlijn van een punt B en zijn congruentiebeeld $\hat{B}$. Het algebraïsch oplossen van de vergelijking $\vec{s} - \mathcal{R}_\theta(\vec{s}) = \vec{d}$ is wat minder eenvoudig. (Zie hiervoor opgave III.8.3)

Het volgende geeft het effect van een rasterschuiving op een *zuivere translatie*

Stelling
Als een congruentietransformatie van het platte vlak vanuit het standaard assenstelsel (x_1, x_2) *gezien wordt beschreven in* $\mathbb{R}^2$ *door alleen een translatie, dus als geldt*

$$\mathcal{C} = (\mathcal{I}, \vec{d})$$

waarbij $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{0^0}$ *de identiteit is (dus een rotatie over* 0^0*) dan wordt bij iedere rasterschuiving* $(x_1, x_2) \xrightarrow[\vec{s}]{} (x_1', x_2')$ *de congruentietransformatie ten opzichte van het assenstelsel* (x_1', x_2') *in* $\mathbb{R}^2$ *beschreven door deze zelfde translatie, dus ook*

$$\mathcal{C}' = (\mathcal{I}, \vec{d})$$

Bewijs
Gegeven $\mathcal{C} = (\mathcal{I}, \vec{d})$ gezien vanuit (x_1, x_2) dan geldt $\mathcal{C}' = (\mathcal{I}, \vec{d}')$ gezien vanuit (x_1', x_2') met $\vec{d}' = \vec{d} + \mathcal{I}(\vec{s}) - \vec{s}$. Omdat $\mathcal{I}(\vec{s}) = \vec{s}$ betekent dit $\vec{d}' = \vec{d}$

□

Het uiteindelijke doel van de hier besproken rasterschuivingen is om het volgende te bewijzen met behulp van affiene transformaties.

Stelling
De enige congruentietransformaties in het platte vlak zijn de glijspiegeling, de rotatie om een punt of de translatie.

Bewijs
Gezien vanuit het standaard assenstel (x_1, x_2) wordt een congruentietransformatie in $\mathbb{R}^2$ volgens het voorafgaande alleen beschreven door $\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d})$, waarbij voor de isometrie $\mathcal{D}$ alleen de lijnspiegeling of de rotatie mogelijk is. In combinatie met de drie voorgaande stellingen leidt dit tot het hier geformuleerde resultaat.

□

Opmerking
Er bestaan ook meer meetkundig getinte bewijzen voor deze stelling.
Bij het voorbeeld van de spiegeling in dit aanhangsel kan men van een zuiver meetkundige constructie van de lijn k' uitgaan.
Bij het voorbeeld van de rotatie vormt de constructie met de middelloodlijnen een meetkundig uitgangspunt.
Een andere mogelijkheid vormt de zogenoemde *drie spiegelingen stelling*.
Echter hier was het de bedoeling een bewijs te geven binnen het kader van transformaties van vectoren.

Opgaven

III.8.1 In een standaard assenstelsel (x_1, x_2) wordt een congruentietransformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{D}, \vec{d})$ uitgevoerd waardoor de driehoek ΔABC , waarvan de hoekpunten *A*, *B* en *C* de resp. positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ hebben, wordt afgebeeld in de driehoek $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$, met voor de hoekpunten $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ de resp. positievectoren $\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{C}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Teken in een standaard assenstel (x_1, x_2) de driehoeken ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

b) Toon door berekening aan dat inderdaad de congruentie geldt $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C} \cong \Delta ABC$

c) Bereken de matrix *D* van de isometrie $\mathcal{D}$ met behulp van de Gauss-Jordan methode uit twee verplaatsingsvectoren van ΔABC en de twee ermee samenhangende verplaatsingsvectoren van het beeld $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$.

d) Leg uit dat de isometrie $\mathcal{D}$ een lijnspiegeling is. Geef de kentallen van een vector $\vec{k}$ gericht langs de spiegellijn

e) Door de isometrie $\mathcal{D}$ wordt de driehoek ΔABC afgebeeld in de driehoek $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Bereken de kentallen van de positievectoren $\mathcal{D}(\vec{a})$, $\mathcal{D}(\vec{b})$ en $\mathcal{D}(\vec{c})$ van. de resp. punten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ en $\tilde{C}$.

f) Teken $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ in het assenstelsel. Teken ook de cirkelboog waardoor punt *A* wordt overgevoerd in punt $\tilde{A}$ en teken de translatievector $\vec{d}$ waardoor het punt $\tilde{A}$ wordt overgevoerd in het punt $\hat{A}$. Teken ook de positievectoren van *A*, $\tilde{A}$ en $\hat{A}$.

g) Geef de kentallen van de translatievector $\vec{d}$.

III.8.2 De driehoeken ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ in het platte vlak waarvan de hoekpunten *A*, *B* en *C* ten opzichte van een standaard assenstelsel (x_1, x_2) de resp. positievectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ hebben en de hoekpunten $\hat{A}$, $\hat{B}$ en $\hat{C}$ de resp. positievectoren $\mathcal{C}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\mathcal{C}(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Zoals hieronder zal blijken is hier sprake van een congruentietransformatie $\mathcal{C} = (\mathcal{R}_\theta, \vec{d})$

a) Teken in een standaard assenstel (x_1, x_2) de driehoeken ΔABC en $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$

b) Toon door berekening aan dat de congruentie geldt $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C} \cong \Delta ABC$

c) Bereken de matrix R_θ van de rotatie $\mathcal{R}_\theta$ met behulp van de Gauss-Jordan methode uit twee verplaatsingsvectoren van ΔABC en de twee ermee samenhangende verplaatsingsvectoren van het beeld $\Delta\hat{A}\hat{B}\hat{C}$.

d) Leg uit dat $\mathcal{R}_\theta$ inderdaad een rotatie is. Bereken de richtinghoek θ

e) Door de rotatie $\mathcal{R}_\theta$ wordt de driehoek ΔABC afgebeeld in de driehoek $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Bereken de kentallen van de positievectoren $\mathcal{R}_\theta(\vec{a})$, $\mathcal{R}_\theta(\vec{b})$ en $\mathcal{R}_\theta(\vec{c})$ van. de resp. punten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ en $\tilde{C}$.

f) Teken $\Delta\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ in het assenstelsel. Teken ook de cirkelboog waardoor punt A wordt overgevoerd in punt $\tilde{A}$ en teken de translatievector $\vec{d}$ waardoor het punt $\tilde{A}$ wordt overgevoerd in het punt $\hat{A}$. Teken ook de positievectoren van A, $\tilde{A}$ en $\hat{A}$.

g) Geef de kentallen van de translatievector $\vec{d}$.

III.8.3 Deze vraag gaat over hoe de vergelijking $\vec{s} - \mathcal{R}_\theta(\vec{s}) = \vec{d}$ uit aanhangsel 2 algebraïsch kan worden opgelost, die.

Laat $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ zijn en de matrix van de rotatie $R_\theta = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ met $p^2 + q^2 = 1$

a) Toon aan dat voor de onbekenden s_1 en s_2 uit $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ geldt

$$s_1 \begin{pmatrix} 1-p \\ -q \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} q \\ 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

b) Gebruik het inproduct van deze vergelijking met de nevenvector van $\begin{pmatrix} q \\ 1-p \end{pmatrix}$ om aan te tonen dat

$$s_1 = \frac{(1-p)d_1 - qd_2}{2-2p}$$

c) Gebruik het inproduct van deze vergelijking met de nevenvector van $\begin{pmatrix} 1-p \\ -q \end{pmatrix}$ om aan te tonen dat

$$s_2 = \frac{qd_1 + (1-p)d_2}{2-2p}$$

(De hier gebruikte methode leidde in §I.9 tot de regel van Cramer.)

III.8.4 De vergelijking $\vec{s} - \mathcal{S}_k(\vec{s}) = \vec{d}$ kan in het algemeen niet worden opgelost.

Laat $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ zijn en de matrix van de spiegeling $S_k = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ met $p^2 + q^2 = 1$

a) Toon aan dat voor de onbekenden s_1 en s_2 uit $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ geldt

$$s_1 \begin{pmatrix} 1-p \\ -q \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -q \\ 1+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

b) Gebruik het inproduct van deze vergelijking met de nevenvector van $\begin{pmatrix} 1-p \\ -q \end{pmatrix}$ om aan te tonen dat

$$0s_1 + 0s_2 = qd_1 + (1-p)d_2$$

III.8.5 In aanhangsel 2 wordt gebruikt dat een lijnspiegeling van een vector gevolgd door een spiegeling in dezelfde lijn de oorspronkelijke vector oplevert, dus $\mathcal{S}_k(\mathcal{S}_k(\vec{b})) = \vec{b}$.
Dit wordt hier algebraïsch aan getoond.
Als voor de matrix van de spiegeling geldt $S_k = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ met $p^2 + q^2 = 1$ dan

$$\mathcal{S}_k(\mathcal{S}_k(\vec{b})) = S_k(S_k \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

Toon door matrixvermenigvuldiging aan dat dit de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ oplevert.

III.8.6 Bij een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^2$ is er sprake van behoud van verschil, dus voor alle vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt $\mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b}) - \mathcal{L}(\vec{a})$.
Bewijs dit.

III.9 Aanhangsel over de definitie van een affiene transformatie in $\mathbb{R}^2$

Hieronder volgt een schets van hoe *vanuit het natuurkundige begrip massacentrum een affiene transformatie* kan worden gedefinieerd. Hierbij worden voorbeelden en bewijzen achterwege gelaten. Hoe dit doorwerkt bij de beschouwingen §III.8 over congruentietransformaties moet nog worden uitgewerkt als leerlingentekst.

Definitie
Als $m_1,\dots,m_n$ massa's zijn van puntdeeltjes in een plat vlak met resp. positievectoren $\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_n$ dan wordt de positievector van het *massacentrum Z* van deze *n* puntmassa's gedefinieerd als het *massagewogen gemiddelde* van deze positievectoren:

$$\vec{s}_Z = \frac{m_1\vec{s}_1+\cdots+m_n\vec{s}_n}{m_1+\cdots+m_n}$$

Opmerkingen:

1) Natuurkundig zijn massa's in deze formule altijd positief. Wiskundig is het zinvol om ook met negatieve massa's te werken, en met massa's nul.. Dit leidt dan tot de zogenoemde *barycentrische coördinaten*(zie opmerkingen hieronder).
De eis is wel $m_1+\cdots+m_n \neq 0$.
2) In natuurkundige toepassingen zijn de massa's constant en bewegen de deeltjes, d.w.z. dat de positievectoren veranderen.
Bij wiskundige toepassingen als barycentrische coördinaten zijn juist de positievectoren van de deeltjes constant en variëren de massa's.

Stelling
De positie van het massacentrum hangt niet af van de keuze van de oorsprong voor de positievectoren in het platte vlak.

Stelling voor twee massapunten
Bij twee massapunten ligt het massacentrum op de lijn door de massapunten.
Hierbij verhouden de afstanden van dit centrum tot de massapunten zich omgekeerd evenredig met de absolute waarde van de massa's.
Hebben de twee massa's hetzelfde teken dan ligt het massacentrum tussen de twee massapunten. Hebben de twee massa's tegengesteld teken dan ligt het massacentrum niet tussen de massapunten.

Stelling van de massavervanging
Als een systeem van puntmassa's is onderverdeeld in verschillende deelsystemen en de puntmassa's van één van deze deelsystemen worden alle vervangen door één puntmassa die gelijk is aan de totale massa van dat deelsysteem en als verder die éne puntmassa wordt geplaatst in het massacentrum van dat deelsysteem, dan blijft de positie van het massacentrum van het gehele systeem onveranderd.

Opmerkingen

1) In het platte vlak zijn drie punten in een vaste positie, niet op één lijn liggend en met variabele massa voldoende om via het massacentrum iedere andere positie van het vlak vast te leggen.

2) Bij ligging van deze vaste punten in A, B en C wordt een andere positie vastgelegd door resp. drie massa's m_A, m_B en m_C. Deze massa's vormen de *barycentrische coördinaten van het vlak.*

3) De barycentrische coördinaten zijn *homogeen*. Dit betekent dat als drie resp. massa's m_A, m_B en m_C een positie in het vlak vastleggen dan wordt dezelfde positie vastgelegd door de resp. massa's λm_A, λm_B en λm_C, waarbij $\lambda \neq 0$ een willekeurig reëel getal is.
Vanwege deze homogeniteit worden de barycentrische coördinaten van een positie genoteerd als $(m_A : m_B : m_C)$.
De homogeniteit is dan in deze notatie $(m_A : m_B : m_C) = (\lambda m_A : \lambda m_B : \lambda m_C)$

Definitie
Een transformatie $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^2$ heet een *affiene transformatie* als voor ieder tweetal massapunten geldt
$$\mathcal{F}(\vec{s}_Z) = \frac{m_1\mathcal{F}(\vec{s}_1) + m_2\mathcal{F}(\vec{s}_2)}{m_1 + m_2}$$

Opmerkingen
1) Door aanleg van het standaard assenstelsel (x_1, x_2) in het platte vlak kan deze algebraïsche definitie voor een affiene transformatie toegepast worden op de positievectoren in dat vlak. In het vlak leidt dit tot meetkundige verandering van de punten die ook een affiene transformatie wordt genoemd en die ook wordt genoteerd met $\mathcal{F}$
2) Door deze definitie gaat een lijn in het vlak over in een lijn en is er behoud van de verhouding van de afstanden langs de lijn.

Stelling
Bij een affiene transformatie $\mathcal{F}$ geldt voor het massagewogen gemiddelde
$$\mathcal{F}(\vec{s}_Z) = \frac{m_1\mathcal{F}(\vec{s}_1) + \cdots + m_n\mathcal{F}(\vec{s}_n)}{m_1 + \cdots + m_n}$$

Stelling
Een transformatie $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^2$ is dan en slechts dan affien als $\mathcal{F}$ de samenstelling is van een lineaire transformatie $\mathcal{L}$ gevolgd door een translatie over een vaste vector $\vec{d}$.
Dit laatste betekent dat voor alle vectoren $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ geldt
$$\mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{a}) + \vec{d}$$

Opmerkingen
1) Voor een *affiene transformatie* $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}^2$ wordt vaak de *notatie* $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$ gebruikt, waarbij $\mathcal{L}$ *het lineaire deel* van de transformatie heet en $\vec{d}$ *het translatiedeel.*
2) Als in een plat vlak sprake is van een affiene transformatie $\mathcal{F} = (\mathcal{L}, \vec{d})$ dan ondergaan de positievectoren deze transformatie $\mathcal{F}$ maar de verplaatsingsvectoren ondergaan alleen het lineaire deel $\mathcal{L}$ van de transformatie.
Meer precies: Als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ positievectoren zijn dan geldt voor de verplaatsingsvector
$$\mathcal{F}(\vec{b}) - \mathcal{F}(\vec{a}) = \mathcal{L}(\vec{b} - \vec{a})$$