1.3 *De produktregel*

Eerder heb je geleerd dat je de *som* van twee (of meer) functies kunt differentiëren, door *termsgewijs* te differentiëren.
Bijvoorbeeld:

$$\frac{d}{dx}[x^2 + x^3] = 2x + 3x^2$$

1.12 Een dergelijke mooie regel geldt niet voor produkten van functies. Bij een produkt mag je **niet** factorsgewijs differentiëren.

Laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{d}{dx}[x^2 \cdot x^3]$ niet gelijk is aan $2x \cdot 3x^2$

Om te komen tot een regel voor het differentiëren van een produkt van twee (of meer) functies, kijken we eerst in drie opgaven hoe een produkt verandert als de beide factoren veranderen.

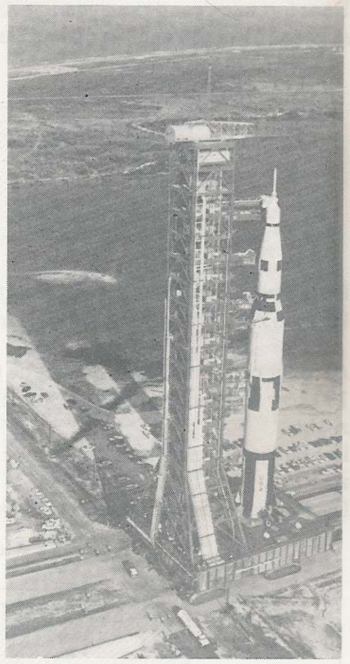
1.13 De gemiddelde afmetingen van een voetbalveld zijn 60 bij 100 m.
In een zeker land heeft de voetbalbond bepaald dat zowel de lengte als de breedte niet meer dan 5% hiervan mogen afwijken.
Hoeveel procent wijkt de oppervlakte maximaal af van de gemiddelde oppervlakte?

1.14 Lancering van de Saturnus V-raket. Een wet uit de natuurkunde zegt dat de voortstuwingskracht (=*F*) gelijk is aan het produkt van de massa (=*m*) en de versnelling(=*a*). In formule: $F = m \cdot a$

Door brandstofgebruik neemt de massa van de raket af: *m* is een dalende functie van de tijd *t*. Ook *F* en *a* zijn functies van *t*. Aanvankelijk zullen *F* en *a* toenemen, maar later als gevolg van het opraken van de brandstof weer afnemen.

a Veronderstel dat in een zeker tijdsinterval de massa afneemt met 2% en de versnelling met 1%. Met hoeveel procent is de voortstuwingskracht afgenomen?

b Veronderstel dat de massa verandert met Δm en de versnelling met Δa. Toon aan:
$\Delta F = \Delta m \cdot a + m \cdot \Delta a + \Delta m \cdot \Delta a$



Met de SaturnusV werden zes bemande Apollo-vluchten naar de maan uitgevoerd. Op de foto hierboven wordt een SaturnusV-raket naar het lanceerplatform gereden

1.15 De verkoop van sportschoenen van het type Superrunner is afhankelijk van de prijs. Gaat de prijs omlaag(omhoog), dan zal de verkoop stijgen (dalen).

Stel p = de prijs van een paar Superrunners en N = het door een warenhuisconcern verkochte aantal per week.

De omzet per week is:

$R = N \cdot p$

a Veronderstel dat de prijs stijgt met 5% en de verkoop daalt met 2%. Met hoeveel procent verandert de omzet?

b Bij een verandering Δp van de prijs en een verandering ΔN van de verkoop hoort een verandering ΔR van de omzet.

Toon aan: $\Delta R = \Delta N \cdot p + N \cdot \Delta p + \Delta N \cdot \Delta p$

Nu komen we tot de produktregel.

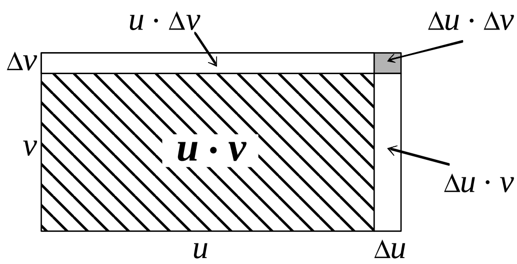
Stel u en v zijn functies van x en stel $y = u \cdot v$

Bij een verandering Δx van x horen veranderingen $\Delta u, \Delta v$ (en Δy).

Er geldt:

$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$ **(1)**

Deze formule voor de verandering van een produkt kun je bij positieve waarden van *u, v,* Δu , Δy , mooi 'zien' in onderstaand plaatje:



De termen $u \cdot \Delta v$ en $\Delta u \cdot v$ zijn de witte staafjes in de figuur.

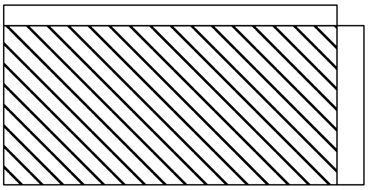
De term $\Delta u \cdot \Delta v$ is het grijze blokje in de hoek.

Als door verkleining van Δx , de toename Δu en Δv beide bijvoorbeeld ongeveer 100 keer zo klein worden, dan worden de staafjes $u \cdot \Delta v$ en $v \cdot \Delta u$ ongeveer 100 keer zo dun.

Het blokje $\Delta u \cdot \Delta v$ wordt dan in twee richtingen verkleind en ongeveer 10.000 keer zo klein!

Daarom mag in de formule **(1)** de term $\Delta u \cdot \Delta v$ worden verwaarloosd en komt er:

$\Delta y \approx \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v$ **(2)**



Na deling, links en rechts door Δx komt er:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \tag{3}$$

De benadering is nauwkeuriger naarmate Δx kleiner is.

Kortom: $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} \tag{4}$$

Bij het differentiëren van een produkt $u \cdot v$ worden beide factoren u en v dus wèl gedifferentieerd, maar niét gelijktijdig. Je kunt de produktregel ook in deze vorm onthouden:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

eerste factor gedifferentieerd

tweede factor gedifferentieerd

1.16 Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor:

a $y = 3 \cdot \sin x$

b $y = 5 \cdot \sin x$

c $y = 8\frac{1}{2} \cdot \sin x$

d $y = 7x^2 \cdot (\frac{1}{4}x^2 + 17)$

e $y = 7x^2 \cdot \sin x$

f $y = (2+3x) \cdot (4 - 5x + 6x^2)$

1.17 $u(x) = 5x^2 + 1$; $v(x) = 4x^3 + 1$; $p(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bereken op twee manieren $p'(x)$:

a met behulp van de somregel;

b met behulp van de produktregel.

1.18 a bereken $\frac{d}{dx}[(x^2 + 2x + 3)^2]$ voor $x = 1$

b Bereken $\frac{d}{dx}[\sin^2 x]$ voor $x = \frac{1}{4}\pi$

c Bereken $\frac{d}{dx}[(x - \sin x)^2]$ voor $x = \frac{1}{2}\pi$

1.19 Je weet al dat:

$$\frac{d}{dx}[\sin(ax)] = a \cdot \cos ax \text{ en}$$

$$\frac{d}{dx}[\cos(ax)] = -a \cdot \sin ax$$

Bereken: $\frac{d}{dx}[\sin 2x \cdot \cos 3x]$ voor $x = \frac{1}{6}\pi$

Neem onderstaande tabel over en vul in (vereenvoudig waar mogelijk):

$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$
$\cos x$	….
$x^2 + \cos x$	….
$x^2 - \cos x$	….
$x \cdot \sin x$	….
$x^2 + x \sin x$	….
$(x^2 + x)\sin x$	….

De produktregel kan worden uitgebreid voor een produkt van meer dan twee functies.
In schema:

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

eerste functie differentiëren	tweede functie differentiëren	derde functie differentiëren

1.20 Je kunt bovenstaande regel vinden door twee keer de produktregel van twee functies toe te passen. Laat dit zien.

1.21 a Bereken de hellingfunctie van: $p(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$

b Ook van: $p(x) = x \sin x \cos x$

c En ook van: $p(x) = \cos^3 x$

1.22 Hoe luidt de produktregel voor een produkt van 4 functies, zeg $y = a(x) \cdot b(x) \cdot c(x) \cdot d(x)$?

1.23 De grafiek van de functie $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ snijdt de x-as in 4 punten.

a Bereken de hellingscoëfficiënt van de raaklijn in elk van die 4 punten.

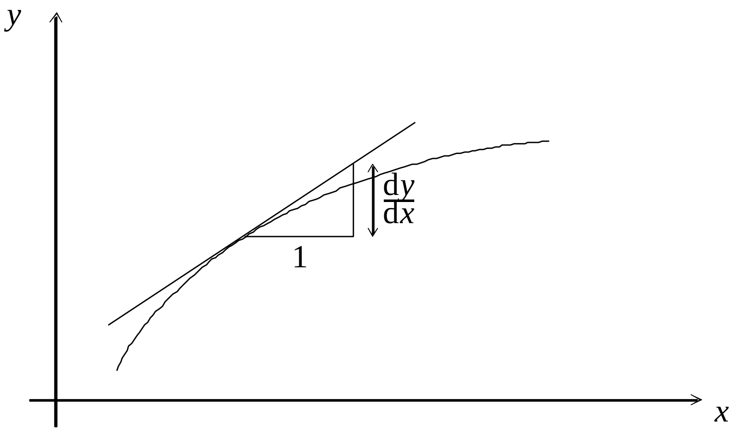
b Als je opgave a goed hebt uitgerekend, vind je afwisselend een negatieve en een positieve hellingscoëfficiënt.
Licht dat toe door een ruwe schets van de grafiek van *f* te maken.

c Hoeveel oplossingen zal $f'(x) = 0$ hebben?

1.24 Gegeven: $f(x) = (2x+1)^4$.
Bereken $f'(-1)$

1.3.1 Terugblik

$\boxed{f'(x)}$ = $\boxed{\textit{hc}\text{ grafiek } f \text{ in } (x,y)}$ = $\boxed{\textit{hc}\text{ raaklijn in } (x,y)}$ = $\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$



$\dfrac{dy}{dx}$ (in een zeker punt) wordt *exact berekend* met behulp van de afgeleide functie (en invullen van de x-coördinaat).

$\dfrac{dy}{dx}$ (in een zeker punt) wordt *benaderd* door $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ te berekenen in een klein interval (om dat punt).

Produktregel

Laat *u, v, w* functies zijn van *x*.
Voor het differentiëren van de produkten $u \cdot v$ en $u \cdot v \cdot w$ gelden de regels:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)] = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

Kortweg:
$(uv)' = u'v + uv'$
$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

1.3.2 Opgaven

a. $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)$ $y = (1-x)(1+x)(1+x^2)$

Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 1$.

b. $f(x) = (1-x)\sin x + (1+x)\cos x$.

Laat zien dat geldt: $f'(x) = (2-x)\cos x - (2+x)\sin x$

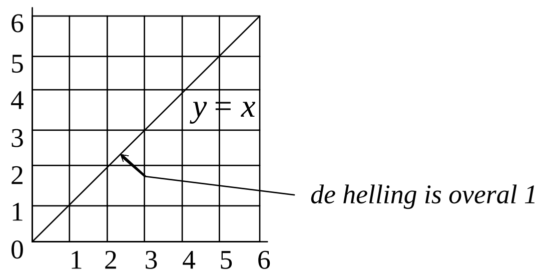
1.4 *Differentiëren van machtsfuncties*

De inmiddels bekende regel voor het differentiëren van machtsfuncties luidt:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Deze regel kun je vrij gemakkelijk ’herontdekken’ met behulp van de (uitgebreide) produktregel.
Voor n = 1 is de regel direct aan de grafiek te zien.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x] = 1$$



Voor n = 2, 3, 4, enz. werkt de produktregel:

$$\frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[x \cdot x] = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}[x^3] = \frac{d}{dx}[x \cdot x \cdot x] = 1 \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot 1 = 3x^2$$

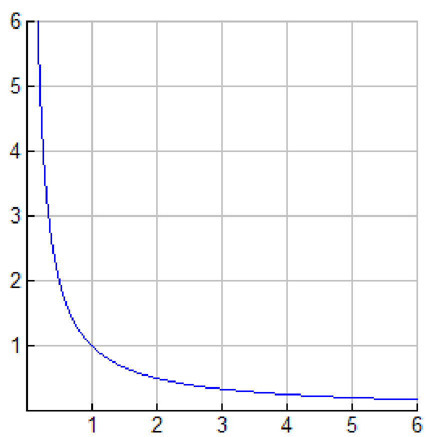
$$\frac{d}{dx}[x^4] = \frac{d}{dx}[x \cdot x \cdot x \cdot x] = 1 \cdot x \cdot x \cdot x + x \cdot 1 \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot 1 \cdot x + x \cdot x \cdot x \cdot 1 = 4x^3$$

enzovoort.
In dit onderdeel gaat het vooral over machtsfuncties met negatieve en/of gebroken exponenten. Dus functies als: $y = x^{-1}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-2\frac{1}{3}}$

De vraag is nu of voor deze functies dezelfde regel van kracht is, dus of geldt:

$$\frac{d}{dx}x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \text{voor} \quad n = -1, \tfrac{1}{2}, -2\tfrac{1}{3} \quad \text{enz.}$$

De eerstvolgende opgaven en stukjes theorie willen je overtuigen dat dit inderdaad het geval is. De latere opgaven van dit hoofdstuk zijn bedoeld als oefeningen en toepassingen van de regel.



1.25 Voor $n = -1$ zou de regel betekenen:

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}] = -1 \cdot x^{-2}$$

a Bekijk de grafiek van $f(x) = x^{-1}$.
Meet de helling in $(1,1)$ en in $(2,\frac{1}{2})$ en ga na of de regel in die gevallen zo’n beetje klopt.

b Neem het interval [4,99; 5,01] en bereken het differentiequotiënt $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ op dit interval.

c Ga na of de uitkomst ongeveer gelijk is aan $-1 \cdot x^{-2}$ voor $x = 5$

Het lijkt er op of de regel $\dfrac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ klopt voor $n = -1$

Voor het bewijs gebruiken we het volgende principe:

Voorbeeld: $x^2 \cdot x \quad = x^3$ $2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$ Differentieer twee vormen die aan elkaar gelijk zijn en je krijgt weer twee gelijke vormen!

Neem nu: $x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x$

Als je nu linkerlid en rechterlid wil differentiëren, zit je met het probleem dat je de afgeleide van $\dfrac{1}{x}$ niet kent.

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$$

$$2x\frac{1}{x} + x^2 \cdot ? = 1 \qquad *$$

Op de plaats van ? past de afgeleide van $\dfrac{1}{x}$.

Je kunt die afgeleide nu vinden door (*) op te vatten als een vergelijking met ? als *onbekende* en de vormen met x als *bekende*.

? opgelost geeft	$\longrightarrow$	$2x \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot \boxed{?} = 1$ $2 + x^2 \cdot \boxed{?} = 1$ $x^2 \cdot \boxed{?} = -1$ $\boxed{?} = -\frac{1}{x^2}$

Dus: $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=-\frac{1}{x^2}$ ofwel $\frac{d}{dx}[x^{-1}]=-1\cdot x^{-2}$

1.26 Bekijk het voorgaande bewijs goed.

Hoe kun je $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]$ ook vinden door uit te gaan van $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

1.27 $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$

a Laat met behulp van de produktregel zien dat $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\right] = \frac{-2}{x^3}$

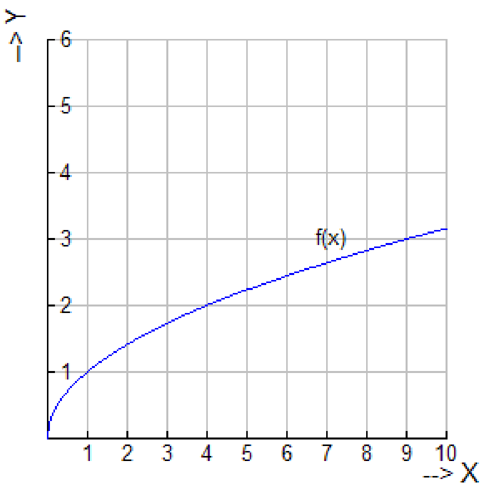
b Is dit resultaat in overeenstemming met $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$?

c Wat zal de afgeleide functie zijn van $f(x) = \frac{1}{x^4}$

1.28 De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

a Hoe kun je dat zien aan de formule?
b Welke asymptoten heeft de grafiek?
c Teken de grafiek van f.
d De raaklijnen in de punten $(\frac{1}{2}, 4)$ en $(-\frac{1}{2}, 4)$ snijden elkaar in A en de x-as respectievelijk in B en C.
Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

1.29 Hiernaast zie je de grafiek van $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$



a Neem de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ over en teken in dezelfde figuur ook de grafiek van $y = x^2$ voor $x \geq 0$.
De twee grafieken zijn elkaars spiegelbeeld. Ten opzichte van welke spiegelas?

b De hellingscoëfficiënt van de raaklijn aan $y = x^2$ in het punt (1,1) is gelijk aan 2. Als je die raaklijn spiegelt in de lijn $y = x$ krijg je de raaklijn aan $y = x^{\frac{1}{2}}$
Hoe groot is de hellingscoëfficiënt van dat spiegelbeeld?

c De hellingscoëfficiënt van $y = x^2$ in het punt (5,25) is 10.
Hoe kun je hieruit de hellingscoëfficiënt van $y = x^{\frac{1}{2}}$ vinden in het punt (25,5)?

De regel $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ is ook geldig voor $n = \frac{1}{2}$.
Het bewijs gaat weer met de produktregel.

Er geldt:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} &= x \\ \boxed{?} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \boxed{?} &= 1 \\ 2\sqrt{x} \cdot \boxed{?} &= 1 \\ \boxed{?} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Dus $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ is de afgeleide van $\sqrt{x}$.

Kortom: $\dfrac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

of: $\dfrac{d}{dx}[x^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

1.30 Op dezelfde manier kun je de afgeleide functie van $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ vinden.

Je begint nu zó: $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x$

a Differentieer nu met de produktregel en laat zien dat geldt: $\dfrac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

b Wat zal de afgeleide functie zijn van $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$?

En van $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$?

1.31 Bekijk opnieuw de grafiek van $y = x^{\frac{1}{2}}$ (opgave 1.29).

In welk punt van de grafiek heeft de raaklijn een hellingshoek van 45°?

1.32 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ kun je differentiëren met de produktregel, immers: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

Voer de berekening uit en laat zien dat $\dfrac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$ ook klopt voor $n = \frac{2}{3}$

Voortaan mag je direct de volgende regel toepassen.

Voor alle	***positief gehele*** ***negatief gehele*** ***positief gebroken*** ***negatief gebroken***
exponenten ***r*** **geldt:**	

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

Voorbeelden:

(1) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2}$

Om te kunnen differentiëren, schrijf je: $f(x) = 6 \cdot x^{\frac{2}{3}}$

Er volgt: $f\,'(x) = 6 \cdot \tfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

(2) $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$

Om te kunnen differentiëren, schrijf je: $f(x) = 3x^{-4}$.

Er volgt: $f\,'(x) = 3 \cdot -4x^{-5} = -12x^{-5} = \dfrac{-12}{x^5}$

1.33 Differentieer nu de volgende functies.

a	$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$	c	$f(x) = 10 \cdot x^{0,2}$	e	$f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x}$
b	$f(x) = \dfrac{5}{x^3}$	d	$f(x) = 0,2 \cdot x^{10}$	f	$f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1.34 Voorbeeld: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$

Om *f* te kunnen differentiëren, kun je eerst als volgt herleiden:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = x + 1 + x^{-1}.$$

Er volgt nu: $f\,'(x) = 1 + 0 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Herleid en differentieer:

a	$f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$	c	$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$
b	$f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$	d	$f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 3x}{x\sqrt{x}}$

1.35 Je kunt $y = x\sqrt{x}$ op twee manieren differentiëren.
(i) door $x\sqrt{x}$ op te vatten als het produkt van x en $\sqrt{x}$.
(ii) door $x\sqrt{x}$ op te vatten als macht van $x(= x^{1\frac{1}{2}})$.
Differentieer de functie op beide manieren en laat zien dat je resultaten gelijk zijn.

1.36 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $f(x) = \sqrt{x}$
Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$

1.37 Bereken:

a	$\dfrac{d}{dx}[\sqrt{x^5}]$ voor $x = 1$	c	$\dfrac{d}{dx}[x^2\sqrt{x}]$ voor $x = 9$
b	$\dfrac{d}{dx}[\left(\sqrt{x}\right)^5]$ voor $x = 4$	d	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right]$ voor $x = 9$

1.38 $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = x$, $v(x) = f(x) - g(x)$.
a Teken in één figuur de grafieken van f, g en v.
b Toon aan dat de maximale waarde van $v(x)$ gelijk is aan 1.

1.39 $f(x) = x^{1,5} - 3x$ $(x \geq 0)$.
a Vul in:

x	0	1	4	9	16
$f(x)$					
$f'(x)$					

b Teken een grafiek van f
c Wat is het bereik van f ?

1.40 In een destilleerderij kan per dag 1000 liter jonge jenever worden gestookt. De produktiekosten K (in guldens) en de opbrengst O (in guldens) zijn functies van de geproduceerde hoeveelheid q (in liters).
De economisch adviseur van het bedrijf heeft een wiskundig model opgesteld:
$K = q^{\frac{2}{3}}$ en $O = 4q^{\frac{1}{2}}$

a Teken de grafieken van K en O als functie van q.
b Teken ook een grafiek van de winst $W(= O - K)$ als functie van q. Bij welke produktieomvang is W maximaal?

1.41 Op de emballage-afdeling van een fabriek vervaardigt men onder andere kartonnen dozen met een inhoud van 36 dm^3 . De dozen zijn aan de bovenkant open. De bodem van zo'n doos moet een vaste vorm hebben (lengte en breedte moeten zich verhouden als 2 : 1)
a Stel de breedte van de doos x dm.

Toon aan dat de hoogte van de doos gelijk moet zijn aan $\frac{18}{x^2}\,dm$

b Druk de benodigde hoeveelheid karton (=*k*) voor de zijkanten en bodem uit in *x*.

c Bereken $\frac{dk}{dx}$

d De fabrikant concludeert dat hij het voordeligst uit is als hij dozen produceert die 3 dm breed, 6 dm lang en 2 dm hoog zijn. Hoe volgt dit uit b en c?

1.42 Zie de volgende tabel met zestien functies.
Differentieer ze alle zestien en vereenvoudig zo mogelijk de resultaten.

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt{x^{-1}}$	$\frac{1}{x}\sqrt[4]{x}$	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
$\frac{1}{x\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^{-3}}$	$10x^{0,7}$	$\frac{12}{x^{0,3}}$
$\frac{x+1}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})^{-3}$	$\sqrt[3]{8x}$	$\sqrt[3]{x^{-8}}$
$\frac{1}{x}+\sin x$	$\frac{1}{x}\cdot\sin x$	$\frac{2}{\sqrt{x}}\cos x$	$\frac{2\cos x}{\sqrt{x}}$

1.5 *Kettingregel*

Dit hoofdstuk gaat over het differentiëren van functies als:

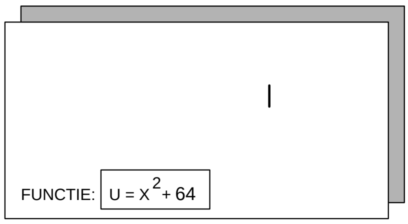
$y = \sqrt{x^2 + 64}$

$y = \sin(x^2)$

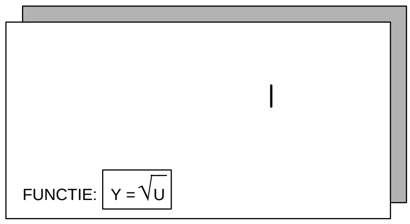
$y = \dfrac{1}{\cos^4(3x)}$

enz., kortom over het differentiëren van kettingfuncties.
De regel die hierop betrekking heeft, de zogenaamde *kettingregel*, kan worden duidelijk gemaakt met behulp van machines. Hieronder zie je twee van zulke

A



B



'machines'.
De afspraak is nu dat de 'uitvoer' van machine A als 'invoer' van B wordt gekozen. Zo is bij de invoer $x = 6$ op machine A, de uitvoer $u = 100$. Deze waarde, als invoer bij B gebruikt, levert daar de uitvoer $y = 10$ op. Schematisch:

$$\begin{matrix} x & & u & & y \\ 6 & \xrightarrow{\quad A \quad} & 100 & \xrightarrow{\quad B \quad} & 10 \end{matrix}$$

1.43 We gaan nu de invoer van A een beetje veranderen, bijvoorbeeld +0,1 dus invoer x = 6,1. Kort gezegd: $\Delta x = 0{,}1$.

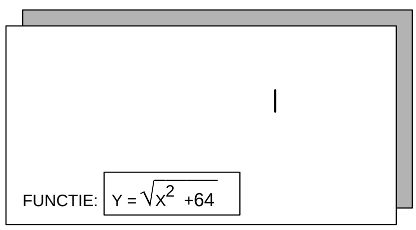
a Ga na dat bij kleine verandering van $\Delta x = 0{,}1$ vanuit de stand $x = 6$ geldt:
$\Delta u \approx 12 \cdot \Delta x$ en $\Delta y \approx 0{,}05 \cdot \Delta u$

b De bewering van a houdt verband met: $\dfrac{du}{dx} = 12$ voor $x = 6$ en $\dfrac{dy}{du} = 0{,}05$ voor $u = 10$.

Hoe kun je hieruit $\dfrac{dy}{dx}$ berekenen voor $x = 6$?

De afspraak 'uitvoer A = invoer B' voor de machines A en B uit het vorige voorbeeld, komt neer op het schakelen van die twee machines. De aan elkaar geschakelde machines A en B kunnen worden vervangen door één machine C.

C



In opgave 1.40 heb je gezien hoe je $\frac{dy}{dx}$ kunt berekenen voor $x = 6$ door vermenigvuldiging van de differentiaalquotiënten $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$.
Dat zijn de differentiaalquotiënten van de beide schakels waaruit de functie $y = \sqrt{x^2 + 64}$ is opgebouwd. Dit geldt natuurlijk niet alleen voor $x = 6$, maar voor elke waarde van *x*.
In formule:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}} \longleftarrow \textit{kettingregel}$$

In woorden:

> de verandering van *y* ten opzichte van *x* =
> de verandering van *u* ten opzichte van *x*
> maal
> de verandering van *y* ten opzichte van *u*.

1.44 Bekijk nogmaals de functie $y = \sqrt{x^2 + 64}$

a Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 4$.

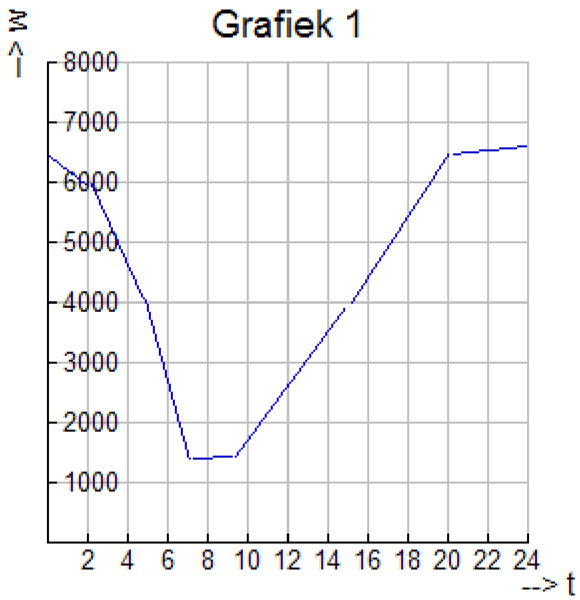
b Laat zien dat voor $x = 9$ geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{\sqrt{145}}$ en dat voor $x = 10$ geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{\sqrt{164}}$

c Heb je enig idee hoe $\frac{dy}{dx}$ kan worden uitgedrukt in *x*?

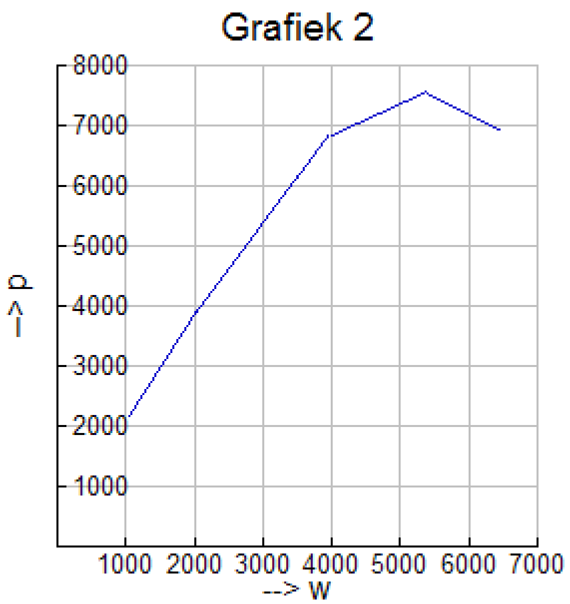
Voor je nu verder leert, hoe je de kettingregel kunt gebruiken in uiteenlopende situaties, eerst nog een tweede voorbeeld om de kettingregel duidelijk te maken.

1.45 Een groot bedrijf werd getroffen door een hevige griepgolf. Toen de epidemie zijn top bereikte, was zo'n 80% van het totale werknemersbestand geveld door de griep. In de volgende figuur (I) zie je de grafiek van het aantal aanwezige werknemers (= *w*) als functie van de tijd in dagen (= *t*) in de dagen na het uitbreken van de epidemie.

a Hoeveel werknemers telt het bedrijf ongeveer?
b Wanneer was het ziekteverzuim het grootst?
c Wanneer nam het ziekteverzuim het sterkst toe?



1.46 De bedrijfsleider was de eerste dagen nauwelijks verontrust door het ziekteverzuim. Hij beschikte namelijk over de gegevens betreffende de produktie (= *p*) als functie van het aantal werknemers (zie grafiek II).



a Verklaar waarom de bedrijfsleider de eerste dagen nog niet zo somber gestemd was.

b Hoeveel dagen na het uitbreken van de epidemie bereikte de produktie een maximum?

c Schets de grafiek van *p* als functie van *t* (voor de desbetreffende periode van 22 dagen).

Let nog eens op het verband tussen *w* en *t* (grafiek I). In drie punten van de grafiek is de helling gemeten. Resultaat:

t	w	$\frac{dw}{dt}$
2	6200	–300
4	4500	–1200
10	1800	300

a Welke betekenis kun je hechten aan de getallen in de derde kolom (dus aan -300, -1200, 300)?

Ook in grafiek II is op drie plaatsen de helling gemeten. Resultaat:

w	p	$\frac{dp}{dw}$
6200	7190	–0,1
4500	6750	0,6
1800	3670	1,7

b Beredeneer dat op het tijdstip $t = 4$ de produktie afnam met 720 stuks per dag.

c Op het tijdstip $t = 10$ nam de produktie weer toe. In welke mate?

d Nam de produktie op het tijdstip $t = 2$ toe of af? In welke mate?

e Welk verband bestaat er tussen $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ en $\frac{dp}{dw}$?

De kettingregel zegt dat je het differentiaalquotiënt van een kettingfunctie kunt bepalen door de differentiaalquotiënten van de schakels te berekenen en die met elkaar te vermenigvuldigen.

Daarbij zullen de schakels functies zijn die *direct* te differentieren zijn, dus bijvoorbeeld machtsfuncties, veeltermfuncties, sinus of cosinus.

Neem $y = \sqrt{x^2 + 64}$ ofwel $y = (x + 64)^{\frac{1}{2}}$

Als ketting genoteerd:

$$x \longrightarrow x^2 + 64 \longrightarrow (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}}$$

Als we de uitvoer van de eerste schakel u noemen, dan is de invoer van de tweede schakel ook te schrijven als u

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + 64 & \longrightarrow & (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}} \\ & & \| & & \| \\ & & u & \longrightarrow & u^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + 64 & \longrightarrow & (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}} \\ & & \| & & \| \\ & & u & \longrightarrow & u^{\frac{1}{2}} \\ & & & & \| \\ & & & & y \end{array}$$

Die laatste uitvoer noemen we ook y. Het complete schema wordt nu:

We berekenen voor $u = x^2 + 64$ het differentiaalquotiënt $\frac{du}{dx}$ en van $y = u^{\frac{1}{2}}$ het differentiaalquotiënt $\dfrac{dy}{du}$.

Resultaat: $\dfrac{du}{dx} = 2x$ en $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

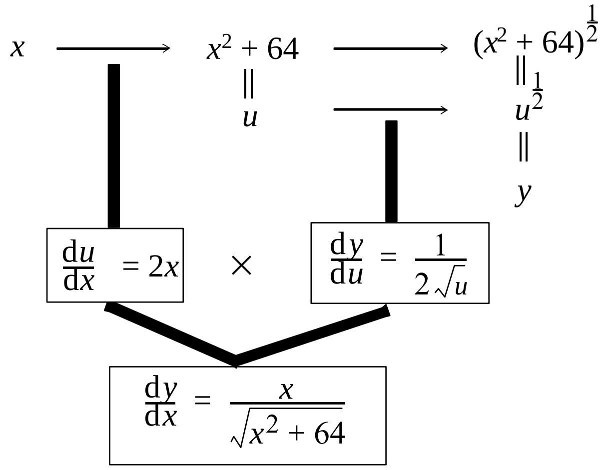
Die twee vermenigvuldigd levert $\dfrac{dy}{dx}$ op.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}}$$

Omdat we $\dfrac{dy}{dx}$ graag willen uitdrukken in x, vervangen we u door $x^2 + 64$.

Er komt dan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 64}}$.

In schema:



1.47 Gegeven is de functie $y = \sin(x^2)$.

Vier leerlingen vonden vier verschillende antwoorden voor $\dfrac{dy}{dx}$.

Dit zijn die vier antwoorden:

(1)	$\frac{dy}{dx} = \sin(2x)$	(3)	$\frac{dy}{dx} = \cos(2x)$
(2)	$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2)$	(4)	$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$

Als je goed naar de antwoorden kijkt, zie je wel hoe elk van die leerlingen gedacht heeft.

a Schrijf bij elk van de vier antwoorden op, hoe de gedachtengang (vermoedelijk) is geweest.

b Welk van de vier antwoorden is het juiste? Waarom?

1.48 Bekijk onderstaande ketting:

$$x \longrightarrow x^2 + x + 1 \longrightarrow (x^2 + x + 1)^{-1}$$

a Stel $u = x^2 + x + 1$ en $y = u^{-1}$ en bereken $\dfrac{du}{dx}$ en $\dfrac{dy}{du}$.

b Druk vervolgens $\dfrac{dy}{dx}$ uit in x.

1.49 Bereken $\dfrac{dy}{dx}$ voor:

a $y = (5x+2)^3$

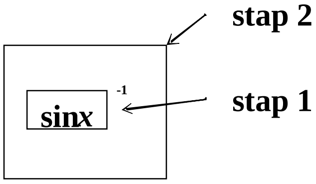
b $y = \sqrt{4-x}$

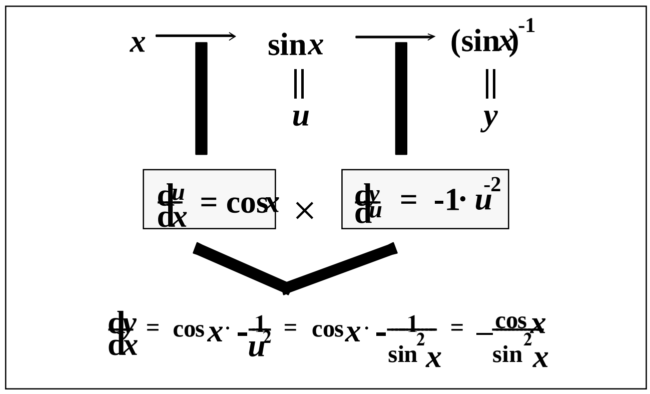
c $y = (2-\sqrt{x})^{-1}$

Bij het toepassen van de kettingregel zijn er twee manieren: 'van binnen naar buiten' en 'van buiten naar binnen'.

manier 1:

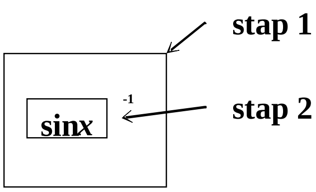
'van binnen naar buiten':

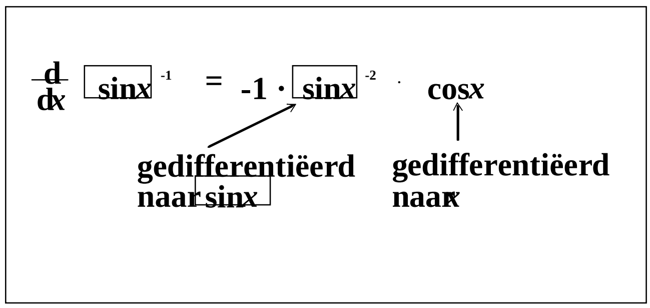




manier 2:

'van buiten naar binnen':





1.50 Vergelijk de bovenstaande manieren om de kettingregel toe te passen. Kies de methode die je het beste ligt en bereken achtereenvolgens:

a $\dfrac{d}{dx}(\cos^3 x)$ b $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ c $\dfrac{d}{dx}(\sqrt[3]{\sin x})$

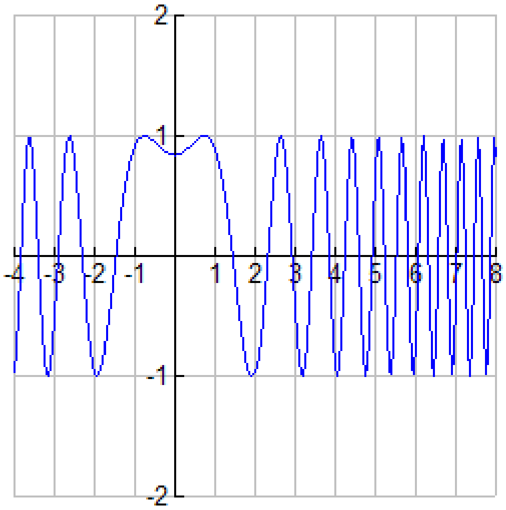
1.51 Gegeven de functie $y = \sin(x^2 + 1)$. In de tabel staan de hellingscoëfficiënten voor $x = 1, 2, \ldots, 10$.

Verder zijn ook de waarden van $\sin(x^2 + 1)$ en $\cos(x^2 + 1)$ voor x = 1, 2, ..., 10 afgedrukt.

	(1)	(2)	(3)
x	$\sin(x^2+1)$	$\frac{d}{dx}$	$\cos(x^2+1)$
1	0,909	–0,832	–0,416
2	–0,959	1,134	0,284
3	–0,544	–5,033	–0,839
4	–0,961	–2,202	–0,275
5	0,763	6,489	0,647
6	–0,644	9,223	0,765
7	–0,262	13,534	0,965
8	0,827	–9,010	–0,562
9	0,313	17,067	0,950
10	0,452	17,950	0,892

a Deel de uitkomsten van kolom (2) achtereenvolgens door de bijbehorende uitkomsten van kolom (3). Had je het resultaat kunnen voorspellen?

b Hieronder zie je de grafiek van de $y = \sin(x^2 + 1)$.



Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek symmetrisch moet zijn?

c Je ziet dat de ‘schommelperiode’ steeds kleiner wordt, naarmate je vanuit 0 meer naar rechts gaat. Hoe kun dat verklaren met behulp van de formule?

d De grafiek snijdt de y-as in een punt P met horizontale raaklijn. Laat zien hoe je dit kunt concluderen uit de hellingfunctie.

e In het plaatje zie je nog een aantal punten met horizontale raaklijn. Bereken de x-coördinaten van de twee punten met horizontale raaklijn die het dichtst bij P liggen.

1.52 Differentieer $y=\left(f(x)\right)^3$ naar x, achtereenvolgens voor:

a	$f(x)=x^2+4$	c	$f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$
b	$f(x)=\sin x$	d	$f(x)=\sqrt[3]{1-x}$

De kettingregel moet vaak worden toegepast in combinatie met som-, verschil-, of produktregel.

Voorbeeld:

Gegeven: $y=\sqrt[3]{1+2x}\ +\ 2\sqrt{3+x^2}$

Gevraagd: $\dfrac{dy}{dx}$

Oplossing: y is de som van twee functies die ieder met de kettingregel worden gedifferentieerd.

$$y=\quad(1+2x)^{\frac{1}{3}}\qquad+\qquad 2\cdot(3+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\cdot(1+2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2\quad+\quad 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(3+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}\quad+\quad\frac{2x}{\sqrt{3+x^2}}$$

1.53 Bereken $\dfrac{dy}{dx}$ als:

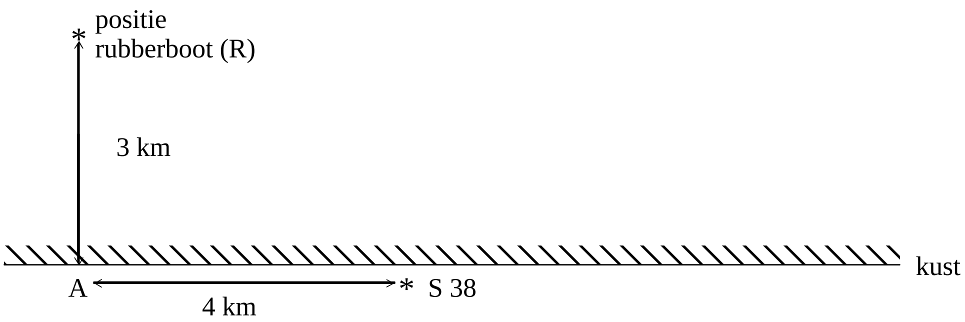
a	$y=\sqrt{x^2-4x}+5x$	c	$y=5x-\sqrt{x^2-4x}$
b	$y=\sqrt{x^2-4x}-5x$	d	$y=5x\cdot\sqrt{x^2-4x}$

1.54 Bereken $\dfrac{dy}{dx}$ als:

a	$y=\sin(x^2)+\cos(x^3)$	c	$y=\sin x\cdot\sqrt{\cos x}$
b	$y=\sin(x^2)\cdot\cos(x^3)$	d	$y=\sqrt{\sin x\cdot\cos x}$

1.55 Agent 007 is op 3 km afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zo snel mogelijk dit klusje klaart. Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 4 km/u. Het water is zo rustig dat de vaarrichting niet van invloed is op zijn snelheid. Op het strand kan hij een lange poos een snelheid van 8 km/u volhouden.

In onderstaande situatieschets zie je nog dat de strandpaal 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.



a Veronderstel dat James Bond inderdaad de kortste weg naar het strand neemt en 4 km loopt. Hoeveel tijd heeft hij nodig om paal 38 te bereiken?

b Hoeveel tijd heeft hij nodig als hij in schuine richting rechtstreeks naar de strandpaal roeit?

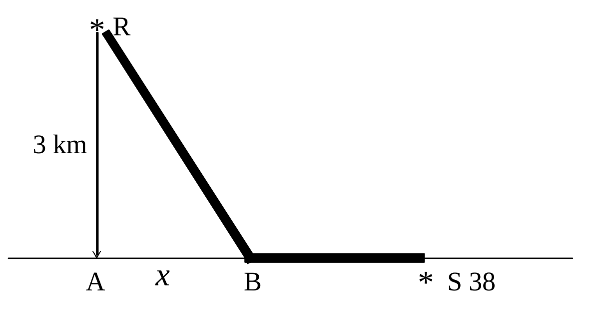
Misschien kan hij tijd sparen door ergens tussen A en paal 38 aan land te gaan.

c Stel dat hij precies halverwege (dus op 2 km van paal 38) de kust bereikt. Hoeveel minuten tijdwinst boekt hij ten opzichte van de vorige routes?

1.56 Met behulp van differentiaalrekening kun je de snelste weg voor James Bond berekenen. Stel dat hij x km van A aan land gaat (plaats B).De tijd t (in minuten) die nodig is om S38 te bereiken is een functie van x. Vandaar dat we noteren: $t(x)$.

d Laat zien dat geldt:

$$t(x) = 15\sqrt{9+x^2} + 30 - 7\tfrac{1}{2}x$$



e Bereken $t'(x)$ en los op:

$t'(x) = 0$

f Bereken (in seconden nauwkeurig) de minimale tijd die James Bond nodig heeft om paal 38 te bereiken.

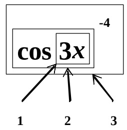
g Welke hoek moet bij de snelste route de vaarkoers RB maken met de lijn RA?

h Verandert het antwoord op de vorige vraag als S38 meer dan 4 km van A af ligt?

Een functie die een ketting is van drie of meer schakels kan ook met de kettingregel worden aangepakt.

Voorbeeld: $y = \dfrac{1}{\cos^4(3x)}$

Oplossing: Volgens de van 'binnen naar buiten' methode:



$$x \longrightarrow 3x \longrightarrow \cos(3x) \longrightarrow \cos^{-4}(3x)$$

$$3x = u, \qquad \cos(3x) = w, \qquad \cos^{-4}(3x) = y$$

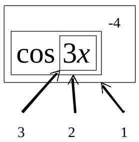
$$\boxed{\frac{du}{dx} = 3} \times \boxed{\frac{dw}{du} = -\sin u} \times \boxed{\frac{dy}{dw} = -4w^{-5}}$$

$$= 3 \cdot (-\sin u) \cdot (-4w^{-5})$$

$$= 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot (-4\cos^{-5} 3x)$$

$$= \frac{12 \sin 3x}{\cos^5 3x}$$

Oplossing volgens de van 'buiten naar binnen' methode:



$$y = \boxed{\cos 3x}^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 \cdot \boxed{\cos 3x}^{-5} \cdot -\sin 3x \cdot 3$$

gedifferentieerd naar $\boxed{\cos 3x}$

gedifferentieerd naar $3x$

gedifferentieerd naar x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{(\cos 3x)^5} \cdot -3\sin 3x = \frac{12 \sin 3x}{\cos^5 3x}$$

1.57 Kies één van beide methoden en differentieer met behulp van de kettingregel:

a	$y = \sin^3(x^2+1)$	b	$y = \sqrt[4]{\cos\sqrt{x}}$
c	$y = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}$	d	$y = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

1.5.1 Terugblik

Regel voor het differentiëren van machtsfuncties:

$$\frac{d}{dx}x^r = r\cdot x^{r-1}$$

Kettingregel

Bij een ketting van twee (of meer) functies wordt het differentiaalquotiënt berekend door vermenigvuldiging van de differentiaalquotiënten van elk van de schakels.
Voor een ketting van twee functies betekent dat:
als y een functie is van u en u een functie is van x,
dus als

$$x \longrightarrow u \longrightarrow y$$

dan: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{dy}{du}$

1.5.2 Opgaven

a Bereken achtereenvolgens:

$$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^4],\ \frac{d}{dx}[\sqrt[4]{(x^2+1)}],\ \frac{d}{dx}[\frac{1}{(x^2+1)^4}]$$

b $f(x) = \sin^3(5x)$
Bereken $f'(0{,}05\pi)$

c In onderstaande figuur zijn getekend de grafieken van $y = x$ (l) en $y = x^{\frac{1}{3}}$ (k)

Aanvankelijk stijgt k sneller dan l, later langzamer.
In welk punt van k vindt de 'ommekeer' plaats (dat wil zeggen, in welk punt heeft k dezelfde hellingscoëfficiënt als l?)