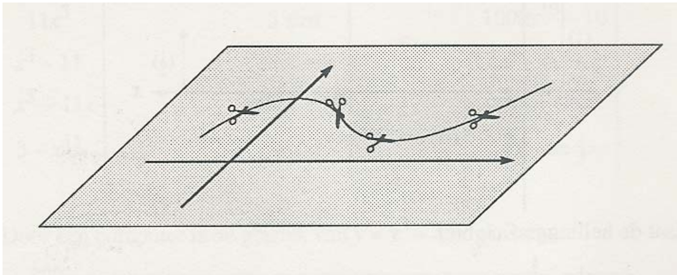
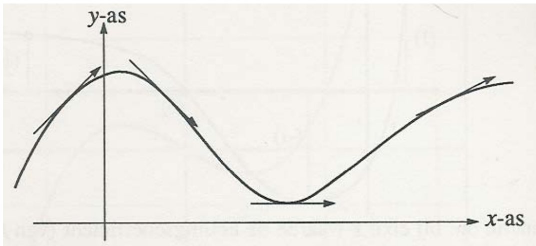
1.1 *Differentiëren, geknipt voor jou*

Je hebt leren omgaan met *hellingfuncties* of, wat hetzelfde is: *afgeleide functies.*

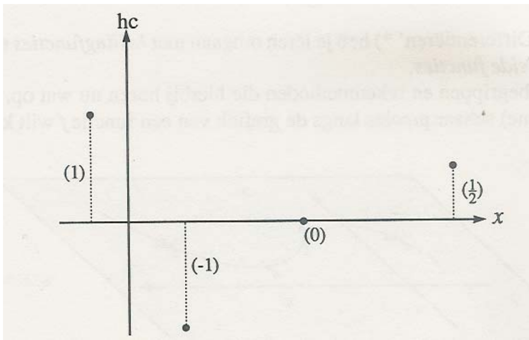
We frissen de begrippen en rekenmethoden die hierbij horen nu wat op. Stel dat je met een (gewone) schaar precies langs de grafiek van een functie *f* wilt knippen.



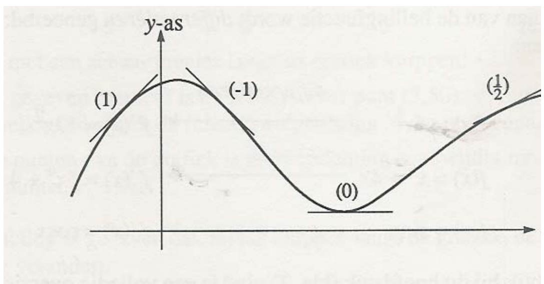
Tijdens het knippen verandert de schaar steeds van richting. In elk punt wordt de 'ideale kniprichting' aangegeven door de *raaklijn* aan de grafiek in dat punt.



De helling (of richting) van een rechte lijn in het *Oxy*-vlak wordt uitgedrukt in een getal: de *hellingscoëfficient* (of richtingscoëfficiënt) van die lijn. In de tekening zijn de bijbehorende hellingscoëfficiënten tussen haakjes genoteerd.



Je kunt nu de hellingscoëfficiënt (van de raaklijn) van een grafiek uitzetten tegen *x*:

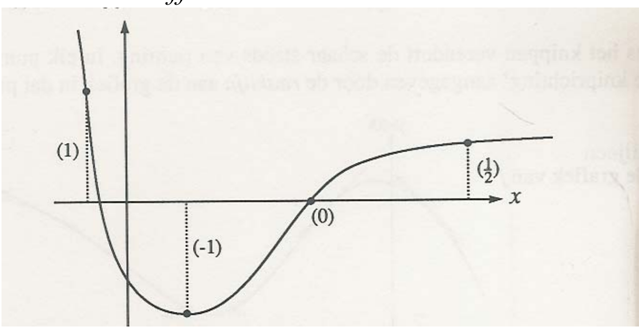


Zo ontstaat de hellinggrafiek bij *f*.
De functie die bij elke *x*-waarde de hellingcoëfficiënt (van *f*) geeft, is de *hellingsfunctie* of *afgeleide functie f'*.

$f\,'$ geeft dus aan hoe je bij elk punt (x,y) op de grafiek van f zou moeten knippen als je met een schaar precies die grafiek wilt volgen.

Van een aantal functies heb je geleerd hoe je snel de hellingfunctie kunt bereken. Het berekenen van de hellingfunctie wordt *differentiëren* genoemd. Voorbeelden:

differentiëren



$f(x) = 4x^3$	→	$f\,'(x) = 12x^2$
$f(x) = x^5 + 4x$	→	$f\,'(x) = 5x^4 + 4$
$f(x) = \sin x$	→	$f\,'(x) = \cos x$

In de terugblik bij dit hoofdstuk vind je een volledig overzicht van de regels voor het differentiëren die je tot nu toe hebt gehad.

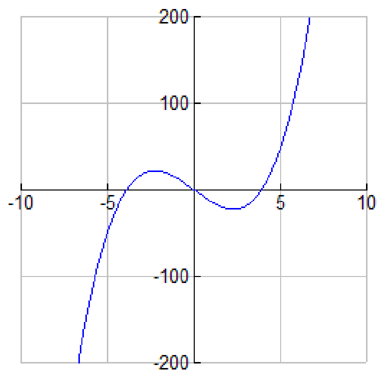
1.1 Differentieer:

a $f(x) = 11x^3$	g $f(x) = \sin(x+5)$
b $f(x) = x^3 - 11$	h $f(x) = \sin 5x$
c $f(x) = x^3 + 11x$	i $f(x) = 1000x^{10} - 10$
d $f(x) = 3 - x^{11}$	j $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}$
e $f(x) = 5\sin x$	k $f(x) = \cos x + \sin 2x$
f $f(x) = \sin x + 5$	l $f(x) = \frac{2}{3}x - \cos\frac{1}{3}x$

1.2 Hiernaast is de grafiek van $f(x) = x^3 - 15x$ getekend. Iemand wil met een schaar precies langs de grafiek knippen.

a Op een gegeven moment is de schaar in het punt (5,50). Door welk getal wordt de (ideale) knipriching in dat punt bepaald?

b In twee punten van de grafiek is de knipriching evenwijdig met de x-as. Welke punten zijn dat?



1.3 Van een functie f is gegeven dat, bij het knippen langs de grafiek, de schaar niet van richting verandert.

a. Wat voor soort functie is f ?

b. Wat weet je van f'?

1.4 Gegeven de functie: $f(x) = x^3 - x^2 - x$

a. Vul in

X	-2	-1	0	1	2
f(x)					
f’(x)					

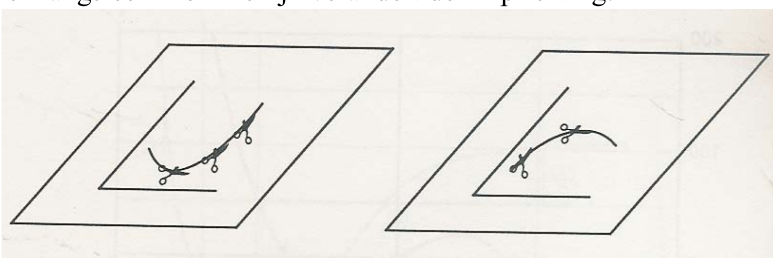
b. In welke heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn?

c. Op welk interval is de grafiek van f dalend?

d. Teken de grafiek van f.

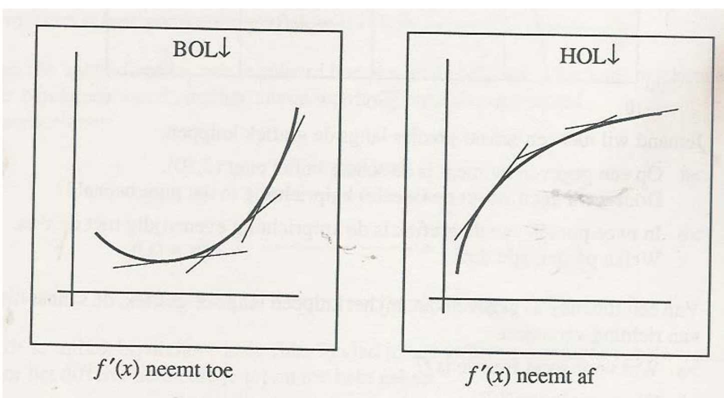
hol en bol

bij het knippen langs een kromme lijn verandert de kniprichting:

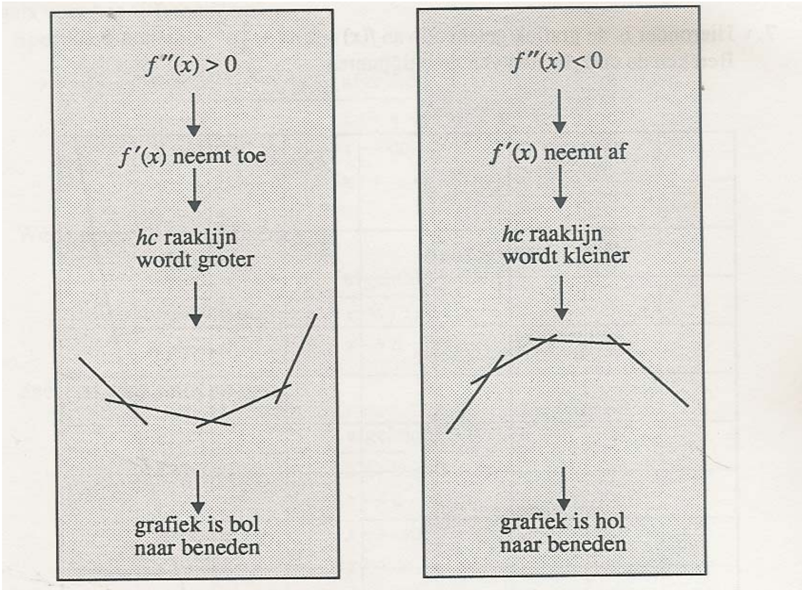


Wordt de hellingscoëfficiënt van de kniprichting steeds groter (t.o.v. de x-as) dan is de kniplijn bol naar beneden (of hol naar boven).

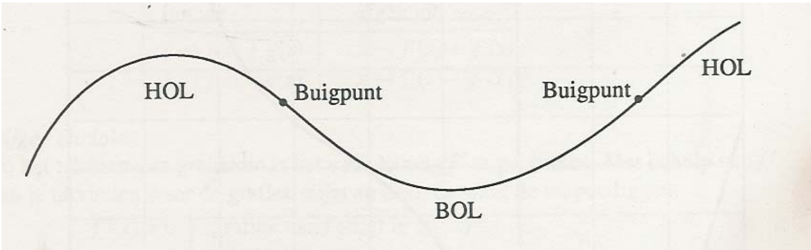
Wordt de hellingscoeëfficiënt steeds kleiner, dan is de kniplijn hol naar beneden (of bol naar boven).



Het gedrag van de draaiende raaklijn kan worden bepaald met behulp van de afgeleide van de afgeleide,, dus met de tweede afgeleide *f''* van f. Er geldt:



Een punt van overgang van hol naar bol (of omgekeerd heet buigpunt).



De coördinaten van de buigpunten worden berekend door de tweede afgeleide gelijk te stellen aan 0. ($f''(x)=0$)

Pas op: Als P(x_p, y_p) op de grafiek van *f* ligt en $f''(x)=0$, dan hoeft P nier persé een

` buigpunt te zijn. *f''* moet van teken wisselen in x_p.

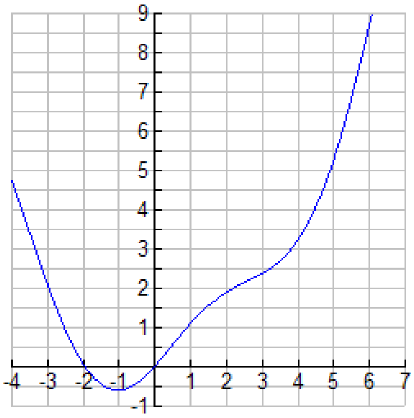
1.5 $f(x)=x^4$

a Los x op uit $f''(x)=0$.

b Heeft de grafiek van *f* een buigpunt?

1.6 De grafiek van de functie *f* uit opgave 4 heeft één buigpunt. Bereken de coördinaten van dat buigpunt.

1.7 hieronder is de grafiek getekend van $f(x)=\sin x+\frac{1}{4}x^2$ voor $-\pi \le x \le 2\pi$. Bereken de coördinaten van de buigpunten.



1.1.1 Terugblik

Regels voor het differentiëren.

a speciale functies

functie	afgeleide
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

b werken met een constante (c)

functie	afgeleide
$f(x) = g(x) + c$	$f'(x) = g'(x)$
$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$

c speciaal voor sinus en cosinus

functie	afgeleide
$f(x) = \sin(x + c)$	$f'(x) = \cos(x + c)$
$f(x) = \sin cx$	$f'(x) = c \cdot \cos cx$
$f(x) = \cos(x + c)$	$f'(x) = -\sin(x + c)$
$f(x) = \cos cx$	$f'(x) = -c \cdot \sin cx$

d som- en verschilfunctie

functie	afgeleide
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) - h'(x)$
$f(x) = g(x) - h(x)$	$f'(x) = g'(x) - g'(x)$

stijgen en dalen

Bij het tekenen van grafieken is het handig *f'* te gebruiken. Met behulp van *f'* kun je onderzoeken waar de grafiek stijgt en daalt en waar de toppen liggen.

$f'(x) > 0$ | grafiek van *f* stijgt in (x, …)

$f'(x) = 0$ | grafiek van *f* heeft horizontale raaklijn in (x, …)

$f'(x) < 0$ | grafiek van *f* daalt in (x, …)

Hol en bol

f'' is geeft de verandering van *f'*.

$f''(x) > 0$ | *f'(x)* neemt toe | grafiek van *f* bol naar beneden

$f''(x) < 0$ | *f'(x)* neemt af | grafiek van *f* hol naar beneden

de overgang van hol naar bol (of omgekeerd) wordt aangegeven door een buigpunt.